Representación geométrica de las coordenadas generalizadas en la mecánica hamiltoniana

María M. Ayala, **John E. Barragan**
Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional, Calle 72 No.11-86. Bogotá, Colombia.

E-mail: ayalam49@gmail.com

(Recibido el 16 Julio 2013, aceptado el 27 de Noviembre de 2013)

Resumen
A pesar de la importancia que tiene la geometría en la física ésta no suele ser destacada en su enseñanza. En este artículo mostraremos el carácter que imprime y comprensión que aporta lo geométrico en la descripción del estado mecánico de un sistema. Mostraremos en particular la relevancia que tienen las superficies cuando se asumen como los elementos estructurantes del espacio y se dará interpretación geométrica a términos como jacobiano de una transformación y formas covariantes y contravariantes de un vector.

Palabras clave: Geometría y física, Mecánica Hamiltoniana, Análisis conceptual de la física, significado geométrico de las coordenadas generalizadas.

Abstract
Despite the importance of geometry in physics is not usually prominent in their teaching. This article will show the character that prints and the understanding that brings the geometric description of the mechanical state of a system. We will show, in particular, the relevance that surfaces has when it is assumed as the structural elements of space and geometric interpretation will be given to such terms as a Jacobian ransformation and covariant and contravariant forms of a vector**.**

Keywords: Geometry and Physics, Hamiltonian mechanics, Conceptual analysis of physics, conceptual meaning of the generalized coordinates.

PACS: 02.40.Yy, 01.40.Ha, 01.40.Fk. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Buena parte de las estrategias de formalización en física implícitas en la construcción de magnitudes físicas están íntimamente relacionadas con las formas que se le dan a las relaciones espaciales, donde las estructuras que se explicitan son usadas a su vez para formalizar otros campos de la experiencia. El tratamiento de la extensión es, en primera instancia, el modelo y referencia de toda magnitud física. Además, los criterios con los que se suelen clasificar las magnitudes físicas son de tipo geométrico, si bien estos implican a su vez diferencias de tipo algebraico en cuanto hacen referencia a formas diferentes de operar con ellas: Vemos, así, como se suelen clasificar las magnitudes en extensivas e intensivas, también en flujos e intensidades, o en escalares, vectores y tensores y en las magnitudes vectoriales identifican dos clases axiales y polares. Maxwell, por ejemplo, afirma que la distinción entre flujos e intensidades radica en que los flujos son magnitudes definidas con relación a superficies y las intensidades con relación a línea [1]. No obstante la relevancia de la geometría en la física ésta no suele ser destacada en su enseñanza.

En este artículo mostraremos el carácter que imprime y comprensión que aporta lo geométrico en la descripción del estado mecánico de un sistema. Mostraremos en particular la relevancia que tienen las superficies cuando se asumen como los elementos estructurantes del espacio y se dará interpretación geométrica a términos como jacobiano de una transformación y formas covariantes y contravariantes de un vector.

Para describir el estado mecánico de un sistema se requiere determinar las coordenadas generalizadas, es decir, las variables necesarias para especificar los cambios que en su configuración el sistema puede experimentar, así como las variables conjugadas necesarias para especificar los movimientos posibles del sistema asociadas a las coordenadas generalizadas. Pero la determinación de dichas a variables no es única. Es posible escoger distintos conjuntos de variables que cumplen con este propósito. Sin embargo para hacerlo es conveniente aproximarnos lo más que se pueda a lo que denominaremos la *geometría del sistema*. A continuación buscaremos mostrar el significado de esta afirmación.

Para empezar es importante tener en cuenta que las superficies son los elementos fundamentales en la organización del espacio en el que consideramos se suceden los diversos fenómenos del mundo físico, en cuanto es con ellas que se puede diferenciar una región de otra en el espacio y encerrar regiones del mismo. Pero para que ello sea posible se requiere que las superficies sean orientables, es decir, que podamos hablar de los lados de una superficie. La diferenciación izquierda-derecha ilustra este requisito de orientabilidad de las superficies. De hecho la orientación del plano de simetría que podemos reconocer en el cuerpo humano es base y expresión de esta diferenciación. Pensemos que ocurriría con nuestra organización espacial si confundiéramos o no distinguiéramos entre derecha e izquierda. Recordemos las dificultades que tenemos en el manejo espacial cuando actuamos mirándonos a un espejo. Un buen ejemplo de una superficie no orientable es la *Cinta de Möbius.*

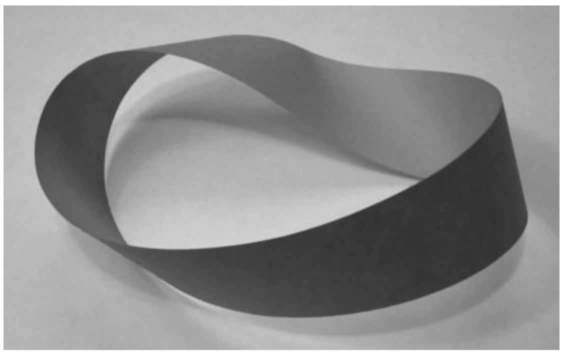

FIGURA 1. Cinta *Möbius*.Tomada de: http://eltamiz.com/2007/12/04/videos-diversion-con-una-cinta-de-mobius/ [2].

II. SISTEMAS DE COORDENADAS NO ORTOGONALES Y SISTEMAS RECÍPROCOS

La relevancia de los planos y superficies en la estructuración del espacio es otra de las graves omisiones en la enseñanza de la física y las matemáticas. En términos de superficies orientables podemos determinar los elementos básicos mediante los cuales representamos las relaciones espaciales como son los puntos y las líneas o curvas; así, un punto puede ser pensado como la intersección de tres superficies y una curva la intersección de dos De otra parte, es importante destacar que para ubicar un punto en el espacio con relación a otro usualmente recurrimos a tres planos perpendiculares entre sí, planos cartesianos, que se interceptan en el punto de referencia, y que su intersección en parejas definen las líneas conocidas con el nombre de ejes coordenados: las coordenadas del punto en cuestión son las distancias del punto a los planos coordenadas. Sin embargo también es posible y muy ilustrativo, aunque menos usual, determinar la posición de un punto respecto a otro teniendo como referencia planos que **no** son perpendiculares entre sí, o lo que es lo mismo, expresar un vector $\vec{\mathbf{r}}$ cualquiera en términos de tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que no son coplanares. Tal determinación exige a su vez encontrar los valores *a, b, y c* para los cuales

$$\vec{\mathrm{r}} = a\vec{\mathrm{a}} + b\vec{\mathrm{b}} + c\vec{\mathrm{c}}. \qquad (1)$$

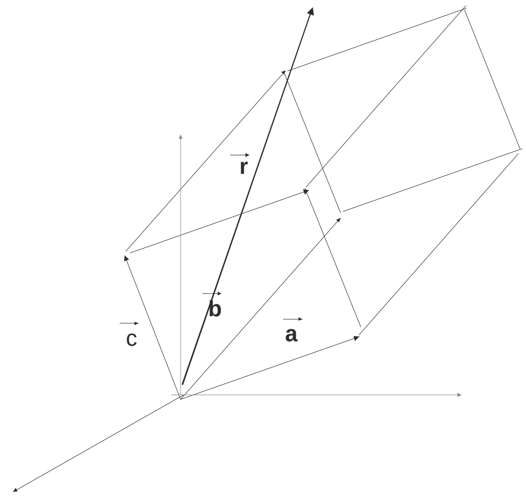

FIGURA 2. Tres vectores $\vec{a}, \vec{b}$ *y* $\vec{c}$ que no son coplanares.

La condición de no coplanareidad de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ corresponde a exigir que dichos vectores, trazados desde el mismo origen estén contenidos en planos que definan un paralelepípedo, y que por serlo tenga un volumen diferente de cero lo cual equivale desde un punto de vista analítico a exigir que el producto triple mixto entre ellos **no** sea nulo:

$$\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}} = \vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{\mathrm{c}}\times\vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{c}}\cdot\vec{\mathrm{a}}\times\vec{\mathrm{b}} \neq 0. \qquad (2)$$

Haciendo el producto escalar de $\vec{r}$ con $\vec{b}\times\vec{c}$, es decir, encontrando la proyección de $\vec{r}$ en el plano *b-c* que equivale a $r\cos\beta$ siendo β el ángulo formado entre $\vec{r}$ y dicho plano (entre $\vec{\mathbf{r}}$ y la normal al plano**),** y así respectivamente[1] con los otros planos, tenemos que

$$\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}} = a\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}, \qquad (3)$$

$$\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{c}}\times\vec{\mathrm{a}} = b\vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{\mathrm{c}}\times\vec{\mathrm{a}}, \qquad (4)$$

$$\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{a}}\times\vec{\mathrm{b}} = c\vec{\mathrm{c}}\cdot\vec{\mathrm{a}}\times\vec{\mathrm{b}}. \qquad (5)$$

Por lo tanto

$$a = \frac{\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}}{\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}}, \qquad (6)$$

$$b = \frac{\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{c}}\times\vec{\mathrm{a}}}{\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}}, \qquad (7)$$

$$c = \frac{\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{a}}\times\vec{\mathrm{b}}}{\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}}. \qquad (8)$$

Estos valores expresados en forma de determinantes son expresión del uso de la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones que se deriva en el proceso de determinación de los coeficientes buscados, *a, b y c*. Esta es también una ilustración de la íntima relación existente entre la geometría y el álgebra.

Designemos a $\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$, $\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$ y $\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$ respectivamente por $\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b^*} y\, \overrightarrow{c^*}$. Dichos vectores son respectivamente normales a los planos que contienen a $\vec{b}$ y $\vec{c}$, a $\vec{a}$ y $\vec{c}$ y a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y no son unitarios. El vector $\vec{r}$ se puede escribir entonces como

$$\vec{r} = (\vec{r}\cdot\overrightarrow{a^*})\vec{a} + (\vec{r}\cdot\overrightarrow{b^*})\vec{b} + (\vec{r}\cdot\overrightarrow{c^*})\vec{c}\,. \qquad (9)$$

Se dice que. $\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b^*} y\, \overrightarrow{c^*}$.conforma un sistema recíproco a $\vec{a}, \vec{b}\; y\; \vec{c}$.Es muy importante tener en cuenta que $\vec{a}, \vec{b}\; y\; \vec{c}$ no sean coplanares. Por definición el producto escalar de cualquiera de los vectores del sistema recíproco con su correspondiente vector del sistema dado es la unidad, pero el producto escalar con vectores no correspondientes se anula, así:

$$\overrightarrow{a^*}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{b^*}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{c^*}\cdot\vec{c} = 1\,, \qquad (10)$$

$$\overrightarrow{a^*}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{a^*}\cdot\vec{c} = 0, \qquad (11)$$

$$\overrightarrow{b^*}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{b^*}\cdot\vec{c} = 0, \qquad (12)$$

$$\overrightarrow{c^*}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{c^*}\cdot\vec{b} = 0. \qquad (13)$$

Se puede mostrar que los volúmenes de los paralelepípedos definidos por los vectores de dos sistemas recíprocos son inversos entre sí:

$$\overrightarrow{a^*}\cdot\overrightarrow{b^*}\times\overrightarrow{c^*} = \frac{1}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}\,. \qquad (14)$$

Estos sistemas se dice que son recíprocos entre sí porque se establecen entre ellos relaciones totalmente simétricas; mientras que $\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b^*} y\, \overrightarrow{c^*}$ se expresan en términos de $\vec{a}, \vec{b}\; y\; \vec{c}$ como:

$$\overrightarrow{a^*} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}\,,\quad \overrightarrow{b^*} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}\quad y\quad \overrightarrow{c^*} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}\,, \qquad (15)$$

$\vec{a}$, $\vec{b}\; y\; \vec{c}$ se expresan en términos de $\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b^*} y\, \overrightarrow{c^*}$ como:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{b^*}\times\overrightarrow{c^*}}{\overrightarrow{a^*}\cdot\overrightarrow{b^*}\times\overrightarrow{c^*}}\,, \qquad (16)$$

$$\vec{b} = \frac{\overrightarrow{c^*}\times\overrightarrow{a^*}}{\overrightarrow{a^*}\cdot\overrightarrow{b^*}\times\overrightarrow{c^*}}\,, \qquad (17)$$

$$\vec{c} = \frac{\overrightarrow{a^*}\times\overrightarrow{b^*}}{\overrightarrow{a^*}\cdot\overrightarrow{b^*}\times\overrightarrow{c^*}}\,. \qquad (18)$$

De este modo un vector $\vec{\boldsymbol{r}}$ cualquiera se puede expresar en el sistema $\vec{a}, \vec{b}\; y\; \vec{c}$ como:

$$\vec{r} = (\vec{r}\cdot\overrightarrow{a^*})\vec{a} + (\vec{r}\cdot\overrightarrow{b^*})\vec{b} + (\vec{r}\cdot\overrightarrow{c^*})\vec{c}\,, \qquad (19)$$

y en su sistema recíproco como:

$$\vec{r} = (\vec{r}\cdot\vec{a})\overrightarrow{a^*} + (\vec{r}\cdot\vec{b})\overrightarrow{b^*} + (\vec{r}\cdot\vec{c})\overrightarrow{c^*}\,. \qquad (20)$$

Cuando el $\vec{a}, \vec{b}\; y\; \vec{c}$ son perpendiculares entre sí, se dice que conforma un sistema auto recíproco en la medida que este sistema y su recíproco coinciden.

III. VECTORES BASE PARA LAS COORDENADAS GENERALIZADAS

Las coordenadas cilíndricas y esféricas son casos particulares de las coordenadas generalizadas q_j*'s* ($j = 1,\dots f$ siendo f el número de grados de libertad que hemos utilizado para describir la configuración de los sistemas mecánicos estudiados. La posición $\vec{\mathbf{r}}_i$ ($i = 1,\dots N$ siendo N el número de partes móviles de cada parte móvil del sistema la hemos expresado en términos de dichas coordenadas. Considerando la variación de la posición de la partícula *i* cuando la coordenada q_j tiene un incremento infinitesimal dq_j definimos los vectores base unitarios $\hat{q}_j's$ asociados a las coordenadas q_j*'s* como:

$$\hat{q}_J = \frac{\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial qj}}{\left|\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial qj}\right|}\,, \qquad (21)$$

de modo que el vector $\hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{J}}$ tiene el mismo sentido que el desplazamiento infinitesimal de la partícula cuando la coordenada q_j varía un dq_j. $\left|\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial qj}\right|$ se suele designar por h_j, por lo tanto $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial qj}$. se puede escribir como $h_j\hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{J}}$ [3].

Consideremos el caso de las coordenadas esféricas *r, θ, φ* y tomemos como referencia las coordenadas rectangulares, el vector $\vec{\boldsymbol{r}}$ se puede expresar entonces como:

$$\vec{r} = x(r,\theta,\varphi\;)\hat{x} + y(r,\theta,\varphi\;)\hat{y} + z(r,\theta,\varphi\;)\hat{z}\,, \qquad (22)$$

$$\vec{r} = r\mathrm{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{x} + r\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\varphi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}\,. \qquad (23)$$

Los vectores base esféricos en términos de los vectores unitarios rectangulares serán por lo tanto:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \text{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{x} + $$
$$+\,\text{sen}\theta\text{sen}\varphi\hat{y} + \text{sen}\theta\hat{z} = h_r\,\hat{r} = \hat{r}\,, \qquad (24)$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = rcos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + rcos\theta\text{sen}\varphi\hat{y} - $$
$$-rcos\theta\hat{z} = h_\theta\,\hat{\theta} = r\,\hat{\theta}\,, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi\,\hat{x} + $$
$$+r\text{sen}\theta\cos\varphi\hat{y} = h_\varphi\hat{\varphi} = r\text{sen}\theta\,\hat{\varphi}\,. \qquad (26)$$

La condición de no coplanareidad de los vectores $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ y $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ está dada, como lo habíamos visto, por la condición de que el producto triple mixto $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ no se anule que coincide con la exigencia de que el jacobiano de las coordenadas cartesianas con respecto a las esféricas tampoco lo haga, que es a su vez la condición necesaria y suficiente para que las coordenadas esféricas o, en general, las coordenadas generalizadas se puedan expresar en función de las cartesianas, o en otras palabras que exista la transformación inversa:

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \neq 0\,. \qquad (27)$$

O en general:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} \neq 0\,. \qquad (28)$$

Los vectores $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}$ y $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}$ no son siempre ortogonales entre sí, entonces, como habíamos visto, tienen un sistema de vectores recíprocos que son normales a las superficies que define el vector posición $\vec{\boldsymbol{r}}\,(q_1,\ q_2,\ q_3)$ cuando una de las coordenadas generalizadasq_j de las cuales es función permanece constante y las otras dos varían. De hecho, como las coordenadas generalizadas se pueden expresar en función de las rectangulares, las ecuaciones $q_1(x,y,z) = c_1$, $q_2(x,y,z) = c_2$, $q_3(x,y,z) = c_3$ donde c_1, c_2 y c_3 son constantes que representan tres superficies que pasan por un punto con coordenadas rectangulares $x_o(c_1, c_2 \text{ y } c_3), y_o(c_1, c_2 \text{ y } c_3), z_o(c_1, c_2 \text{ y } c_3)$. Esto equivale a decir que el punto en cuestión es la intersección de las superficies $q_1 = c_1$, $q_2 = c_2$ y $q_3 = c_3$. La intersección de las superficies q_1 y q_2 define una curva a lo largo de la cual sólo varía q_3; curva respecto a la cual $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}$ y por lo tanto $\widehat{q_3}$ es tangente en cada punto y así respectivamente con las otras parejas de superficies.

En las figuras 3 y 4 se ilustran estas afirmaciones para el caso de las coordenadas esféricas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que dichas coordenadas son ortogonales y por lo tanto el sistema de coordenadas es auto recíproco, lo cual implica que los vectores tangentes a las curvas intersección de las superficies coinciden con las normales a dichas superficies. Nótese que las normales a las superficies son los gradientes de las funciones que las representan en cada punto de éstas. La representación de un vector en que implica proyectarlo en las direcciones normales a las superficies de referencia se suele denominar representación *covariante* y aquella que lo proyecta hace respecto a las tangentes a las curvas intersección entre dichas superficies *representación contravariante*.

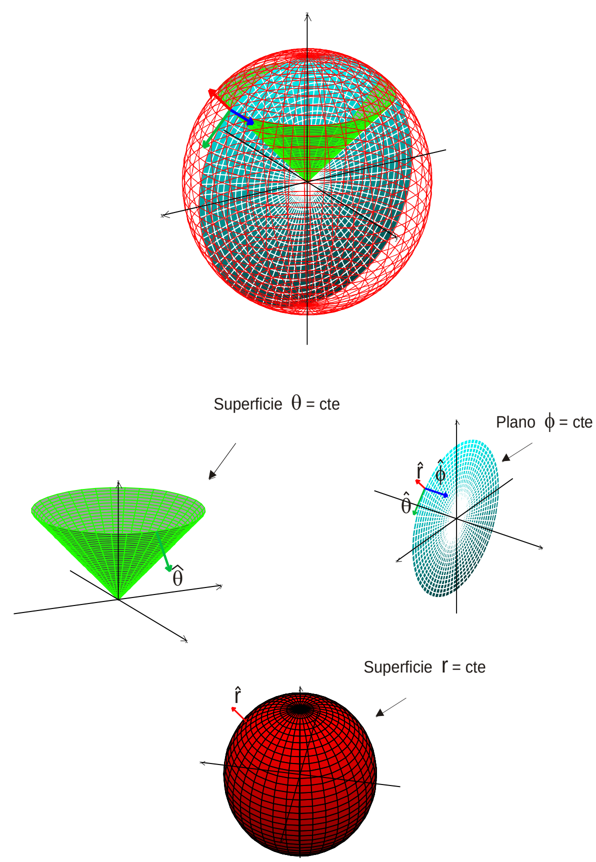

FIGURA 3. Superficies asociadas a las coordenadas esféricas y vectores unitarios esféricos.

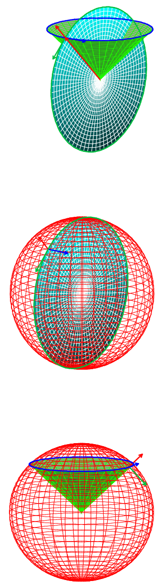

FIGURA 4. Curvas asociadas a las coordenadas esféricas que resultan de las superficies esféricas intersección de las superficies "esféricas" de la figura3.

Podemos concluir entonces que al definir las coordenadas generalizadas para describir la configuración del sistema mecánico se define a la vez el sistema de superficies en términos de los cuales se analiza el espacio en el cual se representa la evolución del sistema. De otra parte, como hemos visto en general, la velocidad de cada parte móvil del sistema mecánico, en particular se puede expresar en función de los vectores base de las coordenadas generalizadas utilizadas $\hat{q}_j's$, o de sus recíprocos $\hat{q}_j^{*}{}'s$, así:

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_j \left(\vec{\mathbf{v}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_\mathbf{j}^{*}\right) \hat{\mathbf{q}}_\mathbf{j} \equiv \sum_\mathbf{j} v_j{}^{*}\, \hat{\mathbf{q}}_\mathbf{j}\,, \tag{29}$$

o

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \sum_j \left(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \hat{\mathrm{q}}_\mathrm{j}\right) \hat{\mathrm{q}}_\mathrm{j}^{*} \equiv \sum_\mathrm{j} v_j\, \hat{\mathrm{q}}_\mathrm{j}^{*}\,, \tag{30}$$

donde las $v_j^{*}{}'s$ se suelen denominar las componentes covariantes de la velocidad y las $v_j's$, las componentes contravariantes de la velocidad o simplemente velocidades generalizadas $\dot{q}_j's$.

IV. CONCLUSIONES

La geometría descrita a través del manejo de superficies brinda al estudiante la posibilidad de de estructurar el espacio de la mecánica hamiltoniana.

La relación entre geometría y algebra vectorial toma sentido cuando se involucran elementos conceptuales como los descritos en este articulo en términos de las coordenadas generalizadas y sus posibles formas de representación. Las nociones de vector covariante y contravariante tienen representación geométrica y por lo tanto también pueden ser entendidas dichas representaciones vectoriales.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al grupo Física y Cultura de la Universidad Pedagógica Nacional por permitir este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Ayala, M., Romero, A., Malagon, F., Rodriguez, L. D. Garzon, M. y Aguilar, Y., *Los procesos de formalización y la organización de los fenómenos físicos: el caso de los fenómenos mecánicos*, (Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2008).

[2] Gómez, P., http://eltamiz.com/2007/12/04/videos-diversion-con-una-cinta-de-mobius/\
Consultada el 10 de enero de 2013.

[3] Krasnov, M. L.,Kiseliov, A. I., Makarenko, E. I., *Análisis Vectorial.*(Editorial MIR, Moscú, 1981).