Modelación del movimiento a través del Ipad para el estudio del concepto de función

Leobardo Mendo-Ostos[1,3], Rosa Isela González-Polo[2], Apolo Castañeda[3]
[1]Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, Desviación Lindero Tametate S/N, La Morita, 92100 Tantoyuca, Veracruz, México.
[2]Instituto Cumbres Toluca. Miguel Hidalgo y Costilla Sur 1201, San Miguel Totocuitlalpilco, 52143 Metepec, México.
[3]Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, CICATA Unidad Legaria, Instituto Politécnico Nacional, Av. Legaria 694, Col. Irrigación C. P. 11500, Ciudad de México.

E-mail: acastane@ipn.mx

(Recibido el 30 de agosto de 2015, aceptado el 25 de noviembre de 2015)

Resumen

Este artículo reporta el diseño e implementación de una secuencia didáctica para estudiantes de secundaria, para el estudio del concepto de función a través de la modelación del movimiento de un balón, usando un dispositivo móvil (Ipad). El objetivo es que los estudiantes relacionen la experiencia física del movimiento con las variables asociadas al fenómeno, y puedan darle significado a la gráfica que indica posición. Se realizó una análisis preliminar que incluyó un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo. Con base en estos resultados, se diseñaron cuatro actividades que contemplan; preparar la escena de grabación, grabar el movimiento de un balón, realizar un análisis del movimiento a través de las herramientas del Ipad, obtener la gráfica, analizar las representaciones funcionales (a través del software Logger Pro), articular la información de las representaciones, y finalmente, modelar nuevos movimientos. Estas actividades contribuyen a desarrollar un concepto de función en donde se destaca la variación, y se promueve la transferencia de información de un contexto de representación a otro.

Palabras clave: Modelación, Función, Dispositivos móviles.

Abstract

This paper reports the design and implementation of a teaching sequence for high school students, to study the concept of function by modeling the movement of a ball using a mobile device (iPad). The goal is connect the physical experience of motion variables of the phenomenon, and to give meaning to the graph indicating position. A preliminary analysis that included an epistemological, didactic and cognitive study, was conducted. Based on these results, four activities were designed, which contemplate: prepare the recording scene, recording the movement of a ball, to analyze the movement through Ipad´s tools, obtain the graph, analyze the functional representations (through the Logger Pro software), coordinate information of the representations, and finally, to model new moves. These activities help to develop a concept of function, where the variation is highlighted, and is promoted the transfer of information from a context of representation to another.

Keywords: Modeling, Function, Mobile devices.

PACS: 07.05.Tp, 01.40.ek, 01.50.H- **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Una parte fundamental del estudio de las matemáticas es el dominio de técnicas y procedimientos, las cuales son útiles en el manejo simbólico y en la resolución de operaciones. No obstante, la matemática no se reduce a cálculos numéricos; existe mucha información matemática que está expresada en imágenes y gráficas, donde es posible realizar complejas operaciones. Por ejemplo, al visualizar comportamientos, predecir formas, identificar regularidades, tendencias, entre otros.

De acuerdo con Duval [1], la construcción de un concepto matemático no se puede lograr si sólo se trabaja con un registro de representación, se deben promover tareas que favorezcan la conversión entre al menos dos de sus representaciones, que permitan establecer una base cognitiva para propiciar el aprendizaje. Cada registro de representación resalta características y propiedades determinadas del objeto matemático. Y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado; por lo que se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático para establecer un dominio conceptual más amplio.

Los estudiantes de nivel secundaria tienen el primer contacto formal con el concepto de función, específicamente, a través de actividades de graficación, a partir de tabulación y la ubicación de puntos en el plano. Sin embargo, este acercamiento sólo proporciona al estudiante una técnica que le permite resolver ejercicios y problemas típicos de graficación. El resultado es un conocimiento insuficiente para usarlo en otras situaciones. De acuerdo con Artigue [2] y Schoenfeld [3], los problemas con el manejo del concepto de función persisten hasta el nivel universitario, desencadenando otros problemas con la matemática superior.

El trabajo de Guzmán [4], reporta también la fragilidad en el manejo conceptual que tienen los alumnos, particularmente en la falta de coordinación en los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural. Esta fragmentación presupone la falta de un discurso unificador que permita cohesionar las diferentes nociones asociadas al concepto de función, muchas de ellas estudiadas desde la primaria en situaciones en las que aparecen sucesiones, relaciones numéricas, tablas de valores, coordenadas rectangulares, gráficas, etc.

García y Serrano [5], refiriéndose al concepto de función, concluyen que no existe coherencia entre la definición formal y la definición informal que proponen los profesores, ya que existe un abismo entre las nociones previas asociadas a la función y la definición de la función misma.

Por lo regular, este tratamiento formalista se complementa con amplios manejos algorítmicos, lo que reduce la posibilidad de experimentar con ideas intuitivas y aproximaciones obtenidas de fenómenos reales.

Las típicas presentaciones escolarizadas no permiten mostrar la variación, como una característica relevante en los fenómenos y situaciones que se estudian. No obstante, algunos trabajos como el de Dolores, Alarcón y Alberrán [6], sostienen la posibilidad de desarrollar un pensamiento variacional en los estudiantes a través de situaciones y actividades no formales, en las que se les permita a los estudiantes desarrollar y fortalecer las habilidades de observación, reconocimiento, percepción e interpretación de la variación y el cambio.

Bazaldúa [7] refiriéndose al caso de la *graficación*, explica que usualmente en clase no se enfatiza la lectura e interpretación de gráficas y en ocasiones no se percibe necesario el desarrollo de habilidades relacionadas con la información visual, incluso la *graficación* puede ser abordada en clase como una rutina o algoritmo, y no como un recurso para analizar e identificar propiedades en las gráficas.

Las experiencias de tipo visual que ocasionalmente se promueven en clase están limitadas a ilustrar, y no se incursiona en escenarios donde las imágenes conduzcan a análisis o permitan validar conjeturas.

En el nivel básico y medio superior, el tema de la graficación adquiere diferentes usos, puede ser considerada en sí mismo un objeto de estudio cuando se le da un tratamiento analítico, puede ser un elemento de apoyo para la enseñanza del concepto de función o de relación; o puede incluso usarse para modelar procesos naturales o sociales donde su papel fundamentalmente se asocia con la interpretación de las variables de los fenómenos.
En este caso, la graficación es un instrumento que debe estar disponible para poder participar del proceso de interpretación [8].

La relación entre *gráfica* y *función* puede construirse en el aula a partir de diferentes contextos, esta diversidad favorece el desarrollo de escenarios didácticos específicos que revindiquen el sentido actual y el papel que tiene la graficación en la escuela. Según Kaput [9], se busca que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan y argumenten sus resultados, con lo cual construirá un conocimiento significativo, ya que al ser edificado por el mismo estudiante, adquiere más sentido.

Proponer el estudio de diversos fenómenos en la clase de matemáticas, ha motivado el desarrollo de nuevos escenarios para el análisis y discusión de conceptos matemáticos; estos entornos favorecen la construcción de modelos y argumentaciones a partir de datos empíricos, conjeturas e incluso creencias. Arrieta [10] enfatiza la importancia de usar las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza, confrontando y argumentando diferentes versiones.

Un aspecto que se destaca en este enfoque, es la posibilidad de repetir experimentos, lo que permite identificar las variables que intervienen y favorecen el reconocimiento de las regularidades y características de los fenómenos.

En opinión de Borba y Villarreal [11], la experimentación cambia la naturaleza del conocimiento que se construye en clase, ya que el tipo de *actividad matemática* que se encuentra en estos escenarios (opuesto a los enfoques formalistas), les permite significar los conceptos a partir de los hechos que observan, de las situaciones variacionales que experimentan; e incluso –cuando se trata de sensores de movimiento–, conectar la experiencia corpórea a las representaciones matemáticas.

Nemirovsky, Tierney y Wright [12], sustentan la idea de que, la fusión de actividad física y las formas gráficas son un gran recurso didáctico para involucrar a los estudiantes en discusiones sobre la construcción e interpretación de gráficas; particularmente, cuando se usan sensores de movimiento es posible establecer una fuerte conexión entre una construcción interna y algo que se obtiene a través de los sentidos, en situación escolar.

La *experiencia sensorial* es una variable a considerar en el diseño de este tipo de actividades de aprendizaje, ya que permite la construcción de argumentos, que usualmente se apoyan en incursiones *visuales* o *modelizaciones verbales* de los fenómenos que se estudian.

Sin embargo, Barwise y Etchemendy [13], comentan que es usual encontrar opiniones que aducen la falta de validez en las interpretaciones o formulaciones que realizan los estudiantes en estos escenarios, pues no hay definiciones y teoremas explícitos; y las argumentaciones a partir de la visualización no se admiten como pruebas rigurosas, y por ende, se cree que no son válidas.

Se ha considerado a las formas gráficas y a los ejercicios de visualización, como acercamientos intuitivos y poco formales dentro de la matemática escolar, sobre todo en el nivel superior.

Una explicación a este fenómeno la ofrece Eisenberg y Dreyfus [14], quiénes señalan que en algunas situaciones, los estudiantes rechazan los ejercicios de visualización y prefieren un tratamiento algorítmico de los problemas, dado que el pensamiento visual exige procesos del pensamiento más elaborado que un pensamiento algorítmico.

Aunque es muy importante destacar que, como en la vida escolar del estudiante existen pocos encuentros con trabajos gráficos y argumentaciones a partir de lo visual, es muy probable que los estudiantes prefieran actividades analíticas en las que existe un cierto grado de certeza, dado que se aplica un algoritmo y se obtiene un resultado.

Esto no sucede cuando hay de por medio un experimento o actividad en la que hay que interpretar la obtención de datos, interpretar información y argumentar a partir de evidencias.

En opinión de Borba y Villarreal [11], la matemática se ha concebido como una ciencia alejada de la experimentación, pues se asume que la experimentación no tiene cabida en una ciencia exacta. Sin embargo –bajo su enfoque– argumentan las ventajas que ofrece un *acercamiento experimental* para el estudio de la matemática; en particular, la posibilidad de probar y generar conjeturas, probar caminos alternativos para obtener un resultado o la posibilidad de repetir un experimento.

II. PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

El propósito de la investigación es desarrollar una secuencia didáctica para el estudio de comportamientos gráficos a través de un ambiente de modelación matemática, para que el alumno: identifique las variables independiente y dependiente, realice aproximaciones de representaciones gráficas, interpretaciones, compare los comportamientos discreto y continuo.

Esto es, al modelar el movimiento de un balón a través de la aplicación Video Physics para Ipad y del software Logger Pro, permitirá a los estudiantes visualizar el movimiento, construir las tablas de datos y gráficas, y finalmente el modelo matemático que representa el movimiento en cuestión.

La actividad didáctica tiene la intención de situar a los estudiantes en una discusión sobre las condiciones físicas del modelo, donde se analicen los conceptos de desplazamiento y posición, con el propósito de reconocer el sentido de las variables.

Este enfoque se sustenta en la perspectiva de Monk [15], quien señala que los modelos físicos proveen a los estudiantes una visión de la situación funcional, la cual puede ampliar las perspectivas que tienen acerca de las funciones.

También se sustenta en Planchart [16], quien explica que, al modelar situaciones reales se provoca que el estudiante analice y describa elementos como la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos.

En el proceso de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, las cuales a su vez impulsan la construcción de otros registros de representación.

III. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de la secuencia didáctica se consideró el modelo de *ingeniería didáctica* de Artigue [17], que sirve como metodología de investigación y en su aplicación como guía de las experimentaciones en clase.

La idea de ingeniería didáctica se utiliza como recurso en la didáctica comparándolo con el trabajo que realizan los ingenieros, los cuales se apoyan no solo en el conocimiento de su dominio, sino que también involucran: la toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes propias del proceso.

En este modelo, el propósito es que, el alumno construya una noción o concepto a partir de situaciones o problemas, en donde surja la noción o concepto. En este contexto, la función del profesor es llevar a sus estudiantes a una situación diseñada de tal manera que, el conocimiento que deben aprender aparezca durante el proceso de la solución.

La ingeniería didáctica, como metodología de investigación, considera esencialmente tres fases:

1. El análisis preliminar, que considera tres componentes: la *epistemológica*, que explica el desarrollo matemático en cuestión. La *cognitiva*, referida a las concepciones de los estudiantes y la *didáctica*, que se refiere a la situación de enseñanza.
2. El diseño de la ingeniería, que se refiere a: la forma en que se organizará y tratará el contenido, y las estrategias que se deben usar durante las actividades diseñadas.
3. La puesta en escena o experimentación de la secuencia didáctica, y el análisis de los resultados.

IV. FASE DEL ANÁLISIS PRELIMINAR

A. Estudio epistemológico

La *función* ha evolucionado a lo largo de la historia, definiendo características específicas en cada uno de los períodos históricos. A continuación se describe la evolución de la función en siete periodos.

El *primer periodo* se sitúa en la matemática Prehelénica, caracterizada por el estudio e identificación de regularidades en fenómenos cambiantes donde se presenta la relación entre cantidades de magnitudes variables. Los fenómenos sujetos de cambio como el calor, la luz, la distancia y la velocidad, poseen distintos grados de intensidad, y cambian continuamente entre ciertos límites establecidos.

La identificación de los elementos variables en el análisis cuantitativo de todo proceso real de cambio, conduce a la determinación de las variables.

La construcción de tablas numéricas a partir del cálculo de valores cambiantes de diferentes magnitudes dependientes, condujeron a una primera aproximación a las relaciones funcionales.

Pasar de una tabla de datos a la búsqueda de regularidades, implicó la existencia de una cierta idea de funcionalidad.

En este contexto, las situaciones de estudio están ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables, y los invariantes observados están asociados al establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa-efecto. Las representaciones estaban dadas a través de medidas de cantidades y magnitudes, así como de tablas.

El *segundo periodo* se ubica en la matemática post-helénica hasta la matemática medieval, con Oresme y Galileo. Se caracteriza por el uso de la razón o proporción como recurso para el análisis cuantitativo. Se trataba de buscar la proporcionalidad como relación entre magnitudes variables.

Las situaciones de estudio estaban ligadas a las magnitudes físicas, y en especial en campos del conocimiento, tales como la geometría o la astronomía.

Los invariantes identificados están asociados con las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.

Las representaciones estaban asociadas a las proporciones, que en un principio expresaban las relaciones establecidas –como por ejemplo el Teorema de Thales–, pasando posteriormente a expresiones como *a:b::c:d.*

El *tercer periodo* comienza con las aportaciones de las Escuelas de Oxford y Paris y su representante más importante es Oresme. Se caracteriza por la aparición del modelo de gráfica para representar la relación entre magnitudes variables. Oresme utilizó el grafismo para representar los cambios, y así describirlos y compararlos; utilizó la continuidad de los segmentos a falta de un continuo numérico para representar el movimiento (es notable la ausencia de los decimales).

Este tipo de gráficas se obtenían a partir de rasgos cualitativos mas que cuantitativos, y se consideraban modelos geométricos para expresar las relaciones, pues no había necesidad de representar muy fielmente dichas relaciones.

Las situaciones de estudio estaban ligadas a las magnitudes físicas, movimiento, luz, calor, velocidad, en las que se intentaba representar gráficamente tanto la variación como las dependencias entre magnitudes.

Los invariantes identificados en esta etapa son la proporcionalidad entre magnitudes y relación de dependencia cualitativa, la cual es representada con una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad, en relación con otra de la cual depende.

En las representaciones se usaban términos específicos, *formas, latitud, longitud* y se representaba la dependencia por medio de gráficos que adquirían su significado de forma global (sintética).

El *cuarto periodo* corresponde a los trabajos de Descartes y Fermat (s. XVI-XVII), el cual se caracteriza por la definición de la curva de forma analítica-geométrica, al considerar que en una ecuación x y y representan un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables, relacionándolo asimismo con la noción de curva.

Las situaciones de estudio se enfocan en la búsqueda de un método para establecer las relaciones numéricas entre propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las coordenadas.

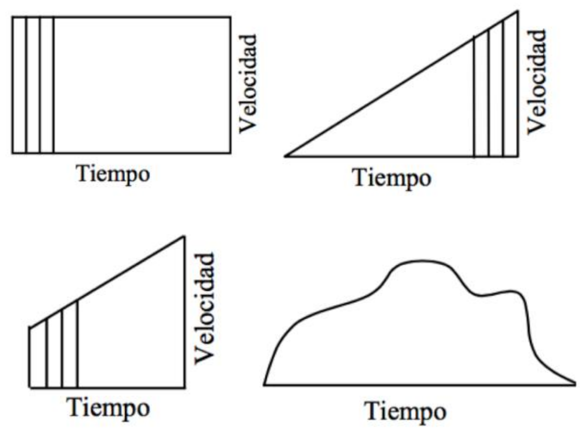

FIGURA 1. Representaciones del movimiento (Oresme)

Las invariantes observadas son las relaciones que se identifican cuando en una ecuación que contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva. La forma de representación se basa en el uso de ejes cartesianos, coordenadas y presentación algebraica.

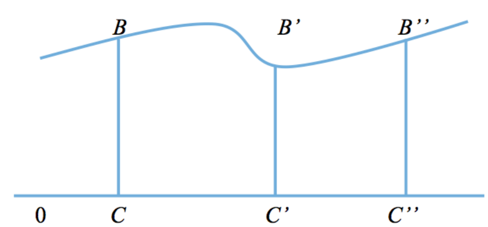

FIGURA 2. Modelo de representación funcional de Descartes.

El *quinto periodo* se ubica a partir los últimos trabajos de Euler sobre funciones arbitrarias (siglo XVIII). Continua en el siglo XIX con los trabajos de Fourier sobre series trigonométricas, y se consolida con los trabajos sobre los números reales de Cauchy, Dedekind, Riemman o Dirichlet, entre otros.

En esta época, la función se consideró como la idea principal del nuevo análisis, al definirla como una correspondencia de tipo muy general, *cada cantidad, el valor de la cual depende de una o varias cantidades, se denomina función de estas últimas, independientemente de que, sepamos, o no, por qué operaciones es necesario atravesar para pasar de estas últimas a la primera* [18].

Las situaciones de estudio están determinadas por conexiones entre la física y la matemática, siendo muy significativo el problema de la cuerda vibrante a partir del cuál, se tuvo necesidad de crear una noción más general de función. Se tratan también los problemas existentes respecto a la continuidad de funciones, llegando a considerar como funciones incluso aquellas que aparentemente no tienen una forma regular.

La invariante identificada es la definición de correspondencia arbitraria: si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y; entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. Se establece su forma de representación moderna con la expresión $f(x)$, o bien con y. Posteriormente cambia su representación a partir de la introducción de la teoría de conjuntos, y el estructuralismo bourbakista, como $f: X \rightarrow Y$, o bien $x \rightarrow f(x)$.

Las representaciones son del tipo gráficas, y se siguen utilizando los ejes cartesianos; aparecen nuevas representaciones con fines didácticos, como los diagramas de Venn.

El *sexto periodo y último*, corresponde a la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos. Ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática. Se caracterizó por la definición de función como terna $f = (F, X, Y)$, resultado del intento de precisión y rigor matemático.

Así se estableció que, una función es un conjunto de pares ordenados que tienen la propiedad de que: si dos pares (x, y) y (x, z) del conjunto X y Y, tienen el mismo primer elemento, deben tener siempre idéntico el segundo. Bajo esta consideración, el carácter dinámico de asignación entre variables queda oculto, mientras que se pone de relieve una caracterización como colección de pares de elementos.

Las situaciones de estudio incluyen todos aquellos fenómenos susceptibles de modelizarse funcionalmente dentro de cualquier campo científico.

Los invariantes observados son propiamente su definición formal:

$$f = (A, B, G) \text{ es una función} \Leftrightarrow G \subset A \text{ x } B$$

$$x \in A, y \in B \text{ tal que } (x, y) \in G$$

$$R \text{ es una función } \Leftrightarrow x, y, z, (x, y) \in R$$
$$(x, y) \in R \Rightarrow y = z$$

Este revisión epistemológica ha mostrado que las raíces conceptuales de la función provienen de Oresme, quién utiliza el grafismo para representar los cambios, describirlos y compararlos. Utiliza la continuidad de los segmentos a falta de un plano para representar el movimiento.

Por otra parte, la contribución decisiva para el establecimiento del concepto moderno de función fue obra de Descartes y Pierre de Fermat, quiénes representaron las curvas geométricas en un sistemas de coordenadas, describiéndolas a través de ecuaciones algebraicas.

Esta nueva geometría permitió considerar un amplio y diversificado número de nuevos problemas matemáticos y físicos; y de la misma manera, ponía en evidencia que el álgebra y la aritmética constituían campos teóricos independientes de la geometría.

Se puede observar que en la historia de la matemática, primero se trabajó con representaciones gráficas para el análisis de la naturaleza de los problemas, y posteriormente, con la integración del álgebra, se transitó hacia planteamientos generales en un intento por generar métodos unificados.

Este resultado, alienta la posibilidad de establecer una didáctica para la matematización del movimiento a través de un enfoque intuitivo, considerando que las representaciones gráficas contribuyeron al desarrollo del concepto de la función.

B. Estudio cognitivo

El concepto de función articula varias representaciones semióticas, por lo que su aprendizaje requiere integrar de forma coherente estos sistemas, para permitir el tránsito de información y la transferencia de características.

Hitt [19] señala que esto es muy complejo y reporta que, al cuestionar a un grupo de profesores de nivel preparatoria, las relaciones entre la representación gráfica y un contexto real (dibujo de un recipiente), presentaron serias dificultades para imaginar la forma del recipiente a partir de la gráfica.

Hitt señala que: *la complicación del problema no provoca un refinamiento en el proceso de resolución sino que la forma continua del trazo de la gráfica produce una conexión con las ideas intuitivas induciendo una forma errónea de un recipiente* [19].

Sin embargo, este problema no es exclusivo de los profesores, pues en una exploración realizada para esta investigación, se les preguntó a un grupo de estudiantes de tercer grado de secundaria lo siguiente:

Una fábrica de motocicletas tiene en existencia 110 unidades. Si cada mes produce 140 unidades que se almacenan con la producción anterior, ¿cuál es la *gráfica que describe la cantidad de motocicletas que se guardarán en la bodega durante los 3 meses siguientes?*

A continuación se les presentaron cuatro opciones; cada opción mostraba una gráfica que modelaba la situación anterior. El resultado fue que 16 de 18 estudiantes no eligieron la respuesta correcta.

Con esto se concluye que los estudiantes no le dan sentido a las variables, ni reconocen los comportamientos gráficos asociados a una situación específica. Pero es evidente que este problema es resultado de una enseñanza procedimental que favorece el dominio de técnicas, y que ofrece pocas oportunidades de reflexionar sobre conceptos y sus significados.

Desde un enfoque constructivista, el aprendizaje es una actividad que fomenta la autonomía de los estudiantes, ya que tienen el control de lo que estudian y de cómo aprenderán mientras los maestros conducen el proceso. Al respecto Dewey [20] señala que, en una sociedad cambiante y con una alta dinámica social, los estudiantes deben aprender a trabajar de forma independiente y desarrollar su pensamiento crítico. Así que una clase debe promover que los estudiantes se involucren en su propio proceso de aprendizaje, y debe promover la autonomía, lo que ayudará a los estudiantes a desarrollar estas destrezas. Dewey [20] declara que el aprendizaje puede y debe ser divertido, para que el estudiante lo disfrute y lo estimule.

De acuerdo con Piaget [21], los estudiantes construyen su conocimiento a través de sus acciones con el ambiente, tanto físicas (manipulando objetos) como mentales (ampliando o redefiniendo esquemas internos existentes).

Los estudiantes aprenden encontrando y explorando objetos e ideas; y es justo en este contexto, donde se asimilan las nuevas ideas a sus esquemas existentes o estructuras de pensamiento previas. Si la exploración o el trabajo con un objeto o idea no coincide con sus esquemas actuales, el estudiante se enfrenta a un desequilibrio cognitivo donde se motiva a realizar un acomodo de la nueva experiencia.

Es a través del proceso de acomodación que se construye un nuevo esquema donde la información se asimila y se restablece temporalmente el equilibrio. De esta manera es como la construcción de conocimiento toma lugar [22].

Concluimos que, es importante ofrecer espacios para que los estudiantes construyan sus conocimientos basándose en sus propias experiencias, ya que de acuerdo con Piaget [21], los estudiantes aprenden encontrando y explorando objetos e ideas, y es justo en este contexto donde se asimilan las nuevas ideas a sus esquemas existentes o estructuras de pensamiento previas.

Además, la discusión y la reflexión en las actividades de clase promueven el aprendizaje, pues los estudiantes se involucran en una metareflexión al interactuar en debates e intercambio de experiencias. Esta actividad conduce a procesos donde los estudiantes recapturan, notan y revalúan su experiencia, para trabajar con sus experiencias nuevas, y convertirlas en aprendizaje [23].

C. Estudio didáctico

En este apartado se presenta el análisis de libros de texto de secundaria, para analizar el tratamiento didáctico del concepto de función, considerando que estos materiales representan un recurso didáctico que contribuye al aprendizaje de los estudiantes, ya que cumplen con el propósito de: traducir, concretar y dosificar los contenidos de los programas de estudio y plasmarlos en una presentación didáctica de forma secuencial, incorporando definiciones, aplicaciones y actividades de evaluación [24].

Los libros determinan influencia en la planeación didáctica, como lo señalan Fan y Kaeley [25]: en profesores que utilizan diferentes tipos de libros de texto, se observaron diferentes estilos de estrategias de enseñanza.

Los autores llegaron a la conclusión de que, los libros de texto desempeñan un papel en la pedagogía de los profesores mediante la transmisión de mensajes sobre el enfoque y su didáctica.

Para esta investigación se consultaron tres libros de texto de matemáticas de cada grado, que el estado distribuye gratuitamente en las secundarias. La selección fue al azar, considerando los libros que usan los estudiantes donde se aplicó la actividad, y los disponibles en ese momento en la biblioteca escolar.

En el primer grado de secundaria se presentan diversas formas de representación de una función, aunque no sean definidas como funciones.

Las representaciones presentadas son:

- *Fórmula.-* se presenta en geometría, al calcular perímetros, áreas y volúmenes de diversas figuras y cuerpos geométricos.
- *Gráfica.-* se presentan diversos tipos de gráficas; de barras, de pastel o de sectores, histogramas, de polígono de frecuencias. Se trabaja únicamente en el primer cuadrante de un plano cartesiano.
- *Parejas ordenadas.-* son presentadas en el tema de arreglos rectangulares al trabajar con números naturales.
- *Correspondencia entre conjuntos.-* se puede observar al trabajar con diagramas de árbol, en este tema se hacen corresponder los elementos de dos conjuntos.
- *Caja negra.-* en actividades donde el alumno utiliza la calculadora casi desde el inicio del curso, cuando trabaja con los números naturales.
- *Tabla de valores.-* desde el inicio del curso, las tablas son empleadas para concentrar información, posteriormente se formaliza su uso en el eje de preálgebra, en donde a partir de asignar diversos valores a una variable estas son sustituidas en expresiones algebraicas, la información obtenida con el procedimiento anterior se concentra en tablas de dos columnas.

En ningún momento del curso se habla sobre funciones, únicamente se trabaja con algunas de sus representaciones.

Las representaciones trabajadas durante este grado no son nuevas, sino que se retoman de lo ya trabajado en la primaria. Se concluye que, en el primer grado de secundaria se inicia el estudio de funciones representada por una tabla, la cuál es obtenida a través de una expresión algebraica.

Los valores asignados a una variable son sustituidos en la expresión propuesta, obteniendo de esta manera la tabla de valores conformada por dos columnas. La primera columna concentra los valores propuestos para la variable, la segunda columna contiene los valores correspondientes a cada uno de los propuestos, evaluados en la expresión algebraica.

En el segundo grado de secundaria se utilizan diversas representaciones de una función, dando un especial énfasis a la representación gráfica, ya que el tema central en este grado es el plano cartesiano, las representaciones utilizadas en este grado son:

- *Parejas ordenadas.-* es la base para iniciar la localización de puntos en el plano cartesiano, es por ello que se maneja al inicio del tema.
- *Gráfica.-* se trabaja con gráficas cartesianas generadas por parejas ordenadas; así como con regiones, producto de desigualdades.
- *Ecuación y/o desigualdad.-* se inicia el trabajo con expresiones simbólicas, se propone el valor de una incógnita y por medio se una sustitución se obtiene la pareja ordenada deseada, para concluir con el trazo de una gráfica.
- *Correspondencia entre conjuntos.-* se observa al momento de trabajar con las ecuaciones y/o desigualdades, dado un valor se obtiene su correspondiente en otro conjunto.
- *Tabla de valores.-* al igual que en primer grado, las tablas son empleadas para concentrar información, se les da un uso desde el inicio de tema de plano cartesiano, en donde a partir de asignar diversos valores a una variable estas son sustituidas en ecuaciones y/o desigualdades y se obtiene su correspondiente.

En este grado, la idea de relación antecede al concepto de función. Se formaliza en el uso de un plano cartesiano. Se trabaja con funciones representadas por una tabla, la cuál es obtenida a través de una ecuación y/o desigualdad. Se desarrollan actividades que plantean una ecuación y/o desigualdad, y la actividad concluye con la construcción de una gráfica cartesiana.

Existen pocas actividades de transferencia entre sistemas de representación, por ejemplo en actividades del tipo: "*dada una gráfica determinar el conjunto de parejas ordenadas asociadas"*.

En el tercer grado de secundaria se aborda formalmente el concepto de función, se continúa con la graficación de una función a partir de datos y/o fórmula proporcionada, y se concluye con la graficación de regiones en el plano. Se estudian las funciones en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, correspondencia, parejas ordenadas, ecuación y/o desigualdad, caja negra (de manera implícita) y fórmula.

Sin embargo, no se hace énfasis en la transferencia entre representaciones, el esquema de enseñanza es: fórmula-tabla-gráfica.

En esta revisión de libros de texto se concluye que, la forma de abordar el tema de funciones sigue el esquema *fórmula-sustitución (procedimiento, mecanización)-tabla-gráfica*. Este enfoque no permite al estudiante explorar las relaciones funcionales, ni el sentido de las variables, ni la variación. Tampoco se favorece el tránsito entre representaciones.

Con lo anterior expuesto, coincidimos con Hitt [26], quien argumenta que el alumno de secundaria no adquiere el conocimiento sobre funciones, ya que no es capaz de pasar de un registro de representación a otro.

V. FASE DE DISEÑO DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

El propósito de la actividad didáctica es permitir que los estudiantes relacionen sus experiencias de movimiento a través de un proceso de modelación matemática, con el propósito de interpretar el sentido de las variables, la necesidad de un sistema de referencia, la transferencia de información entre los diferentes sistemas de representación mediante el uso de un software Video Physics para Ipad y del software Logger Pro para Windows.

Los estudiantes deberán construir el modelo matemático a partir de las variables físicas; tiempo y posición, con lo que se pretende darle significado al concepto de función y generar una discusión alrededor de la gráfica para motivar la transferencia de información y sobre todo, desarrollar las habilidades de lectura sobre la gráfica.

La secuencia didáctica está dividida en cuatro actividades:

En la primer actividad los estudiantes analizarán el funcionamiento y herramientas del programa Video Physics.

En la segunda actividad realizan la grabación de movimientos y realizarán su análisis con el programa Video Physics.

En la tercer actividad obtendrán el modelo matemáticos asociado con el movimiento con velocidad constante usando el software Logger Pro.

En la cuarta actividad realizarán el análisis de combinación de movimientos con velocidad constante con Logger Pro.

A. Primera actividad

Los estudiantes conocerán el funcionamiento del software Video Physics. Este programa es una aplicación para Ipad para el estudio del movimiento, permite grabar escenas de movimiento para realizar el seguimiento del objeto en movimiento al marcar la posición del objeto cuadro a cuadro, se ajusta la escala usando una distancia conocida y el programa elabora la gráfica de trayectoria del objeto posición distancia – tiempo.

En esta primer actividad los estudiantes formarán equipos de con cuatro integrantes, y tendrán a disposición un Ipad con la aplicación instalada. Como introducción, el profesor expondrá las características y herramientas de la aplicación a través de una presentación electrónica.

Los aspectos más relevantes a considerar son; la biblioteca de videos, el procedimiento para grabar un video, la ubicación de punto para el seguimiento del objeto en movimiento, las gráficas obtenidas, la herramienta para compartir (exportar) la información.

También se expondrán las condiciones para grabar la escena de movimiento; señalar una magnitud (metro) dentro de la escena, forma de impulsar el objeto, espacio para la grabación, características de la toma, duración, entre otros.

Como práctica, cada equipo grabará el movimiento de una pelota, una vez obtenido del video se trabajará de forma colectiva y el profesor explicará paso a paso las instrucciones para generar la gráfica.

B. Segunda actividad

Los estudiantes saldrán al patio para grabar el movimiento de un balón. Se les pedirá obtener cuatro grabaciones distintas, a fin de disponer de una biblioteca de videos para posibles elecciones (cada integrante del equipo grabará cada video).

Se les pedirá a los estudiantes crear las condiciones para que, el movimiento del balón mantenga una velocidad constante durante la escena grabada.

Un aspecto importante es la asignación de la unidad de referencia (metro), para establecer la conversión de pixeles a unidades (en las herramientas de ajuste del software), a fin de obtener la gráfica con el sistema de referencia real.

Los estudiantes deberán identificar la relación funcional entre las variables *distancia* y *tiempo*, analizar la manera en que se relacionan, explicar la forma de la gráfica a partir de la situación física, y comparar distintos movimientos y las diferentes gráficas que se generan.

Una vez grabados los videos, se regresará al aula de clase donde el profesor coordinará una presentación grupal en el que cada uno de los equipos mostrará uno de los videos de movimiento. Posteriormente el profesor detallará los pasos a seguir, para realizar el seguimiento del balón utilizando la herramienta de punteo.

Para iniciar el estudio del movimiento, se elige el video y se determina el instante a partir del cual se iniciará con la modelación del movimiento. A continuación, se determina el sistema de referencia y se establece el origen. Posteriormente se ajusta la calibración de la distancia con la que la aplicación realizará la conversión de pixeles a unidades de medida (metros). Enseguida se establecen los puntos sobre el balón en movimiento, y finalmente se obtiene la gráfica.

En esta secuencia didáctica sólo se analizan las características del fenómeno y la gráfica resultante.

C. Tercera actividad

Los estudiantes exportarán la información generada en la aplicación Video Physics, al software Logger Pro, con el objetivo de realizar un estudio simultáneo de las diversas representaciones funcionales: tabular, gráfica y representación física. También responderán a las preguntas:

¿Cuáles son las variables involucradas en el experimento?

¿Cuál de las variables está en función de la otra?

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

Una vez obtenida la tabla de valores, se les pedirá a los estudiantes que respondan las siguiente preguntas:

¿Qué información del experimento te proporciona la tabla de valores?

¿Cuál es la relación entre la tabla de valores y la gráfica?

El software Logger Pro tiene la capacidad de sincronizar las diferentes representaciones. Al situar el cursor sobre un punto en la gráfica, es posible observar su correspondiente posición en el video o en la tabla. Esta interactividad tiene un impacto visual positivo en los estudiantes, porque pueden observar simultáneamente la forma de representación tabular de la función y su representación gráfica.

Los estudiantes realizarán un análisis cuantitativo de la información en la tabla y en la gráfica, vinculandolo con las características del experimento. Por ejemplo, al identificar la posición inicial del balón, el tiempo total del experimento, la distancia final del objeto, la duración del experimento.

Esta información servirá de referente para responder a las preguntas sobre las características de las gráficas:

¿Qué eje representa el tiempo?

¿Qué eje representa la distancia?

¿Dónde se observa la distancia final del objeto?

¿Dónde se observa la distancia inicial?

¿Cuál fue el tiempo total?

Logger Pro cuenta con una herramienta para aproximar una función lineal a los datos obtenidos del experimento.

Esto le permite a los estudiantes establecer el modelo algebraico, y contrastarlo con los datos obtenidos del experimento, para encontrar coincidencias y diferencias. Los estudiantes deberán responder las preguntas:

¿Cuál es la función que se obtiene cuando el movimiento del balón empieza después de haber pasado 1 segundo?

¿Es posible estimar la distancia a la que se encuentra el balón después del doble de tiempo?

D. Cuarta actividad

Los estudiantes saldrán nuevamente al patio para grabar el movimiento de un balón, pero en esta ocasión se les pedirá grabar movimientos combinados con velocidad constante.

Por ejemplo, mover el balón contra una pared para que rebote a su punto de partida. Posteriormente, regresarán al aula para realizar el seguimiento del movimiento del balón utilizando la herramienta de punteo, y finalmente obtendrán la gráfica.

Para concluir, el profesor presentará algunas gráficas generadas a partir del movimiento de un balón, y los estudiantes explicarán la forma en que ocurrió el movimiento.

VI. FASE DE EXPERIMENTACIÓN DE LA SECUENCIA

La secuencia didáctica se implementó en una escuela secundaria pública en la comunidad de Pueblo Nuevo Talmimilolpan, municipio de Lerma, Estado de México.

Participaron dieciséis estudiantes, uno de 12 años, seis de 13 años, ocho de 14 años, y uno de 15 años todos de tercer grado de secundaria. Cada actividad se realizó en una sesión de trabajo de 50 minutos; la secuencia completa se desarrolló en cuatro días.

A. Sesión 1

Se presentó a los estudiantes el instrumento de trabajo (Ipad), y se expusieron las generalidades de la forma de trabajo.

Varios estudiantes se mostraron motivados y entusiasmados cuando el profesor explicó que: se realizarían actividades al aire libre con balones de futbol, usando instrumentos tecnológicos, grabando videos para el estudio de un tema matemático.

La primer parte de la sesión se desarrolló en el aula, donde se explicó el funcionamiento del Ipad y de la aplicación Video Physics. Se expusieron las características y herramientas disponibles, se observaron varios videos de la biblioteca (interna), donde se explicó el sentido que tiene el estudio del movimiento, en particular, reconocer las variables involucradas en un fenómeno de movimiento.

Se explicó cómo grabar un nuevo video y cómo realizar el punteo para el seguimiento del objeto en movimiento, se explicó también como obtener la gráfica a partir del punteo de seguimiento.

En la segunda parte de la actividad, los estudiantes trabajaron en equipos de cuatro integrantes para preparar una escena de movimiento de un balón y grabarla (dentro del aula).

Finalmente regresaron presentaron sus videos usando el cañón. El profesor intervino para explicar el procedimiento para obtener la gráfica.

Algunas de las conclusiones a las que llegaron los estudiantes fueron las siguientes:

- Identificaron los valores de *x* como *tiempo* (*abscisas*) y los valores de *y distancia* (*ordenadas*).
- Identificaron la estructura de una coordenada, compuesta por un par de números, uno para tiempo y otro para distancia.
- Ubicaron la coordenada como un lugar sobre el plano.
- Identificaron que la gráfica de un movimiento constante es una recta.

B. Sesión 2

Los estudiantes salieron al patio para grabar el movimiento de un balón, y se les pidió registrar la distancia (medida de referencia) para calibrar el seguimiento del balón. Se les pidió identificar las variables *distancia* y *tiempo* durante la actividad de grabación.

Después, los estudiantes regresaron al aula para trabajar con sus grabaciones. Primero calibraron las dimensiones del video, realizaron el seguimiento a través del punteo y obtuvieron la gráfica. Algunas conclusiones fueron las siguientes. La gráfica resultante pasa por el origen siempre y cuando el balón esté en la distancia cero, en el tiempo cero.

Con esto, los estudiantes pudieron bosquejar la gráfica sin tener que sustituir valores, graficar y localizar puntos en el plano (procedimiento convencional observado en los libros de texto).

Los estudiantes identificaron la relación funcional entre las variables; cuando una cambia, la otra también lo hace a un valor constante. Concluyeron que la distancia está en función del tiempo.

Un aspecto importante fue hacer estimaciones sobre la posición del balón a diferentes tiempos (mayores a los del experimento), esto contribuyó a reafirmar la idea de predicción.

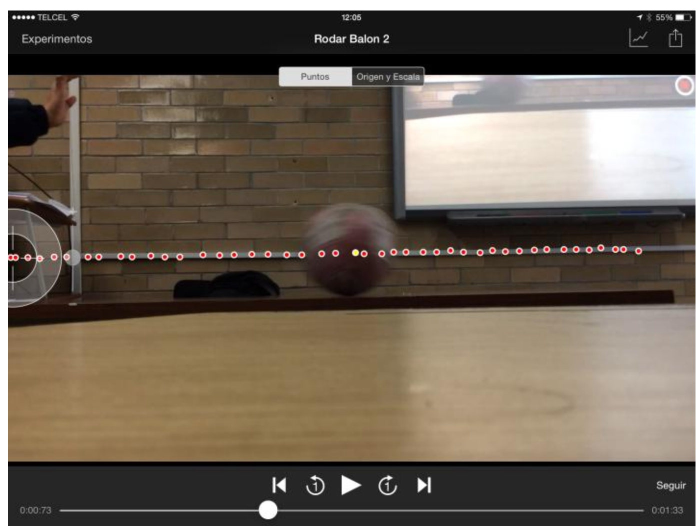

FIGURA 3. Video Physics con el punteo sobre un balón en movimiento.

C. Sesión 3

El Ipad tiene limitaciones para analizar el movimiento, pues aunque puede generar una gráfica, no permite analizar los datos numéricos del experimento, ni se puede realizar trabajo algebraico.

Para ampliar la experiencia de trabajo, se utilizaron cuatro computadoras portátiles (una para cada equipo) con el software Logger Pro. Este software permite integrar varios sistemas de representación, y tiene herramientas avanzadas de análisis. Se les planteó a los estudiantes identificar las variables del experimento en la tabla de valores, y posteriormente ubicarlas en la gráfica.

La conclusión a la que llegaron es que: los valores de la tabla están reflejados en la gráfica (transferencia de información entre sistemas de representación). Concluyeron también, que la tabla coincide con los valores de la gráfica en sus extremos (inicio y final de experimento).

La herramienta de *ubicación* en el software, permitió sincronizar la representación gráfica, tabular con el video (que incluye el punteo de seguimiento) y esto mostró que existe coordinación entre los diferentes sistemas de representación. En este punto se les preguntó a los estudiantes:

¿Cuáles son las variables involucradas en el experimento?

A lo que concluyeron que hay dos variables relacionadas: la distancia y el tiempo.

Las preguntas planeadas para esta sesión, ya las habían contestado los estudiantes en la sesión 2. No resultó nada difícil la identificación de variables: el tiempo total del experimento, la distancia recorrida, la variables dependiente y la variable independiente. En cambio, se generaron otras discusiones, por ejemplo, el cuestionamiento de un estudiante sobre la posición de la cámara al grabar la escena, ya que al colocarla de frente al movimiento se modifican las condiciones en la toma de datos.

Al respecto los estudiantes concluyeron que aunque la variable *tiempo* fluye (el término que usaron fue *existe*), no se puede determinar la *distancia*; de ahí que es importante definir el sistema de referencia. Para concluir la actividad, los estudiantes utilizaron la herramienta *ajustar curva* para aproximar una función de la forma $y = mt + b$ a la gráfica obtenida de los datos experimentales.

Con esta expresión, los estudiantes completaron una tabla y construyeron la gráfica

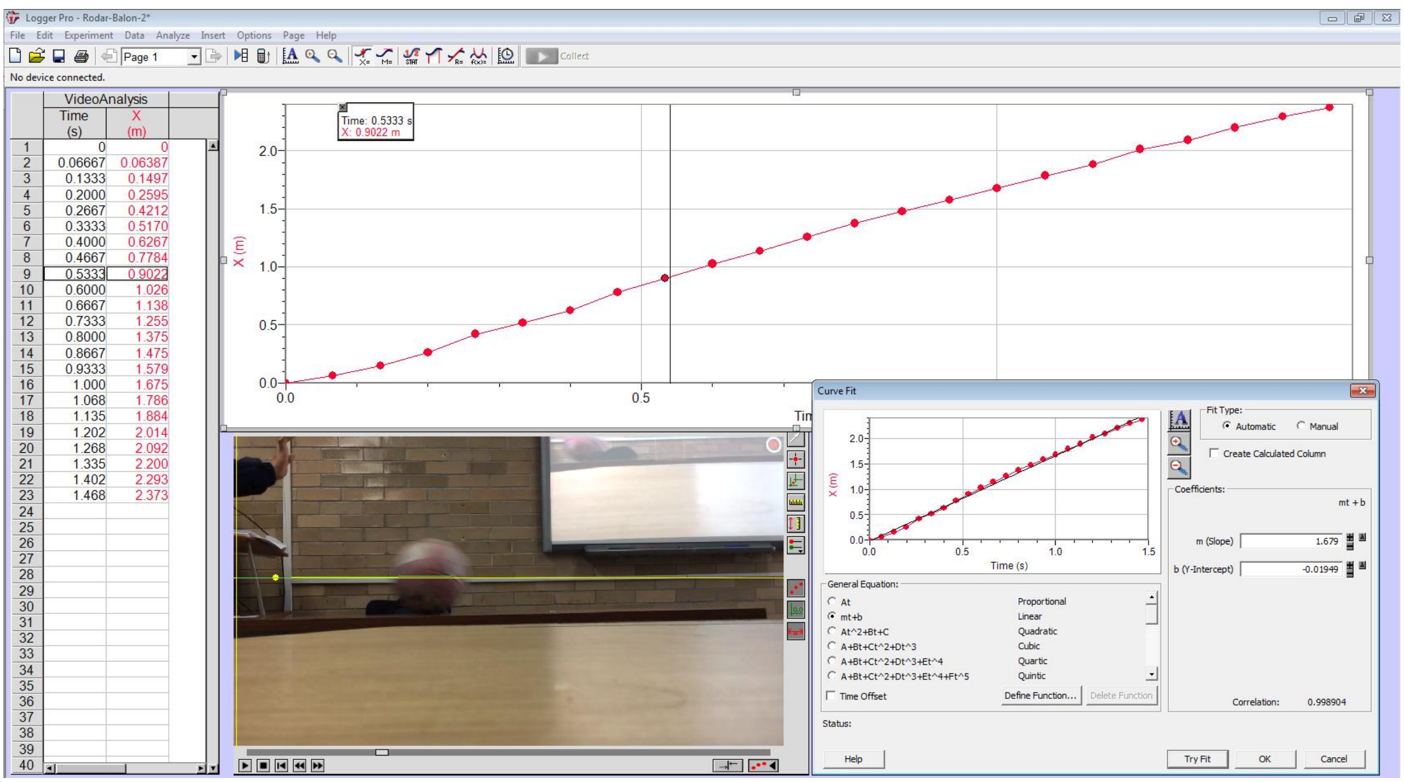

FIGURA 4. Logger Pro con cuatro representaciones de función.

D. Sesión 4

En la última sesión, los estudiantes salieron al patio de la escuela para grabar movimientos combinados, por ejemplo: lazar el balón a la pared, dejar en reposo el balón y luego lazarlo, mover el balón de izquierda a derecha de forma repetitiva, entre otros.

Posteriormente los estudiantes regresaron al aula para analizar los videos grabados y la forma de las gráficas.

Para concluir, el profesor planteó la siguiente cuestión:

Describe el movimiento del balón que generó la siguiente gráfica.

función a partir de la descripción de un determinado fenómeno de movimiento.

VII. CONCLUSIONES

Aunque el concepto de función ha sido una pieza fundamental en el desarrollo de las matemáticas, la ciencia y la tecnología, la enseñanza tradicional sólo la reduce a una simple introducción algorítmica.

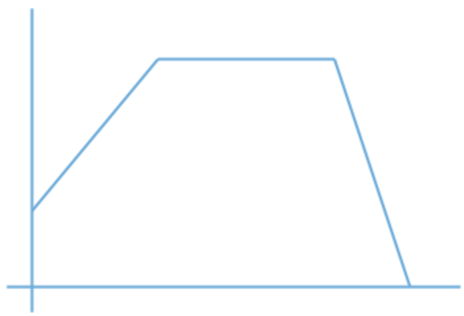

FIGURA 5. Gráfica que describe el movimiento de un balón.

Una forma de modificar tal situación es construir la noción de función desde una perspectiva más amplia; incorporando aspectos de la visualización y variación. Considerando que el concepto de función tuvo su origen fuera del contexto escolar, su introducción a dicho ámbito supuso una reestructuración o *modificación* de sus características de origen (de acuerdo a la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard).

Estas sucesivas adecuaciones a nivel escolar han llegado a preponderar las manipulaciones algorítmicas sobre otras actividades, provocando que el estudiante perciba este conocimiento como inútil y alejado de su realidad.

A partir de nuestra investigación preliminar concluimos que, para construir el concepto de función, es necesario que el estudiante se enfrente al análisis de las diversas representaciones de forma simultánea.

Con esta idea, se planeó una secuencia didáctica en el que los estudiantes se involucraron en un espacio de reflexión y comunicación entre alumno-alumno, para favorecer la expresión de ideas, de conjeturas y el diálogo.

El análisis didáctico mostró que la enseñanza del concepto de función está basado en un esquema tradicional (*algebraica – tabulación - pares ordenados–coordenadas - gráficas*).

Esto motivó el desarrollo de una secuencia didáctica con actividades no convencionales (análisis del movimiento), para provocar en el estudiante la necesidad del concepto de función, a partir del reconocimiento de las variables involucradas; con lo cual también se le da significado a la gráfica.

El resultado fue que los estudiantes pudieron desarrollar la habilidad de bosquejo de una gráfica sin necesidad de tener valores para evaluar la función, sin tablas, pares ordenados o coordenadas, ya que pudieron expresar una función a partir de la descripción de un determinado fenómeno de movimiento.

REFERENCIAS

[1] Duval, R., *Basic issues for research in Mathematics Education*, Conferencia Plenaria, XXIV Conference of the Internatioanl Group for the Psychology of Mathematics Education, 55-69 (2000).

[2] Artigue, M., *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **1**, 40-55 (1998).

[3] Schoenfeld, A., *Explorations of student's mathematical beliefs and behavior*, Journal for Research in Mathematics Education **20**, 338-355, (1989).

[4] Guzmán, I., *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de estudiantes*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1), 5-21 (1998).

[5] García, G. y Serrano, C., *Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: El caso de la función*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **3**, 357-370 (2000).

[6] Dolores C., Alarcón G., Albarrán D., *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática **5**, 225-250 (2002).

[7] Bazaldúa, S., *Un acercamiento gráfico de los ceros de la función polinomio y a las raíces de la ecuación polinomio, una experiencia con estudiantes universitarios*,Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN, México (2007).

[8] Acuña, C., *Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **4**, 203-217 (2001).

[9] Kaput, J., Teaching and learning a new Algebra, En: E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, (Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 1999). pp. 133-155.

[10] Arrieta, J., *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*, Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV, México (2003).

[11] Borba, M. C. & Villarreal, M. E., *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*, (Springer, New York, 2005).

[12] Nemirovsky, R, Tierney, C. & Wright, T., *Body motion and graphing*, Cognition and Instruction **16**, 119-172 (1998).

[13] Barwise, J. & Etchemendy, J., *Visual information and valid reasoning*, En: W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds)., *Visualization in teaching and learning mathematics*, (Mathematical Association of America, Washington, 1991). pp. 9-24.

[14] Eisenberg, T. & Dreyfus, T., On the reluctance to visualize in mathematics, En: Zimmerman, W. & Cunningham, S. (Eds.). *Visualization in teaching and*

learning mathematics, (Mathematical Association of America, Washington, 1991). pp. 25-37.
[15] Monk, S., Students' understanding of a function given by a physical model, En: G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, (Mathematical Association of America, Washington, 1992). pp. 175-193.
[16] Planchart, M. O., *La modelación matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza del precálculo.* Revista de investigación en Ciencias y Matemáticas 1, (2005).
[17] Artigue, M., Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9**, 281-308 (1989).
[18] Lacroix, S. F. *Traité élémentaire de calcul différential et de calcul intégral* (Bachelier: Imprimeur-Libraire, Paris, 1837).
[19] Hitt, F., *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. Investigaciones en Matemática Educativa, (Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1996), pp. 245-264.
[20] Dewey, J. *Experience and education,* (Macmillan, New York, 1938).
[21] Piaget. J. *The origins of intelligence in children*, (International Universities Press., New York, 1952).
[22] Harlow, S., Cummings, R., y Aberasturi, *S. Karl Popper and Jean Piaget: A rationale for constructivism*. Educational Forum **71**, 41-48 (2006).
[23] Beaudin, B. P., y Quick, D. *Experiential learning: Theoretical underpinnings* (Report No. ETT-95-02). Fort Collins, CO: Colorado State University, High Plains Intermountain Center for Agricultural Health and Safety, Education and Training Team. (1995).
[24] Álvarez, J. M., *Entender la Didáctica, entender el Curriculum*, (Miño y Dávila, Madrid, 2001).
[25] Fan L., y Kaeley, G. S. *The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study*. Mid-Western Educational Researcher **13**, 2–9 (2000).
[26] Hitt, F. *Funciones en contexto*, (Pearson Educación, México, 2002).