

# Metodología para la determinación del momento de inercia de un sistema de dos cuerpos que rotan alrededor de un eje fijo



**Ramón Cala Aiello, Aida Cristina Delgado**

<sup>1</sup>*Facultad FICA, Ing. Mecatrónica, Universidad Técnica del Norte, Av. 17 de julio, 5-21, y  
Gral. José María Cordova, C.P. 19, Ibarra Ecuador.*

**E-mail:** rcala@utn.edu.ec

(Received 28 May 2016, accepted 2 October 2016)

## Resumen

El concepto de momento de inercia se entiende por los estudiantes como una medida de la inercia en la rotación, sin embargo, es difícil de entender su dependencia de la distribución de la masa alrededor del eje de rotación. En este artículo se describe el procedimiento metodológico de una práctica de laboratorio para la determinación del momento de inercia de un sistema de 2 cuerpos de masas iguales que rotan alrededor de un eje fijo utilizando la ligadura a través de un hilo del movimiento de traslación de un cuerpo de masa  $M$  y la rotación de un sistema de dos cuerpos obligados a rotar sobre un eje fijo. Se adjuntan los resultados y recomendaciones experimentales para la enseñanza de los aspectos más significativos de los tratamientos numéricos y gráficos.

**Palabras clave:** Laboratorio, Física, Momento de inercia.

## Abstract

The concept of inertia moment is understood by students as a measure of inertia in the rotation, however is difficult to understand its dependence on the mass distribution about the axis of rotation. This paper describes the methodological procedure in a laboratory practice for determining the moment of inertia of a system of two bodies of equal masses rotating around a fixed axis utilizing ligation, by a thread, of the translational movement a body with mass  $M$  and the rotation of two bodies forced to rotate about a fixed axis. The experimental results and recommendations for the teaching of the most significant aspects of numerical and graphic treatments are attached.

**Keywords:** Laboratory, Physics, Moment of inertia.

**PACS:** 01.30.L-, 45.20.D-, 45.20.da

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

En la carrera de Ingeniería Mecatrónica es de vital importancia relacionar los movimientos de traslación y rotación, lo que resulta importante para el diseño y construcción de mecanismos complejos como son brazos robóticos, sillas móviles u otros mecanismos destinados a personas con discapacidades físicas y motoras.

La mayor dificultad en la comprensión de este movimiento combinado por parte de los estudiantes está relacionada con las magnitudes que aparecen en la dinámica de rotación y que a simple vista son diferentes y nada relacionadas con las del movimiento de traslación.

El concepto de momento de Inercia, aunque resulta comprendido por los estudiantes como medida de la inercia y su similitud con la masa en el movimiento de traslación, resulta difícil entender su dependencia de la distribución de la masa respecto al eje de rotación

Por otro lado uno de los problemas fundamentales de la inserción del laboratorio de Física en el sistema de enseñanza aprendizaje está relacionado con un marcado

énfasis en el aprendizaje de destrezas y técnicas de recolección y procesamiento de datos experimentales, con pocas o ninguna relación explícita con referentes teóricos o modelos [1].

Resulta necesario desarrollar el laboratorio de física a través de un proyecto de investigación que resulte atractivo para el estudiante de los primeros niveles de la carrera, esto está de acuerdo con los planteamientos de algunos autores que ven en esta posibilidad una forma mucho más dinámica de adquisición del conocimiento y habilidades investigativas [2, 3, 4].

## II. PROBLEMA

Determinar el momento de inercia de un sistema de partículas distribuidas alrededor de un eje, utilizando un mecanismo combinado de rotación y traslación por ligadura.

### III. OBJETIVO

Aplicar los conocimientos adquiridos sobre las Leyes de Newton para el movimiento de rotación de un sistema de cuerpos o partículas alrededor de un eje fijo, a través del análisis de la dependencia del Momento de Inercia del sistema con respecto al valor de las masas de las partículas y sus distancias respecto al eje de rotación a través de un proyecto problemático de ligadura dinámica entre un movimiento de traslación y la rotación del sistema de partículas.

### IV. ANTECEDENTES

El estudio combinado del movimiento de rotación y traslación de un sistema físico han sido estudiados desde distintos puntos de vista por algunos autores haciendo hincapié en los conceptos y magnitudes de ambos tipos de movimiento [5, 6].

En el artículo *Sistema de ejercicios para una práctica de laboratorio* [7] se realizó el estudio de un sistema de partículas rotando alrededor de un eje y se determinó el valor del momento de inercia del sistema y su dependencia de la distancia de las masas respecto al eje de rotación, no así la dependencia con la masa, siendo además el procedimiento dinámico utilizado demasiado complicado para el estudiante al tener que encontrar valores de aceleración angular del sistema como datos intermedios para luego determinar el momento de inercia. Por otro lado, el intervalo del tiempo utilizado resulta muy pequeño, en el orden de los segundos, lo que hace mayor el error relativo temporal y del espacio angular recorrido.

### V. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

La ecuación fundamental de la dinámica de la rotación formulada por Isaac Newton tiene una expresión similar a la de la dinámica de la traslación y presenta la forma:

$$\Sigma M_{ext} = I \alpha. \quad (1)$$

Esta ecuación relaciona el Momento de fuerzas externas resultantes, sobre un sistema que, rota alrededor de un eje fijo, con la aceleración angular que el sistema experimenta producto de la acción de este momento de fuerzas externas, la magnitud  $I$  es la constante de proporcionalidad entre el momento de fuerzas y la aceleración angular, jugando el mismo papel que la masa en el movimiento de traslación.

El momento de inercia expresa la inercialidad del sistema que gira alrededor de un eje fijo.

Se puede demostrar teóricamente que el momento de inercia de una partícula de masa  $m$ , que gira alrededor de un eje fijo y que se encuentra con una distancia  $b$  de dicho eje se puede determinar a través de la siguiente expresión [8]:

$$I = m b^2.$$

Y si el sistema está formado por  $n$  partículas de masa  $m_i$  que se encuentran situadas a distancias  $r_i$  del eje de rotación entonces:

$$I = \sum_1^n m_i r_i^2. \quad (2)$$

Dónde:

$m_i$  es la masa de la partícula  $i$ .

$r_i$  representa la distancia a que está situada la partícula  $i$  respecto al eje de rotación.

$n$  es el número total de partículas.

En la Figura 1 se muestra el esquema de la instalación experimental que está formado por 2 masa  $m_r$  que giran alrededor del eje fijo 1, las masas se situaran a diferentes distancias, pero siempre equidistantes del eje de rotación 1.

### VI. DESCRIPCIÓN DE LA INSTALACIÓN

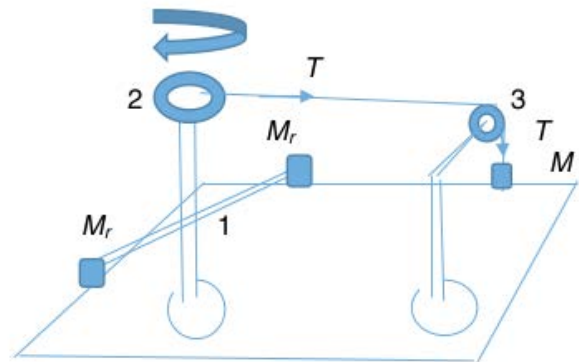


FIGURA 1. Esquema de la instalación experimental.



FIGURA 2. Instalación experimental.

Un cordel que está enrollado alrededor del tambor 2, pasa por el punto 3 y está atado a la masa  $M$  que al ser soltada

*Metodología para la determinación del momento de inercia de un sistema de dos cuerpos que rotan alrededor de un eje fijo*

arrastra el hilo originando un movimiento giratorio del tambor 2 y de las masas  $m_r$  alrededor del eje 1.

$$I_{total} = I_0 + I_m. \quad (6)$$

Bajo estas condiciones la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación (1) toma la forma:

$$Tb = I\alpha. \quad (3)$$

Donde  $b$  es el radio del tambor 2.

Si las masas  $m_r$  mantienen una posición fija respecto al eje de rotación el momento de inercia del sistema se mantiene constante de acuerdo a la expresión (2) y esto implica que la aceleración del sistema es constante y depende del valor de la masa  $M$  que se traslada bajo el efecto de la gravedad y produce el movimiento de todo el sistema por efecto de la ligadura impuesta por el cordel inextensible.

Si el sistema parte del reposo entonces, por cinemática sabemos:

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2}. \quad (4)$$

Aplicando las ecuaciones de Newton al sistema que se traslada con masa  $M$  y al sistema que rota con momento de inercia  $I$ , y las condiciones de ligadura, podemos encontrar (despreciando la masa del tambor 3, la masa del hilo y la fricción de los tambores sobre los ejes de rotación) la expresión para el cálculo del momento de inercia del sistema:

$$I = M \left( \frac{gbt^2}{4\pi n} - b^2 \right). \quad (5)$$

Donde hemos considerado que el ángulo  $\Theta$  descrito por el sistema que rota lo tomamos como un número entero  $n$  de vueltas, o sea:

$$\Theta = 2\pi n, \quad \text{y} \quad \alpha = 4\pi n / t^2.$$

La ecuación (5) se obtiene de considerar la existencia de una ligadura a través del hilo que une la rondana 2 con la 3 y relaciona los movimientos de traslación de la masa  $M$  con la rotación del sistema de 2 partículas de masas  $m_r$  y se debe pedir a los estudiantes que demuestren su validez y el modelo utilizado para lograrlo.

La ecuación (5) permite determinar experimentalmente el valor del momento de inercia  $I$  del sistema que rota, si se mide el tiempo  $t$  que tarda el sistema en realizar  $n$  vueltas alrededor del eje fijo de rotación, lo cual puede realizarse con un cronometro manual con buenos resultados.

Es importante comprender que el momento de inercia que se está midiendo es la suma del momento de inercia ( $I_m$ ) de las 2 masas  $m_r$  que se encuentran a una distancia  $r$  del eje de rotación más el momento de inercia ( $I_0$ ) del tambor y la varilla.

La expresión (6) sugiere un método experimental para la determinación del momento de inercia de un sistema de partículas  $I_m$  si determinamos por separado el momento del sistema con las 2 masas situadas a una determinada distancia y luego le restamos el valor calculado  $I_0$  del sistema sin las masas utilizando la expresión (5) en ambos casos.

## VII. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se presenta a los estudiantes un problema científico a resolver que puede ser formulado de la siguiente forma:

*Determinar experimentalmente de que factores depende el valor del momento de inercia de un sistema de dos masas que giran respecto a un eje fijo de rotación.*

Se sugiere a los estudiantes utilizar la expresión (5) como método experimental y se proponen tres tareas a realizar.

Tarea 1: Determinación del momento de inercia del sistema que rota (sin las rodajas o partículas)  $I_0$ .

Con el pie de rey se mide el diámetro del tambor de suspensión para determinar el parámetro  $b$ .

Se coloca en el extremo del cordel un cuerpo con masa aproximadamente 20g y partiendo del reposo se mide tres veces el tiempo en que es este sistema realiza cinco vueltas a partir del reposo, se calcula el tiempo promedio y se anota en la tabla I.

Tarea 2: Comprobación de que el momento de inercia del sistema de partículas (1a) es directamente proporcional al valor de las masas de las partículas.

Situé sobre la varilla un par de rodajas con masas iguales y equidistantes del eje de rotación.

Se repite el procedimiento de la tarea 1 y se anotan los resultados en la tabla 2.

Se repite el proceso anterior con otros 2 pares de masas manteniendo fija la distancia al eje de rotación.

Tarea 3: Comprobación de que el momento de inercia del sistema de partículas  $I_a$  es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de las partículas al eje de rotación.

El estudiante debe decidir cómo resolver esta tarea utilizando un par de cuerpos de masas iguales que se situaran a diferentes distancias proporcionalmente repartidas respecto al eje de rotación.

Se repite el proceso de medición del tiempo en que se realizan 5 vueltas en estas nuevas condiciones y se anota en la tabla 3.

## VIII. PROCESAMIENTO DE DATOS EXPERIMENTALES

### Tarea 1.

Con los datos de la tabla I y teniendo en cuenta la ecuación (5) se determina el momento de inercia del sistema sin las rodajas  $I_0$ .

**TABLA I.** Determinación de  $I_0$ . Unidades empleadas en la tabla:  $M$  (kg),  $T$  (promedio) (s),  $t^2$  ( $s^2$ ),  $b$  (m),  $G$  ( $ms^2$ ),  $I_0$  ( $10^{-3} kg m^2$ ).

$M$	$T$	$t^2$	$b$	$G$	$I_0$
0,20	9,78	95,65	0,01	9,80	2,9

### Tarea 2.

Con los datos de la tabla II se calcula el momento de inercia del sistema con las rodajas, como se conoce  $I_0$  se puede determinar el momento de inercia de cada uno de los pares de rodajas que se utilizaron por medio de la expresión.

$$I_m = I_{total} - I_0.$$

Datos:

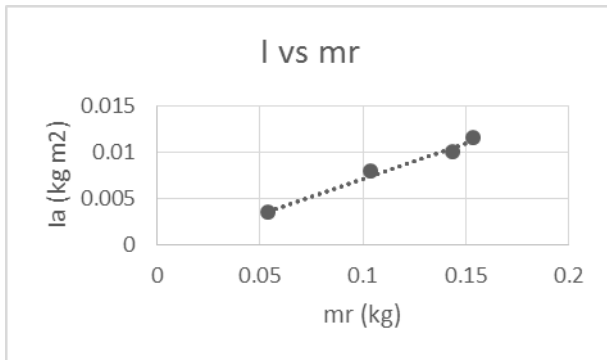
$$I_0 = 0,00298168 kg.m^2$$

$$b = 0,01 m$$

$$g = 9,8 m.s^2$$

**TABLA II.** Dependencia de  $I_a$  con la masa. Unidades empleadas en la tabla:  $m_r$  (kg),  $t$  (s),  $I_t$  ( $10^{-3} kg m^2$ ),  $I_a$  ( $10^{-3} kg m^2$ ).

$m_r$	$t$	$t^2$	$I_t$	$I_a$
0,054	14,3	204,49	6,8308	3,849119
0,104	18,7	349,69	10,67425	7,692568
0,144	20,4	416,16	13,62398	10,6423
0,154	21,5	462,25	14,41756	11,435883



**FIGURA 3.** Momento de inercia en función de la masa.

Donde se demuestra la linealidad de la dependencia entre el momento de inercia y las masas.

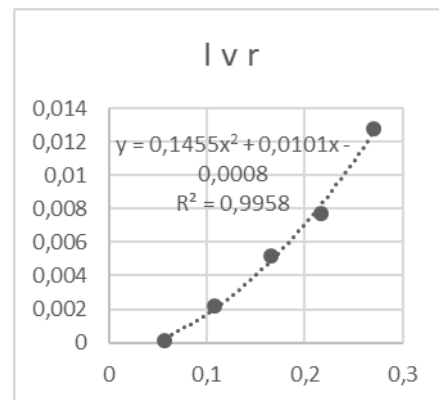
Se puede preguntar a los estudiantes por qué la línea no pasa por el origen como era de esperar, lo que permite profundizar en las limitaciones del modelo utilizado donde se despreciaron la masa de la poleas, hilo y fricción en las poleas. Exactitud en la determinación de la masa de las partículas por medio de la pendiente del gráfico.

Se pide al estudiante graficar los resultados de la tabla III, tanto para  $I$  en función de  $r$  como en forma lineal  $I$  en función de  $r^2$  así como las curvas de tendencia para cada gráfico y según los resultados obtenidos concluya sobre el grado de cumplimiento de la proporcionalidad entre momento de inercia del sistema y los valores de  $r^2$  y  $m$  de las rodajas.

**TABLA III.** Dependencia de  $I_a$  con la distancia al eje de rotación. Unidades empleadas en la tabla:  $r$  (m),  $t$  (s),  $I_t$  ( $10^{-3} kg m^2$ ),  $I_a = I_t - I_0$  ( $10^{-3} kg m^2$ ).

$r$	$t$	$t^2$	$I_t$	$I_a$
0,057	10,02	100,40	3,12992	0,14824
0,108	12,92	166,92	5,205152	2,22347
0,166	16,16	261,14	8,144253	5,16257
0,216	18,51	342,62	10,685793	7,70411
0,27	22,48	505,35	15,76205	12,78037

En las figuras 4 y 5 se puede apreciar, por parte del estudiante, la dependencia del Momento de Inercia con la distancia de las masas al eje de rotación.



**FIGURA 4.** Dependencia de  $I_a$  respecto a la distancia al eje.

Se solicita que por medio de la pendiente de la recta se calcule el valor de la masa de las rodajas y su error.

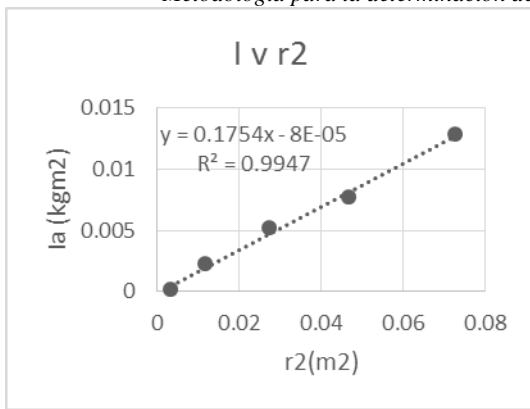


FIGURA 5. Dependencia lineal de  $I_a$  respecto a  $r^2$ .

## IX. CONCLUSIONES

El desarrollo del laboratorio de física como un problema de investigación empírica permite la utilización por parte del estudiantes de todos sus conocimientos teóricos sobre el tema a tratar así como el planteamiento de un modelo para su estudio experimental, asumiendo determinados parámetros que no se tendrán en cuenta durante el estudio, vinculando e integrando el laboratorio al sistema de enseñanza aprendizaje de la física y no como algo ajeno poco relacionado con la teoría y la solución de problemas. A través del procesamiento de los datos experimentales obtenidos el estudiante profundiza en los métodos estadísticos y el estudio de los errores cometidos.

El diseño experimental propuesto es sencillo y puede realizarse con el uso de un cronometro manual.

Se vincula el movimiento de traslación y rotación a través de la ligadura del hilo inextensible.

## REFERENCIAS

- [1] Enrique, C. M. & Alzugaray, G. E., *Modelo de Enseñanza-Aprendizaje para el Estudio de la Cinemática de un Volante Inercial usando Tecnologías de la Información y la Comunicación en un Laboratorio de Física*, Formación Universitaria **6**, 3-12 (2013).
- [2] Benitez, Y. & Mora, C., *Enseñanza tradicional vs aprendizaje activo para alumnos de ingeniería*, Revista Cubana de Física **27**, 175-179 (2010).
- [3] Arrieta, X. & Marín, N., *Las prácticas habituales de laboratorio de física y la transferencia de conocimiento*, Encuentro Educativo **13**, (2015).
- [4] Petrucci, D., Ure, J., & Salomone, H. D., *Cómo ven a los trabajos prácticos de laboratorio de física los estudiantes universitarios*, Revista de Enseñanza de la Física **19**, 7-19 (2011).
- [5] Manjarres, D. A., Herrera, W. J., & Diaz, R. A., *Work and energy in rotating systems*, American Journal of Physics **81**, 597-602 (2013).
- [6] Rodríguez, E. D., *Rotación y Traslación*, Monografía o trabajo universitario presentado en el evento Mathematics and Science Partnership: content, integration, and research to improve academic achievement 2011-2012, (Universidad Metropolitana, Puerto Rico, 2011).
- [7] Dieguez, M. F., Landrove, L. R., I. M. Puig; I. M., Sánchez, N. J., Sánchez, L. P. & Rodríguez, M. H., *Sistema de ejercicios para una práctica de laboratorio. Tema: Momento de inercia*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **9**, 1503 (2015).
- [8] Serway, R. A., Jewett, J. W., *Física para ciencias e ingeniería*, 7<sup>ma</sup> Ed. (México, Cengage Learning, 2005).