

Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. II. Rotación



Güémez, J.¹, Fiolhais, M.²

¹Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, Avenida de Los Castros s/n 39005, Santander, España.

²Departamento de Física y Centro de Física Computacional, Universidade de Coimbra, P-3004-516, Coimbra, Portugal.

E-mail: guemezj@unican.es

(Recibido el 18 de julio de 2014; aceptado el 21 de julio de 2014).

Resumen

Para analizar fenómenos de dinámica de rotación se postula la *ecuación matricial de la rotación*, y a partir de ella se obtiene la *ecuación del impulso angular-variación del momento angular* (equivalente en rotación a la ecuación de la Segunda Ley de Newton en traslación). La integración de esta ecuación permite obtener su correspondiente *ecuación de la energía cinética de rotación* (equivalente en rotación a la ecuación del centro-de-masas en traslación). Cuando se incluyan fuerzas disipativas o se trate de procesos de producción de energía mecánica en rotación, este formalismo rotacional se debe completar con la *ecuación matricial de la energía*, que va a incluir como energía interna del sistema la energía cinética de rotación y que permite describir los efectos térmicos que se produzcan.

Palabras clave: Formalismo matricial, Mecánica clásica, rotación.

Abstract

To analyze phenomena of the rotational dynamics of the rotation matrix equation is postulated and, from it, the equation of angular momentum-change of angular momentum (rotation equivalent to the equation of Newton's Second Law in translation) is obtained. The integration of this equation allows to obtain the corresponding equation of the kinetic energy of rotation (rotation equivalent to the equation of the center-of-mass motion). When dissipative forces are included or when the production processes of mechanical energy into rotation, this rotational formalism must be completed with the matrix equation of energy, which will include internal energy of the system as the kinetic energy of rotation and for describing thermal effects occurring.

Keywords: Matrix formalism, Classical Mechanics, rotation.

PACS: 01.30.-y, 01.30.Bb, 01.30.Rr, 01.40.E-

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Para intentar superar la actual separación entre la enseñanza de la mecánica y de la termodinámica, así como para conseguir una mayor comprensión del principio de relatividad en la física clásica, se ha desarrollado un nuevo formalismo matricial en traslación [1, 2]. En este formalismo matricial se postula la denominada *ecuación matricial del centro-de-masas* $d\mathcal{K}_{cm} = (\sum_j F_j^{ext}) dL_{cm}$ que permite obtener a la vez las correspondientes *ecuación (vectorial) impulso-variación del momento lineal* y la *ecuación (escalar) del centro-de-masas*. Posteriormente se amplía el formalismo matricial para postular la *ecuación matricial de la energía* $d\mathcal{K}_{cm} + \sum_n d\mathcal{U}_n = \sum_j \delta\mathcal{W}_j^{ext} + dQ$, que, integra en una única ecuación matricial la segunda ley de Newton y el Primer Principio de la Termodinámica. Utilizando matrices de transformación entre referenciales el formalismo asegura el cumplimiento del Principio de Relatividad.

En el caso de los procesos de rotación, la separación didáctica entre mecánica y termodinámica es si cabe, más acusada [3].

Cuando se escribe la Ecuación de Poinot-Euler [4] (también conocida como Segunda Ley de Newton aplicada a la rotación), para sistemas con momento de inercia I constante, $I\Delta\omega = \int \Gamma_{ext} dt$, donde Γ_{ext} es el torque de las fuerzas externas, nunca se considera el papel de las posibles fuerzas sin desplazamiento, que no realizan trabajo, aplicadas sobre el sistema (por ejemplo, fuerzas de rozamiento aplicadas sobre el borde de un disco que gira).

La ecuación que se obtiene a partir de ésta:

$$\frac{1}{2} I \Delta\omega^2 = \int \Gamma_{ext} d\theta, \quad (1)$$

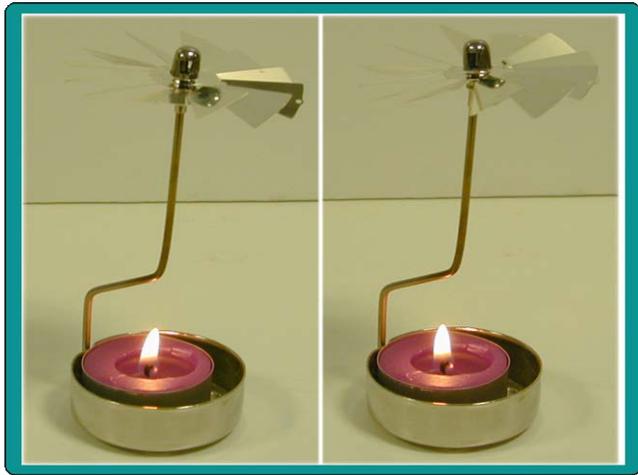


FIGURA 1. Molinete térmico. La pequeña turbina adquiere energía cinética de rotación sin que el centro-de-masas se desplace. La energía libre producida en la reacción de combustión de la cera de la vela está en el origen de dicha energía cinética de rotación.

donde $\frac{1}{2}I\Delta\omega^2 = \Delta K_R$ es la variación de la energía cinética de rotación y $d\theta$ el ángulo girado durante el intervalo de tiempo dt , no es la aplicación del teorema trabajo energía cinética a la rotación. La Ecuación 1 es únicamente el equivalente en rotación de la ecuación del centro de masas en traslación y, por tanto, no es, en general, una ecuación de la energía.

En la ecuación generalizada del primer principio $\Delta K_{cm} + \Delta U = W_{ext} + Q$, la variación de la energía cinética de rotación ΔK_R entra en ella formando parte de la variación de la energía interna del sistema ΔU , pues, precisamente, se trata de energía cinética relativa al centro de masas del sistema, una magnitud que es independiente del sistema de referencia.

Así, cuando exista una dinámica de rotación, pura o superpuesta a un proceso de traslación del centro de masas del sistema, se postula la ecuación matricial de la energía:

$$\Delta K_{cm} + \sum_n dU_n = \int \sum_j (F_j^{ext} d\mathcal{L}_j) + Q, \quad (2)$$

la cual generaliza el Primer Principio (matricial) de la Termodinámica (posteriormente se va a considerar explícitamente que la matriz de la energía cinética de rotación forma parte de la energía interna del sistema). Esta ecuación de la energía permite considerar, por ejemplo, procesos en los que una máquina térmica produce energía mecánica en forma de energía cinética de rotación, con o sin desplazamiento de su centro de masas y procesos en los que la propia máquina térmica hace girar ruedas, volantes etc., a la vez que se desplaza a sí misma, como, por ejemplo, en el caso de un tren movido por una máquina de vapor. En un molinete térmico (Figura 1), que incluye la pequeña turbina o molinete y la vela de cera encendida, parte de la energía libre liberada en la combustión de la vela se convierte en energía cinética de rotación del molinete, produciéndose una transformación entre energías internas del sistema.

Para intentar superar la separación entre mecánica, ahora de rotación, y termodinámica, en este artículo se introduce un formalismo matricial para la rotación, que completa el formalismo matricial para la traslación previamente desarrollado. Como en el caso del formalismo matricial para la traslación, el formalismo matricial para la rotación es también deudor del formalismo de la Teoría Especial de la Relatividad para la rotación [5].

Aunque el formalismo matricial va a conducir a los mismos resultados que los métodos mecánico y termodinámico habitual en los libros de texto, dicho formalismo es más sistemático, proporciona una visión más amplia de la unidad de la física, y permite superar errores conceptuales, presentando claramente como diferentes lo que son hipótesis físicas distintas, mostrando cómo dichas hipótesis se articulan en ecuaciones matriciales, e indicando cómo se obtienen las diferentes ecuaciones vectoriales y escalares correspondientes.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En primer lugar se lleva a cabo el desarrollo del formalismo matricial aplicado a la rotación. Posteriormente se aplica a dos ejemplos, el de un disco que gira sometido a fuerzas de rozamiento, dando lugar a disipación de energía cinética de rotación por calor y el de una rueda de fuegos artificiales, un ejemplo en rotación de producción de energía mecánica mediante procesos químicos.

II. FORMALISMO MATRICIAL PARA LA ROTACIÓN

Para describir un determinado proceso, se elige un cierto sistema de referencia inercial.

Normalmente, y dado el problema físico, hay un criterio de sencillez para elegir este referencial.

Como ya se ha hecho en el caso de la traslación, siempre que en el proceso intervenga un cuerpo de masa cuasi-infinita, el suelo, una pared, etc., se elige primero como referencial S_∞ aquel referencial en el que dicho sistema de masa cuasi-infinita permanece en reposo.

Definido el sistema, se elige un punto O sobre el que tomar los momentos que intervienen en la descripción de la rotación.

El punto O elegido debe cumplir ciertas condiciones, no demasiado restrictivas (Figura 2) [6].

En general, el punto O será un punto que permanezca fijo a lo largo del proceso, pudiendo ser también el centro de masas del sistema, aunque dicho sistema se desplace [7].

A. Matrices fuerza, brazo y torque

En el formalismo matricial desarrollado, una fuerza $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ viene caracterizada por una matriz simétrica F dada por:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 0 & -R_z & R_y & 0 \\ R_z & 0 & -R_x & 0 \\ -R_y & R_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

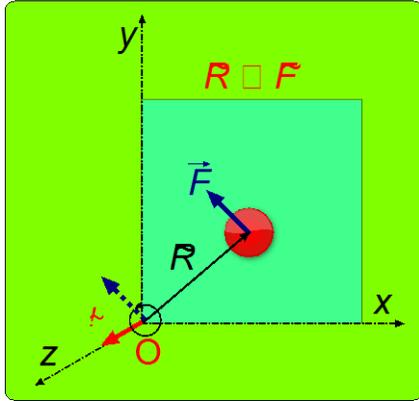


FIGURA 2. Signos del producto vectorial. El producto vectorial $\vec{R} \times \vec{F}$ apunta en la dirección positiva del eje z. Se toma el punto O como origen de los momentos. Los ejes coordenados y los signos de los componentes en las matrices fuerza y brazo se eligen de manera que la definición del torque mediante matrices asociadas a vectores coincida con la forma habitual de definir el producto vectorial de los mismos dos vectores.

Si la matriz desplazamiento espacio-temporal asociada a una fuerza viene dada por una matriz columna y la matriz impulso-trabajo para esa fuerza viene dada por el producto matricial de la matriz 4×4 de la fuerza por la matriz columna del desplazamiento (equivalente matricial del producto escalar de dos vectores), en rotación, el brazo de una fuerza vendrá caracterizado por una matriz de orden 4×4 antisimétrica, siendo el producto doble de ambas matrices el equivalente matricial del producto vectorial de dos vectores.

Si el vector que va desde el punto O hasta el punto en el que se aplica la fuerza \vec{F} viene dado por $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$, entonces será R la matriz antisimétrica, dada en la Ecuación 3, la que lo va a caracterizar. Estas definiciones son deudoras de las definiciones de los tensores campo eléctrico y campo magnético respectivamente, en relatividad [8].

Las expresiones anteriores, con los signos adoptados, para F y R , implican el producto vectorial de los vectores unitarios $\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$ (Figura 2). La matriz 4×4 simétrica M del momento de la fuerza F , con brazo \vec{R} , asociado a esa fuerza y su brazo respecto del punto elegido se define como [9]:

$$M = RF - FR. \quad (4)$$

Esta definición, basada en el tratamiento de la rotación en la teoría especial de la relatividad, obedece a la simetría espacial que hace que el producto vectorial se pueda elegir de dos maneras equivalentes (en ausencia de un absoluto arriba o abajo).

Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. II. Rotación

En la Figura 3 se muestra un esquema de una barra que gira alrededor de un eje que pasa por el punto O y es perpendicular al plano, sometida a varias fuerzas. Se tiene, para la fuerza $\vec{F}_1 = (F_1 \cos(\theta + \Phi_1), F_1 \sin(\theta + \Phi_1), 0)$, con brazo $\vec{R}_1 = (R_1 \sin \theta, R_1 \cos \theta, 0)$, con M_1 dado por $M_1 = R_1 F_1 - F_1 R_1$. Una matriz M_2 semejante se obtiene para la fuerza $\vec{F}_2 = (F_2 \cos(\theta + \Phi_2), F_2 \sin(\theta + \Phi_2), 0)$, con brazo $\vec{R}_2 = (R_2 \sin \theta, R_2 \cos \theta, 0)$.

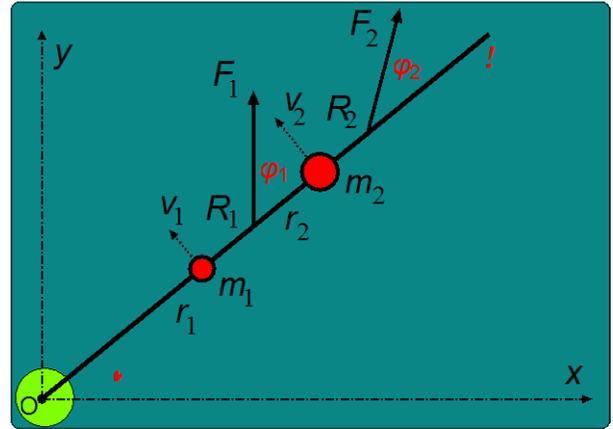


FIGURA 3. Barra con masas que gira sometida a varios torques. Una barra, sin masa, tiene fijadas una masa m_1 a una distancia r_1 y una masa m_2 a una distancia r_2 del punto O , respectivamente. Sobre la barra se aplican la fuerza F_1 , que forma un ángulo ϕ_1 con la barra y que se aplica a una distancia R_1 del origen y la fuerza F_2 , con ángulo ϕ_2 y a una distancia R_2 , de O , respectivamente. En un instante dado la barra forma un ángulo θ con la horizontal y gira con velocidad angular ω respecto de un eje perpendicular que pasa por O .

La matriz asociada al torque total aplicado sobre la barra de la Figura 3 será:

$$M = \sum_k M_k = M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{\text{ext}} \\ 0 & 0 & \Gamma_{\text{ext}} & 0 \end{pmatrix},$$

con el torque de las fuerzas externas resultante:

$$\Gamma_{\text{ext}} = F_1 R_1 \sin \Phi_1 + F_2 R_2 \sin \Phi_2, \quad (5)$$

apuntando en la dirección del eje z, sentido positivo (hacia fuera del papel).

Si sobre la barra se ejercieran fuerzas de rozamiento, f y $-f$, por ejemplo aplicadas sobre el eje sobre el que gira la barra, cada una con brazo igual a d , donde d sería el radio del eje sobre el que gira la barra, se tendría una matriz M_f adicional, y una contribución adicional al torque total de $T_f = -2fd$, (la resultante de las fuerzas de fricción es cero, aunque su torque resultante no sea nulo) con un torque externo total sobre la barra:

$$\Gamma_{\text{ext}} = F_1 R_1 \sin \Phi_1 + F_2 R_2 \sin \Phi_2 - 2fd. \quad (6)$$

B. Matrices momento lineal, brazo y momento angular.

El formalismo matricial se debe ampliar para incorporar el momento angular del cuerpo y sus variaciones (Figura 4). En el formalismo matricial para la rotación, a un cuerpo de momento lineal (instantáneo) $\vec{p} = m\vec{v}$, con $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$,

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & mv_x \\ 0 & 0 & 0 & mv_y \\ 0 & 0 & 0 & mv_z \\ mv_x & mv_y & mv_z & 0 \end{pmatrix};$$

se le caracteriza por una matriz simétrica p dada por (véase la Figura 4):

$$r = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y & 0 \\ r_z & 0 & -r_x & 0 \\ -r_y & r_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Si el vector brazo del momento desde el punto O hasta la partícula viene dado por $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$, entonces su correspondiente matriz antisimétrica es r, y está dada en la Ecuación 7.

La matriz 4 x 4 simétrica de momento angular L asociada (instantáneamente) a ese cuerpo viene dada por

$$L = rp - pr. \tag{8}$$

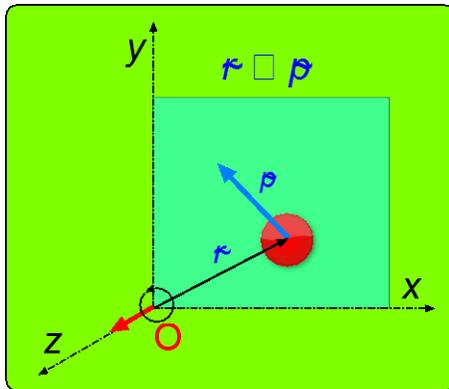


FIGURA 4. Momento angular. El producto vectorial $\vec{r} \times \vec{p}$ apunta en la dirección positiva del eje z. Ejes y signos en las matrices fuerza y brazo se eligen de manera que la definición del torque mediante matrices, coincida con la forma habitual de definir el momento angular.

En la Figura 3, para la barra que gira con velocidad angular ω , para la masa m_1 se tiene que contribuye al momento angular como la matriz $L_1 = r_1p_1 - p_1r_1$, con:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1 \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & -r_1 \text{cos } \theta & 0 \\ -r_1 \text{sen } \theta & r_1 \text{cos } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M_x \\ 0 & 0 & 0 & M_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_x & M_y & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M_x \\ 0 & 0 & 0 & M_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_x & M_y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1 \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & -r_1 \text{cos } \theta & 0 \\ -r_1 \text{sen } \theta & r_1 \text{cos } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $M_x = -m_1\omega r_1 \text{sen } \theta$ y $M_y = m_1\omega r_1 \text{cos } \theta$. Se tiene que la matriz del momento angular asociado a la masa m_1 es:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1\omega r_1^2 \\ 0 & 0 & m_1\omega r_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, para la masa m_2 se tiene que:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2\omega r_2^2 \\ 0 & 0 & m_2\omega r_2^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con $L_2 = r_2p_2 - p_2r_2$, el momento angular total (instantáneo) del sistema L vendrá dado por la matriz:

$$L = \sum_j L_j = L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix},$$

donde $L = m_1\omega r_1^2 + m_2\omega r_2^2$. El momento angular del sistema apunta en la dirección del eje z, sentido positivo. En general, se tendrá:

$$L = \sum_j L_j = L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

donde $L = m_1\omega r_1^2 - m_2\omega r_2^2$. El momento angular del sistema apunta en la dirección del eje z, sentido positivo. En general, se tendrá:

$$dL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Id\omega_x \\ 0 & 0 & 0 & Id\omega_y \\ 0 & 0 & 0 & Id\omega_z \\ Id\omega_x & Id\omega_y & Id\omega_z & 0 \end{pmatrix},$$

para un proceso finito con momento de inercia I constante.

III. ECUACIÓN MATRICIAL DE LA ROTACIÓN

Una vez que se conocen: la matriz 4×4 del momento resultante de las fuerzas aplicadas sobre un sistema M , el intervalo de tiempo dt durante el que se aplica dicho momento, y se conoce la matriz 4×4 del momento angular del sistema L , se postula la *ecuación matricial de la rotación* para la evolución del sistema como:

$$dL = M dt. \quad (10)$$

De nuevo (al igual que se ha hecho con la *ecuación matricial del centro de masas* y con la *ecuación matricial de la energía*) se ha utilizado la formulación clásica de la *ecuación (vectorial) de la rotación* $dL = M dt$, para proponer su correspondiente ecuación matricial. Explícitamente, se tiene para la *ecuación matricial de la rotación* la expresión:

$$d \left[\sum_i \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right) \right] = \left[\begin{matrix} (& - &) \\ & & \end{matrix} \right] dt,$$

donde i es la suma sobre partículas componentes del sistema y j es la suma sobre los momentos de las fuerzas aplicadas.

Para el proceso descrito en la Figura 3, a partir de la ecuación matricial (Ecuación 10) se obtiene la *ecuación (vectorial) de la rotación* (por duplicado):

$$d \left[\left(\sum_j m_j r_j^2 \right) \omega \right] = \left(\sum_k F_k R_k \text{sen } \Phi_k \right) dt.$$

Con las definiciones de momento de inercia $I = \sum_j m_j r_j^2$ y torque resultante (Ecuación 5) $\Gamma_{\text{ext}} = \sum_k F_k R_k \text{sen } \Phi_k$, se tiene:

$$d(I\omega) = \Gamma_{\text{ext}} dt.$$

Para un proceso de rotación con un sistema de momento de inercia I constante y torque aplicado $\Gamma_{\text{ext}} = \Gamma_k + \Gamma_n$ (k fuerzas que realizan trabajo y n fuerzas que no realizan trabajo y constantes), se tiene la *ecuación (vectorial) variación del momento angular-impulso angular* (Ecuación Poincot-Euler):

$$I(\omega_f - \omega_i) = \Gamma_{\text{ext}} t_0,$$

siendo $[0, t_0]$ el intervalo de aplicación de los torques lo que permite obtener la velocidad angular final ω_f , si se conocen las condiciones iniciales, el torque resultante y el tiempo de aplicación del mismo.

A partir de este punto, la formulación matricial enlaza con la formulación clásica anteriormente considerada.

Teniendo en cuenta que $\omega_f = \omega_i + \alpha t_0$, y que $\theta_0 = \omega_i t_0 + \frac{1}{2} \alpha t_0^2$, se obtiene la *ecuación (escalar) de la energía cinética de rotación*:

$$\frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \Gamma_{\text{ext}} \theta_0,$$

con $\Gamma_{\text{ext}} = \sum_j (\vec{r}_j \times \vec{F}_j)$, que permite calcular el ángulo $\theta_0 = \theta_f - \theta_i$ girado a lo largo de un proceso. Puesto que el torque incluye fuerzas que tienen asociado desplazamiento, y realizan trabajo, y fuerzas que no realizan trabajo (Ecuación 6), la ecuación anterior de la energía cinética de rotación *no* es una ecuación de la energía ni tampoco el teorema de trabajo-energía aplicado a la rotación.

IV. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD Y ROTACIÓN

Aunque las ecuaciones que se obtienen mediante el método matricial para los procesos de rotación son las mismas que se obtienen con el formalismo clásico, y a pesar de las evidentes similitudes entre ecuaciones, vectoriales y escalares, de la dinámica de traslación y de la dinámica de rotación, el formalismo matricial utilizado para la rotación pone de manifiesto que, la descripción matricial de ambos tipos de procesos es diferente, debido precisamente, a que ambos tipos de procesos son realmente distintos.

Por ejemplo, a diferencia de la traslación, todos los observadores inerciales obtienen las mismas ecuaciones para la rotación, un resultado que se puede obtener del formalismo matricial.

La coherencia del formalismo exige que cada matriz 4×4 (por ejemplo: r, F, p, R , etc.), se transforme entre el referencial S y en el referencial S' (que puede ser un referencial girado respecto de S , en configuración estándar con respecto a S , etc.) como las matrices G y G' , que se transforman como:

$$G' = \Pi G \Pi^{-1},$$

siendo una matriz genérica de transformación entre los referenciales S y S' y Π' la matriz inversa de Π . Entonces, con $\Pi \Pi^{-1} = 1$, la ecuación de la rotación en S' , de acuerdo con el principio de relatividad, debe ser:

$$d \left[\sum_i (r'_i p'_i - p'_i r'_i) \right] = \left[\sum_j (R'_j F'_j - F'_j R'_j) \right] dt,$$

y también debe venir dada por:

$$\begin{aligned} & d \left(\sum_i \left[\Pi r_i \Pi^{-1} \Pi p_i \Pi^{-1} - \Pi p_i \Pi^{-1} \Pi r_i \Pi^{-1} \right] \right) = \\ & = \left(\sum_j \left[\Pi R_j \Pi^{-1} \Pi F_j \Pi^{-1} - \Pi F_j \Pi^{-1} \Pi R_j \right] \Pi \right) dt, \end{aligned}$$

con:

$$\Pi \left(d \left[\sum_i (r_i p_i - p_i r_i) \right] = \left[\sum_j (R_j F_j - F_j R_j) \right] dt \right) \Pi^{-1}.$$

Güémez, J. & Fiolhais, M.

Es decir, la ecuación de la rotación es la misma en cualquier sistema de referencia inercial. A diferencia de lo que sucede en traslación, que es un movimiento relativo, la rotación es un proceso no relativo, y todos los observadores inerciales (esto es, el conjunto de observaciones recogidas sobre el proceso en un determinado referencial inercial) están de acuerdo en el estado de rotación de un sistema. En el formalismo matricial para la rotación no interviene la velocidad límite v_L , indicando de nuevo que, a diferencia de lo que sucede con la traslación, el de rotación es un movimiento absoluto.

V. MATRIZ ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Cuando un sólido rígido varíe su velocidad angular de rotación sin cambiar ni de composición ni de temperatura, se tendrá una variación de energía interna ΔU_R asociada a la rotación

$$\Delta U_R = \Delta K_R = \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2),$$

o variación de la energía cinética de rotación. La matriz asociada a las variaciones de energía cinética interna de rotación será $\Delta \mathcal{K}_R = \Delta \mathcal{U}_R$, con:

$$\Delta \mathcal{U}_R = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) \right). \quad (11)$$

Para un observador situado en el centro-de-masas, las variaciones de la energía cinética respecto del centro-de-masas se producen con variación nula del momento lineal respecto del centro-de-masas.

A partir de la postulada *ecuación matricial de la energía*, (ver Ecuación 2):

$$d\mathcal{K}_{cm} + \sum_s d\mathcal{U}_s + d\mathcal{U}_R = \sum_j \left(\mathbf{F}_j^{\text{ext}} d\mathcal{L}_j \right) + \delta Q, \quad (12)$$

donde ya se explicita como válida para un proceso en el que haya torques aplicados (con la condición de que $d\mathcal{K}_{cm} = 0$), se tiene:

$$\frac{1}{2} I d\omega^2 + M c(T) dT = \Gamma_k d\theta + \delta Q,$$

$$\delta Q = \left[\Gamma - \Gamma_k \right] d\theta,$$

siendo $\Gamma_k = \sum_k (\vec{R}_k \times \vec{F}_k)$ el torque de las fuerzas que se desplazan [alternativamente, se puede poner el trabajo como $\Gamma_j \theta_j$, considerando nulo el ángulo girado asociado a las fuerzas que tienen desplazamiento nulo], la ecuación de la energía, incluyendo la rotación, y la ecuación de los efectos térmicos, respectivamente. Esta última ecuación permite obtener los efectos térmicos que eventualmente se puedan

llegar a producir cuando haya fuerzas aplicadas que no realizan trabajo. Por ejemplo, para el proceso descrito en la Figura 3, se tienen las ecuaciones:

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) d\omega = (R_1 F_1 \sin \Phi_1 + R_2 F_2 \sin \Phi_2) dt,$$

$$\frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) d\omega^2 = (R_1 F_1 \sin \Phi_1 + R_2 F_2 \sin \Phi_2) d\theta,$$

$$\frac{1}{2} m_1 dv_1^2 + \frac{1}{2} m_2 dv_2^2 = F_1 dL_1 + F_2 dL_2,$$

$$\delta Q = 0.$$

Como todas las fuerzas aplicadas sobre la barra del ejemplo realizan trabajo, ambas fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 tienen un desplazamiento asociado, la ecuación escalar de la energía cinética de rotación y la ecuación escalar de la energía coinciden, y no hay efectos disipativos. Si sobre el eje de giro de la barra de la Figura 3 se aplicase un torque de rozamiento $\Gamma_f = -2fd$, se tendrían las ecuaciones:

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) d\omega = \left(R_1 F_1 \sin \Phi_1 + R_2 F_2 \sin \Phi_2 - 2fd \right) dt,$$

$$\frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) d\omega^2 = \left(R_1 F_1 \sin \Phi_1 + R_2 F_2 \sin \Phi_2 - 2fd \right) d\theta.$$

$$\frac{1}{2} m_1 dv_1^2 + \frac{1}{2} m_2 dv_2^2 = F_1 dL_1 + F_2 dL_2 + \delta Q,$$

$$\delta Q = -2fd d\theta,$$

donde se ha considerado explícitamente que las fuerzas de rozamiento (estático) no realizan trabajo [10].

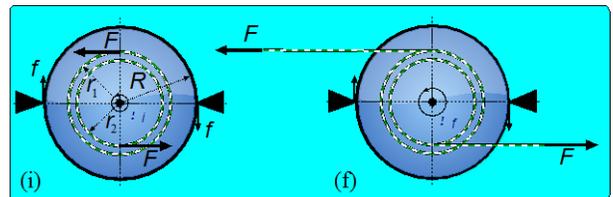


FIGURA 5. Disco rotante con rozamiento. Un disco de masa M y radio R se hace girar bajo la acción de dos fuerzas, F_1 y F_2 , aplicadas al extremo de cuerdas enrolladas en radios r_1 y r_2 respectivamente. Inicialmente el disco gira con velocidad angular ω_i . Las cuerdas se desenrollan sin resbalar y sin rozamiento. Sobre el borde del disco se aplican dos zapatitas que rozan con el mismo. Hay evidencias empíricas de que el borde del disco puede aumentar su temperatura y de intercambio de calor con el foco térmico exterior.

VI. EJEMPLO 1. DISCO QUE GIRA CON ROZAMIENTO

En la Figura 5 se describe un proceso en el que se hace girar un disco mediante dos fuerzas aplicadas al extremo de cuerdas previamente enrolladas en cilindros (sin masa) de diferentes radios unidos al disco. Las cuerdas se desenrollan sin resbalar y sin rozamiento, a la vez que dos zapatas aplicadas en el borde del disco ejercen sendas fuerzas de fricción sobre el mismo [11].

Si se conocen las fuerzas aplicadas y demás características del proceso, se trata de determinar el ángulo girado por el disco y su velocidad angular final (se conoce su velocidad angular inicial, que puede ser cero) si se conoce el tiempo durante el que se aplican las fuerzas. No se considera ni el peso del disco ni la fuerza normal, pues ambas fuerzas se anulan mutuamente y no realizan torque.

Sobre el disco, cuyo centro-de-masas se va a encontrar en reposo a lo largo del proceso, se tiene que se aplican: la fuerza \vec{F}_1 , con $\vec{F}_1 = (-F, 0, 0)$, y con su correspondiente matriz

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_{F,1} = \begin{pmatrix} r_1 d\theta \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix};$$

$$R_{F,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y con un desplazamiento asociado $d\vec{L}_{F,1} = (r_1 d\theta, 0, 0)$, siendo el brazo de palanca de esta fuerza respecto del eje de giro del disco $\vec{R}_{F,1} = (0, r_1, 0)$ y r_1 su matriz brazo de palanca correspondiente, y la fuerza \vec{F}_2 , con $\vec{F}_2 = (F, 0, 0)$, y con:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_{F,2} = \begin{pmatrix} -r_2 d\theta \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix};$$

$$R_{F,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con el desplazamiento asociado $d\vec{L}_{F,2} = (-r_2 d\theta, 0, 0)$, y siendo el brazo de palanca $\vec{R}_{F,2} = (0, -r_2, 0)$, con matriz brazo $R_{F,2}$. Debido a las zapatas de freno aplicadas al borde del disco, se tienen dos fuerzas adicionales, de rozamiento, \vec{f}_1 y \vec{f}_2 , la fuerza $\vec{f}_1 = (0, f, 0)$, aplicada por el freno B_1 , con

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_{f,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix};$$

$$R_{f,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con desplazamiento espacial $d\vec{L}_{f,1} = (0, 0, 0)$ pues esta fuerza \vec{f}_1 no se desplaza, y con un brazo de palanca $\vec{R}_{f,1} = (-R, 0, 0)$, y la fuerza $\vec{f}_2 = (0, -f, 0)$, aplicada por el freno B_2 , con:

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_{f,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ vv_L dt \end{pmatrix};$$

$$R_{f,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con desplazamiento espacial $d\vec{L}_{f,2} = (0, 0, 0)$, pues tampoco la fuerza \vec{f}_2 se desplaza; y con un brazo de palanca $\vec{R}_{f,2}$.

La fuerza aplicada al extremo de una cuerda previamente enrollada que se desenrolla sin deslizar, es una fuerza equivalente a una fuerza conservativa (que se puede obtener, por ejemplo, dejando descender un peso en un campo gravitatorio). El trabajo realizado por las fuerzas conservativas se utiliza en variar la energía interna del sistema, que en este caso es energía mecánica macroscópica.

La ecuación matricial del centro-de-masas para este proceso es:

$$d\mathcal{K}_{cm} = F^{ext} d\mathcal{L}_{cm},$$

donde la suma de las fuerzas externas aplicadas es $F^{ext} = F_1 + F_2 + f_1 + f_2 = 0$.

Se obtiene por tanto que $d\mathcal{K}_{cm} = 0$ y que el centro-de-masas del disco no se mueve a lo largo del proceso.

La ecuación matricial de la rotación para este proceso es:

$$dL = [M_1 + M_2 + M_{f1} + M_{f2}] dt,$$

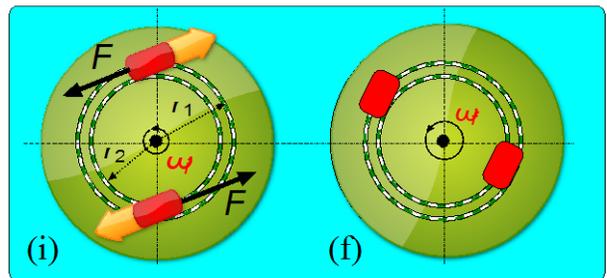


FIGURA 6. Rueda de fuegos artificiales. (i) Una rueda de feria con fuegos artificiales adosados a la misma, gira bajo la acción de reacciones químicas que lanzan gases con alta velocidad hacia afuera. Cada uno de los fuegos artificiales ejerce un torque sobre la

Güémez, J. & Fiolhais, M.

rueda. La rueda acelera desde ω_i hasta ω_f (f) Cuando la pólvora se agota, la rueda gira con velocidad angular constante.

donde:

$M_1 = R_{F,1} F_1 - F_1 R_{F,1}$ y $M_{F,2} = R_{F,2} F_2 - F_2 R_{F,2}$ para las fuerzas conservativas y donde $M_{f,1} = R_{f,1} f_1 - f_1 R_{f,1}$ y $M_{f,2} = R_{f,2} f_2 - f_2 R_{f,2}$.

A partir de las magnitudes anteriores, se tiene la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Id\omega_x \\ 0 & 0 & 0 & Id\omega_y \\ 0 & 0 & 0 & Id\omega_z \\ Id\omega_x & Id\omega_y & Id\omega_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_z \\ 0 & 0 & \Gamma_z & 0 \end{pmatrix} dt,$$

con $\Gamma_z = F(r_1 + r_2) - 2fR$. Se tiene la Ecuación de Poinsot-Euler (por duplicado) para este proceso:

$$[F(r_1 + r_2) - 2fR] dt = Id\omega_z,$$

indicando que el sentido en el que apunta el vector momento angular es hacia la parte positiva del eje z. Las fuerzas aplicadas son constantes, así como los torques, tal que integrando para velocidad angular inicial ω_i , se tiene:

$$[F(r_1 + r_2) - 2fR]t_0 = I(\omega_f - \omega_i).$$

Se tiene también la ecuación diferencial $[F(r_1 + r_2) - 2fR]\omega dt = I\omega d\omega$, e integrando ésta, la ecuación (escalar) de la energía cinética de rotación:

$$[F(r_1 + r_2) - 2fR](\theta_f - \theta_i) = \frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2). \quad (13)$$

A su vez, la ecuación matricial de la energía para este proceso es:

$$\begin{aligned} dK_{cm} + dU_R + dU_T &= \\ &= F_1 d\mathcal{L}_1 + F_2 d\mathcal{L}_2 + f_1 d\mathcal{L}_{f1} + f_2 d\mathcal{L}_{f2} + dQ, \end{aligned}$$

con:

$$dU_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}I d\omega^2 \end{pmatrix}; \quad dU_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M c_V dT \end{pmatrix},$$

donde $dU_T = M c_V dT$ es la variación de la energía interna del disco relacionada con la variación de temperatura del mismo. A partir de la ecuación matricial de la energía (con $dK_{cm} = 0$) integrada (considerando que $dT = 0$), se tiene:

$$v_L [M dv_{cm} = 0]; \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2) = F(r_1 + r_2)(\theta_f - \theta_i) + Q. \quad (15)$$

Se obtiene que el centro de masas del disco no se mueve y comparando la Ecuación 13 con la Ecuación 15 se tiene entonces la ecuación de los efectos térmicos $Q = -2fR(\theta_f - \theta_i)$. La ecuación (escalar) del centro-de-masas no es igual a la ecuación (escalar) de la energía: el disco no se comporta como una partícula puntual. Tampoco la ecuación (escalar) de la energía cinética de rotación es igual a la ecuación escalar de la energía, indicando que sí hay disipación de energía mecánica y efectos térmicos a lo largo del proceso. Hay aumento de la entropía del universo y el proceso es irreversible.

VII. RUEDA DE FERIA CON FUEGOS ARTIFICIALES

Si dos cilindros con pólvora (cartuchos) se fijan cerca del borde de un disco que puede girar alrededor de su eje (aunque no necesariamente a la misma distancia del centro del disco), de tal manera que cuando se encienda la pólvora los gases salgan en direcciones opuestas en cada cilindro, se tendrá un proceso de producción de energía mecánica, en forma de energía cinética de rotación, a partir de una reacción química. En la Figura 6 se muestra un esquema de una rueda de feria de fuegos artificiales, capaz de girar gracias a la energía química que se libera en la combustión de la pólvora de sus cartuchos (hasta que ésta se agota).

Considerando despreciable la masa de los productos químicos que reaccionan, frente a la masa del disco, en la resolución del problema, conocidas las características del disco, se debe obtener la velocidad angular final de la rueda en función de la cantidad de carga de reactivos químicos que se ha utilizado.

Como sistema de referencia S_∞ se considera aquel en el que el centro del disco permanece en reposo, tomándose este punto como origen de los momentos. Considérese la fuerza \vec{F}_1 que va a ser ejercida por uno de los cartuchos (el otro cartucho hará en todo momento una fuerza igual y de sentido contrario, por lo que la resultante suma vectorial de ambas fuerzas siempre será nula; no así los momentos de estas fuerzas, que se reforzarán) sobre la rueda. En el instante inicial, con la fuerza ejercida por los explosivos $\vec{F}_1 = (-F, 0, 0)$, con brazo $\vec{R}_1 = (0, r_1, 0)$:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz del impulso angular será:

$$dM = [R_1 F_1 - F_1 R_1] dt.$$

Un instante Δt después, el disco ha girado un ángulo $\theta = \omega \Delta t$ respecto de su posición inicial. Tanto la fuerza \vec{F}_1 como

su brazo \vec{R}_1 han girado el mismo ángulo, por lo que, aunque el disco gira, y con él los vectores de la fuerza y de su brazo, su producto vectorial es el mismo (mientras la fuerza que ejercen los gases producidos por el consumo de pólvora permanezca constante). El impulso angular que se ejerce sobre el disco también será constante.

La ecuación del centro-de-masas aplicada a este proceso indica que $v_{cm} = 0$. Tanto el centro-de-masas del disco como el centro-de-masas de los gases expulsados deben permanecer en reposo.

La ecuación matricial de la rotación aplicada al disco, con las fuerzas que ejercen los cartuchos como fuerzas externas $dL = M dt$, o explícitamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id\omega_z \\ 0 & 0 & Id\omega_z & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F(r_1 + r_2) \\ 0 & 0 & F(r_1 + r_2) & 0 \end{pmatrix} dt,$$

que permite obtener (para fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 iguales y constantes) $F(r_1 + r_2)t_0 = I(\omega_f - \omega_i)$, siendo t_0 el intervalo de tiempo durante el que se aplican las fuerzas. A partir de esta ecuación se obtiene también la ecuación de la energía cinética de rotación del disco

$$F(r_1 + r_2)(\theta_f - \theta_i) = \frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2), \quad (16)$$

siendo $\theta_0 = \theta_f - \theta_i$ el ángulo girado por el disco durante el proceso de consumo de pólvora. Los gases expulsados deben estar girando también, pero en sentido contrario al disco, de tal forma que el momento angular total de gases más disco sea nulo. Los gases también tendrán energía cinética asociada, aunque se puede despreciar.

Si se aplica la ecuación matricial de la energía únicamente al disco,

$$\Delta\mathcal{K}_{cm} + \Delta U_R = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2,$$

con las dos fuerzas de los cartuchos como fuerzas externas, se tendría la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} v_L M v_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F(r_1 + r_2) \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Junto con la ecuación anterior, esta ecuación de la energía proporciona la misma información que la ecuación matricial de la rotación y que la ecuación del centro de masas para el proceso.

La ecuación matricial de la energía aplicada al conjunto del disco más la pólvora de los cartuchos (ya con $\Delta\mathcal{K}_{cm} =$

0), por lo que las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son ahora fuerzas internas del sistema que, por tanto, no intervienen ya realizando trabajo externo, viene dada por:

$$\Delta U_R + \Delta U_\xi = \mathcal{W}_P + \mathcal{Q},$$

donde ΔU_R es la energía interna asociada a la energía cinética de rotación del disco y ΔU_ξ es igual a la variación de la energía interna de los explosivos en los cartuchos.

Explícitamente, considerando que ΔV_ξ es la variación de volumen en la reacción química de combustión y que $-P \Delta V_\xi$ es el trabajo de expansión de estos gases contra la presión atmosférica, y que ΔS_ξ es la variación de entropía de la reacción química, siendo $T \Delta S_\xi$ el calor intercambiado con el foco térmico, de nuevo la atmósfera, que garantice que la entropía del universo no disminuye en el proceso, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_{Rg} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \Delta V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \Delta S_\xi \end{pmatrix}.$$

Para el sistema disco+cartuchos, las fuerzas que hacen girar el disco son fuerzas internas, por lo que sus trabajos no aparecen en esta ecuación. Se tiene entonces (admitiendo que los gases no adquieren energía cinética):

$$\frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) + \Delta U_\xi = -P \Delta V_\xi + T \Delta S_\xi,$$

con:

$$\frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) = -n \Delta g_\xi,$$

donde $\Delta g_\xi = \Delta u_\xi + P \Delta v_\xi - T \Delta s_\xi$ es la variación de la función de Gibbs de las reacciones químicas que se producen en los cartuchos y n es el número de moles de pólvora que se ha empleado. Si se considera sólo el disco no se entendería el papel que juega el explosivo en producir la rotación del mismo. Con esta elección del sistema se observa que el origen de la energía cinética de rotación del disco son fuerzas internas del sistema que sí realizan trabajo (aunque no pueden mover el centro de masas del sistema). Se tienen también las ecuaciones:

$$\alpha = \frac{F(r_1 + r_2)}{I};$$

$$\omega_f - \omega_i = \alpha t_0;$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \alpha t_0^2,$$

y

$$\omega_f - \omega_i = \left(\frac{2n |\Delta g_\xi|}{I} \right)^{1/2};$$

$$F(r_1 + r_2)\theta_0 = -n \Delta g_\xi;$$

$$n = \frac{F^2 (r_1 + r_2)^2}{2I |\Delta g_\xi|} t_0^2,$$

que relaciona el número de moles (la cantidad n), y la variación de la función de Gibbs (la calidad $|\Delta g_\xi|$) de la pólvora, con el estado final de rotación del disco y el tiempo que tarda en alcanzarlo.

Este proceso, tal y como se ha idealizado, sin emitir más calor que el exigido por el segundo principio, sería reversible (variación de entropía del universo nula, $\Delta S_U = 0$). El movimiento de rotación del disco se puede transformar por ejemplo, en electricidad; y la electricidad por electrólisis se podría utilizar para aumentar la función del Gibbs de una reacción química en $-n \Delta g_\xi$.

Para el proceso representado en la Figura 1, se tendrían las ecuaciones (la velocidad angular inicial del molinete se toma como cero):

$$I\omega = \Gamma_{\text{ext}} t_0,$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \Gamma_{\text{ext}} \theta,$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = -\Delta G_\xi,$$

donde ω es la velocidad angular del molinete al cabo de un cierto tiempo t_0 . En las dos primeras ecuaciones, se toma únicamente el molinete como sistema, siendo que las fuerzas externas aplicadas no realizan trabajo. Se ha tomado el molinete más la vela como el sistema utilizado para obtener la última ecuación. Se ha tenido en cuenta que las fuerzas que se aplican sobre los álabes del molinete, cuya resultante es nula, ejercen un torque, realizan un trabajo que es interno, por lo que no aparece en la expresión del primer principio, y que ΔG_ξ es la magnitud relacionada con el consumo de combustible en la vela.

VIII. CONCLUSIONES

Aquellos procesos de rotación en los que intervengan fuerzas que no realizan trabajo o que disipan energía mecánica, exigen, además de las ecuaciones de la Segunda Ley de Newton y la Ecuación de Poinot-Euler, la aplicación del primer principio de la termodinámica para una completa resolución de los mismos. Con objeto de integrar estas

ecuaciones de la mecánica y de la termodinámica en la descripción de este tipo de procesos, se ha desarrollado un formalismo matricial que resulta particularmente útil en aquellos procesos en los se tienen procesos de disipación o producción de energía mecánica.

Para el proceso representado en la Figura 1, tomando únicamente el molinete como sistema, se tendrán las ecuaciones:

$$I\omega = \Gamma_{\text{ext}} t_0,$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \Gamma_{\text{ext}} \theta,$$

donde Γ_{ext} es el torque realizado sobre el molinete por las fuerzas externas debidas al aire caliente que asciende y golpea los álabes, y donde ω es la velocidad angular del molinete al cabo de un cierto tiempo t_0 . Tomando el molinete más la vela como el sistema, para la ecuación matricial de la energía:

$$\begin{pmatrix} v_L M v_{\text{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} I \omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_\xi \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \Delta V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \Delta S_\xi \end{pmatrix},$$

se tienen las relaciones:

$$v_{\text{cm}} = 0,$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = -\Delta G_\xi.$$

El centro de masas del molinete no se mueve. Las fuerzas que se aplican sobre los álabes del molinete, cuya resultante vectorial es nula, ejercen un torque, realizan un trabajo que es interno, por lo que no aparece en la expresión del primer principio, y que ΔG_ξ es la magnitud relacionada con el consumo de combustible en la vela.

Con este formalismo matricial, la *ecuación (escalar) de la energía cinética de rotación*, se obtiene a partir de la ecuación matricial de la rotación, y puesto que en ella interviene un torque resultante debido a todo tipo de fuerzas, no se puede confundir con una ecuación de la energía.

Finalmente, la información proporcionada por esta ecuación se integra en una *ecuación de la energía*, en la que sólo intervienen directamente aquellas fuerzas que realizan trabajo. La comparación entre las ecuaciones de la energía cinética de rotación y la ecuación de la energía permite, eventualmente, obtener la ecuación de los efectos térmicos y caracterizar la reversibilidad o irreversibilidad del proceso estudiado.

REFERENCIAS

- [1] Güémez, J. & Fiolhais, M., *Formalismo matricial para mecánica y termodinámica. I. Traslación*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **8**, 411-428 (2014).
- [2] Güémez, J. & Fiolhais, M., *A 4-vector formalism for classical mechanics*, Rev. Bras. Ens. Fis. **35**, 4310 (2013).
- [3] Morin, D., *Introduction to Classical Mechanics. With problems and solutions*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007).
- [4] Taylor, L. W., *Physics, the pioneer science, Volume I, mechanics, heat, sound*, (Dover, New York, 1959).
- [5] Pahor, S. & Strnad, J., *Statics in Special Relativity*, Il Nuovo Cimento **20 B**, 105-112 (1974).
- [6] Bird, R. W., *Pictorial representation of torque and rotational inertia*, Phys. Teach. **36**, 492 (1998).
- [7] Faucher, G., *Fixed points in torque-angular momentum relations*, Am. J. Phys. **51**, 758-759 (1983).
- Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. II. Rotación*
- [8] Freund, J., *Special Relativity for beginners. A textbook for undergraduates*, (World Scientific, Singapore, 2008).
- [9] Grøn, Ø., *The asynchronous formulation of relativistic statics and thermodynamics*, Il Nuovo Cimento **17**, 141-165 (1973).
- [10] Güémez, J. & Fiolhais, M., *Thermodynamics in rotating systems-analysis of selected examples*, Eur. J. Phys. **35**, 015013 (2014).
- [11] López, V. & Pintó, R., *Hot brakes and energy-related concepts: is energy lost?*, Phys. Educ. **47**, 38-43 (2012).
- [12] Sutton, R. M., *Illustration of a conservation paradox*, Am. J. Phys. **4**, 26-27 (1936).
- [13] Stefanini, L., *Eighteenth century treatment of a classical mechanic problem*, Am. J. Phys. **80**, 47-50 (2012).
- [14] De Sousa, C. A. & Pina, E. P., *Aspects of mechanics and thermodynamics in introductory Physics: an illustration in the context of friction and rolling*, Eur. J. Phys. **18**, 334-337 (1997).