La paradoja de Aquiles y la tortuga: una discusión pedagógica desde la interpretación gráfica y la serie geométrica

Paco Talero[1,3], Fernanda Santana[2], César Mora[3]
[1]*Depto. de Ciencias Naturales, Universidad Central, Bogotá D.C. Colombia.*
[2]*Fundación PhyMaC, Calle 167A No 5A-04, Bogotá, D.C. Colombia.*
[2]*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Av. Legaria 694, Col. Irrigación, C. P. 11500, México D. F.*

E-mail: ptalerol@ucentral.edu.co

(Recibido el 9 de febrero de 2015, aceptado el 1 de octubre de 2015)

Resumen

A partir de la interpretación gráfica del movimiento uniforme rectilíneo y la serie geométrica se aclara la popular paradoja de Aquiles y la tortuga. Este resultado puede usarse como ejemplo en cursos elementales de cálculo y mecánica.

Palabras clave: Movimiento rectilíneo, mathematical paradox.

Abstract

The popular paradox of Achilles and the tortoise was clarified with graphical interpretation of rectilinear uniform motion and geometric series. This result can be used as example in the elemental calculus and mechanics classes.

Keywords: Rectilinear motion, paradojas matemáticas.

PACS: 05.10.Ln, 07.05.-t, 07.05.Tp, 07.70.-c **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En general la interpretación correcta de gráficos bidimensionales es una necesidad para cualquier ciudadano moderno, pues gran parte de la información social, económica y cultural viene codificada en este tipo de gráficos.

En particular los científicos e ingenieros requieren una aguda interpretación gráfica que va mucho más allá de la simple lectura de datos sobre los correspondientes ejes, pues permite apreciar las variaciones, las tendencias y afinar en detalles conceptuales pertinentes. De manera que la formación de estos profesionales debe capacitarlos para obtener la habilidad de extraer toda la información expuesta en un gráfico de este tipo; al parecer, y de acuerdo con diversas investigaciones al final de cada curso introductorio este objetivo no se está logrando.

Y es que desde hace casi treinta años y en diversas partes del mundo, investigadores en el campo de la enseñanza de la física han venido demostrando que los estudiantes tienen algunas dificultades para entender el movimiento uniforme rectilíneo (MUR), especialmente en lo referente a la efectiva operatividad matemática; la adecuada narración de situaciones representadas gráficamente; la lectura correcta de gráficos simples y la adecuada identificación e interpretación de áreas y pendientes [1, 2, 3, 4].

En este sentido es necesario adecuar y producir nuevos enfoques de problemas relacionados con la interpretación gráfica en el MUR que permitan a los profesores y estudiantes enriquecer el abanico de situaciones comúnmente usadas para la discusión en el aula, lo cual corresponde al objetivo principal de este trabajo.

El trabajo está organizado de manera siguiente: en la sección 2 se describe el problema y se plantea una solución trivial mediante cinemática unidimensional; en la sección 3 se desarrolla una solución a través de series geométricas valiéndose de la interpretación gráfica y en la sección 4 se presentan las conclusiones.

II. AQUILES Y LA TORTUGA

La conexión entre series geométricas y MUR es estudiada en [5] donde se aborda el conocido problema de Neumann de una mosca que se mueve entre dos trenes que se acercan entre sí, allí se pregunta por la distancia recorrida por la mosca que oscila entre cada tren hasta ser aplastada; en [5] se muestra una solución mediante series geométricas la cual pone de manifiesto que en este caso la suma infinita de distancias cada vez más pequeñas es finita. Al discutir con estudiantes este problema, al igual que el planteado en este trabajo, emerge de manera natural la idea errónea planteada por Zenón, la cual consiste en pensar que en general la suma infinita de partes cada vez más pequeñas debería arrojar una tendencia al infinito y no un número finito.

Esta idea predomina en la mayoría de los estudiantes inscritos en cursos introductorios, se sugiere sea aprovechada como detonante cognitivo que busque contribuir a dar inicio y mantener la discusión de los estudiantes sobre problemas de este tipo. Con la paradoja de Aquiles y la tortuga Zenón buscaba poner en duda la estructura lógica del movimiento, en este trabajo se hace un planteamiento en términos cinemáticas precisos, lo cual dan un nuevo enfoque a este problema tradicional.

Se propone una carrera en línea recta y de longitud L entre Aquiles, el más rápido de Grecia, y una humilde tortuga, eso sí con la particularidad de que Aquiles le conceda cierta distancia $x_o << L$ de ventaja. Aquiles y la tortuga corren con rapidez constante v_A y v_T respectivamente; por supuesto $v_A >> v_T$. Cuando se inicia la competencia la tortuga está en una posición x_o por delante de Aquiles con velocidad v_T y Aquiles está en el origen con velocidad v_A y sin embargo Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Y es por esto, según Zenón: cuando Aquiles alcance la posición x_o la tortuga ya no estará allí sino que estará por delante de Aquiles en una posición x_1, cuando Aquiles alcance la nueva posición x_1 la tortuga ya no estará allí sino en una posición x_2 por delante y cuando Aquiles esté en x_2 la tortuga ya no estará allí sino en x_3 y así sucesivamente, de manera que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Pero resulta claro de la experiencia cotidiana que Aquiles siempre alcanza a la tortuga, la sobrepasa y gana la carrera! Esta es pues la paradoja!

Desde el punto de vista de la cinemática las funciones de posición x contra tiempo de Aquiles y la tortuga son respectivamente:

$$x_A = v_A t, \tag{1}$$

y

$$x_T = x_o + v_T t. \tag{2}$$

El tiempo t_c y la posición de captura x_c se obtienen a partir de (1) y (2) y son respectivamente:

$$t_c = \frac{x_0}{v_A - v_T}, \tag{3}$$

y

$$x_c = \frac{x_0 v_A}{v_A - v_T}. \tag{4}$$

Sin embargo, estos resultados nada informan a cerca de la paradoja de Zenón.

III. SOLUCIÓN TIPO ZENÓN

En esta sección se pretende aplicar los argumentos de Zenón, más no su conclusión, para encontrar las expresiones (3) y (4) a partir de series geométricas y un análisis gráfico de (1) y (2).

En la Fig.1 se muestra la gráfica de las funciones de posición contra tiempo junto con los respectivos tiempos y posiciones según los argumentos iníciales de Zenón. De acuerdo con la Fig.1 cuando Aquiles alcance la posición x_o habrá transcurrido un tiempo t_1 y la tortuga se encontrará en la posición x_1. De acuerdo con las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$t_1 = \frac{x_0}{v_A}, \tag{5}$$

y

$$x_1 = x_0\left(1 + \frac{v_T}{v_A}\right). \tag{6}$$

De manera similar, cuando Aquiles alcance la posición x_1 en un tiempo t_1 la tortuga ya no estará allí, estará en x_3 y de acuerdo con las ecuaciones (1) y (2) ahora se tiene:

$$t_2 = \frac{x_0}{v_A}\left(1 + \frac{v_T}{v_A}\right). \tag{7}$$

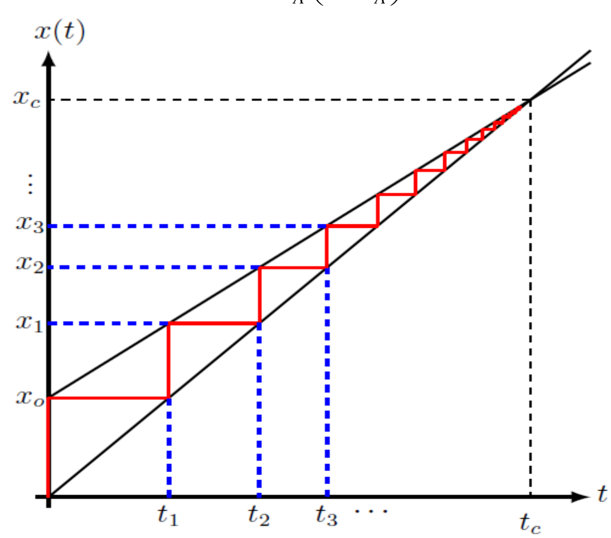

FIGURA 1. Gráficas de posición contra tiempo de Aquiles y de la tortuga.

$$x_2 = x_o\left[1 + \frac{v_T}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2\right]. \tag{8}$$

De manera similar se obtiene:

$$t_3 = \frac{x_0}{v_A}\left[1+\frac{v_T}{v_A}+\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2\right], \tag{9}$$

$$x_3 = x_0\left[1+\frac{v_T}{v_A}+\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2+\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3\right]. \tag{10}$$

Cuando el número de veces que se repite el proceso tiende a infinito la posición de Aquiles tiende a la posición de la tortuga y el tiempo al tiempo de captura, lo que se puede expresar como:

$$t_c = \frac{x_0}{v_A}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k, \tag{11}$$

y

$$x_c = x_0\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k. \tag{12}$$

De acuerdo con [6] es una serie geométrica. Para calcular la suma de los primeros n términos, sea

$$S = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k \tag{13}$$

Con $\alpha = \frac{v_T}{v_A}$. De manera que la ecuación (13) se puede expresar como

$$S = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+...+\alpha^n. \tag{14}$$

Al multiplicar (14) por α, se obtiene:

$$\alpha S = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+...+\alpha^n+\alpha^{n+1}. \tag{15}$$

Al restar (15) de (14) y resolver para S se encuentra:

$$S = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \tag{16}$$

Cuando $n\to\infty$, $\alpha^n \to 0$ ya que $\alpha < 1$ y la ecuación (16) se convierte en:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{v_A}{v_A - v_T}. \tag{17}$$

Esto implica que las ecuaciones (11) y (17) se reducen a las ecuaciones (1) y (2), solución que coincide con la encontrada desde la cinemática.

IV. CONCLUSIONES

Se presentó una alternativa que falsea la paradoja de Zenón conocida como la paradoja de Aquiles y la tortuga, confrontando un método elemental basado en la cinemática y una solución que parte de las ideas de Zenón, pero que por sí misma contradice su conclusión; para ello se usó la serie geométrica y las ecuaciones elementales de posición contra tiempo. Se sugirió que este resultado puede ser usado en cursos introductorios de física y matemática como detonante cognitivo para iniciar una discusión Sobre el movimiento y luego abordar una solución desde la interpretación gráfica del MUR.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al departamento de Ciencias Naturales de la Universidad Central por el tiempo otorgado para desarrollar este trabajo, a la Fundación PhyMaC por facilitar la discusión física de las ideas y a Yenys María Monsalve por la digitación del manuscrito.

REFERENCIAS

[1] Trowbridge, D. E., McDermott, L. C., *Investigation of students understanding of the concept velocity in one dimension*, Am. J. Phys. **48**, 1020 (1980).

[2] Trowbridge, D. E., McDermott, L. C., *Investigation of students understanding of the concept acceleration in one dimension*, Am. J. Phys. **49**, 242 (1981).

[3] Beichner, R., *Testing student interpretation of kinematics graphs*, Am. J. Phys. **62**, 750 (1994).

[4] Talero, P., *El movimiento unidimensional en gráficas* (Editorial Universidad Central, Bogotá, D.C., 2012).

[5] Talero, P., Organista, O., Mora, C. y Galindo, E., *Experimentos virtuales sobre una mosca vagabunda: Más allá de la solución de Neumann* , Revista Brasileira Ensino de Física **35**, 2 (2013).

[6] Stewart, J., Calculus, Séptima Edición, (Broooks Cole, México, D.F., 2012).