

Taller: La computadora en el Laboratorio



Héctor G. Riveros

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, C.P. 01000, Ciudad de México.

Email: riveros@fisica.unam.mx

(Received 28 May 2016, accepted 2 October 2016)

Resumen

La computadora se usa para buscar información, como procesador de palabras, también para resolver ecuaciones, simular experimentos y como instrumento de laboratorio. Estudiantes y profesores requieren información sobre cómo utilizar en sus actividades, este instrumento tan versátil. Para buscar información ya han aprendido a utilizar los diferentes exploradores de Internet. Para escribir reportes usan las varias versiones de procesadores, tales como Word. Para bases de datos suelen utilizar Excel para ajustar datos a modelos teóricos y para elaborar las gráficas necesarias. Para familiarizarse con un instrumento, se requiere haber leído su manual y utilizarlo en algún experimento o actividad, tales como: 1.- Dibujar las líneas de fuerza de un imán en el campo magnético terrestre, en la aproximación de dipolo puntual. El experimento requiere un imán, una brújula y papel. 2.- Medir el coeficiente de fricción de un proyectil liviano viajando por el aire. Una cámara de video y el programa Tracker sustituyen el uso de un estroboscopio para determinar la posición del proyectil. El experimento requiere una botella desechable de refresco, 30 cm de tubo de PVC de media pulgada, un acetato enrollado como proyectil y cinta engomada para sellarlo. Ver video <https://www.youtube.com/watch?v=wxmDhRqdOoY>, 3.- Construir un instrumento musical entonando 8 copas de vidrio. Con el agregado de distintas cantidades de agua se pueden cambiar las frecuencias de resonancia de las copas. Con el analizador de sonidos Audacity se pueden medir estas frecuencias. Ver video <https://www.youtube.com/watch?v=Fq6Oy6D2XS0>, 4.- Medir el tiempo de vuelo de los rebotes de una pelota. Grabando con el programa Audacity el sonido producido por una pelota al rebotar en el piso, se puede medir el tiempo de vuelo con una resolución de una diezmilésima de segundo o, incluso, hasta una millonésima, según la versión de Audacity.

Palabras clave: Física Educativa, modelación, ajuste de parámetros.

Abstract

The computer is used for search information, as processor's words, also to solve equations, simulate experiments and as instrument of laboratory. Students and teachers require information about how to use in their activities, this instrument so versatile. To search for information, they have learned to use different Internet browsers. To write reports using various versions of processors such as Word. For databases, they tend to use Excel to adjust data to theoretical models and to develop the necessary graphics. To familiarize with an instrument, is requires have read your manual and use it in some experiment or activity, such as: 1.-draw them lines of force of a magnet in the field magnetic land, in the approximation of dipole puntual. The experiment requires a magnet, a compass and paper. 2. Measuring the coefficient of friction of a projectile traveling by the air. A camera's video and the program Tracker replaced the use of a strobe to determine the position of the projectile. The experiment requires a disposable bottle of soda, 30 cm PVC pipe of half-inch, coiled acetate as projectile and gummed tape to seal it. See video <https://www.youtube.com/watch?v=wxmDhRqdOoY>, 3-build an instrument musical with 8 cups of glass. The frequencies of resonance of the cups can be changed by the addition of varying amounts of water. These frequencies can be measured with the Audacity sound Analyzer. See video <https://www.youtube.com/watch?v=Fq6Oy6D2XS0>, 4-time of flight of the bounce of a ball. Recording with the Audacity program the sound produced by a ball bouncing on the floor, you can measure the tempo of flying with a resolution up to 1 microsecond.

Keywords: Physics Education, modeling, adjustment of parameters.

PACS: 01.30.Kj, 01.30.L-, 01.30.M-

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En este documento plantaremos como utilizar una computadora como instrumento auxiliar en el Laboratorio de Física de una Universidad. Para hacer más interesante el taller, plantaremos algunas preguntas genéricas, para cada

uno de los 4 objetivos mencionados en el Resumen, que sirven como motivación para su aprendizaje.

II. ¿PARA QUE PODEMOS USAR UNA BRÚJULA?

Una brújula consiste de una aguja imantada a lo largo de su eje, suspendida de modo que puede moverse libremente en el plano horizontal; girando alrededor de una punta vertical que le sirve como soporte y eje de giro. Podemos usar como brújula cualquier imán horizontal, soportado de modo que pueda girar en su plano. La pregunta original de para qué podemos usar una brújula, la convertiremos en varias preguntas:

1. ¿Podemos determinar la dirección de la componente horizontal del campo magnético en que se encuentre la brújula?
2. ¿Podemos medir cambios en la magnitud del campo magnético en diferentes puntos del campo estudiado?
3. ¿Podemos trazar las líneas de fuerza del campo magnético de un imán colocado en el campo magnético terrestre? ¿Dependen de la orientación del imán respecto a los puntos cardinales? ¿Cómo se verán estas líneas de fuerza?

Respuestas

1. ¿Podemos determinar la dirección de la componente horizontal del campo magnético en que se encuentre la brújula?

Si, esa es la función para la que fue diseñada la brújula, debe moverse con el mínimo de fricción para que se oriente en la dirección norte-sur magnético. Debemos recordar que el polo sur magnético (cercano al polo norte geográfico) se mueve a lo largo de los años. Desde el año 1900 al 2000, paso de latitud 70° a 81° de latitud norte (Bol. SMF 19(2005)51-52). La brújula indica el norte, pero hay desviaciones locales respecto al norte geográfico. Conviene cierta fricción para que llegue a equilibrio, sin fricción oscilaría continuamente dificultando la lectura de la dirección.

2. ¿Podemos medir cambios en la magnitud del campo magnético en diferentes puntos del campo estudiado?

La brújula en un campo magnético constituye un péndulo de torsión, donde la torca τ la produce el campo magnético terrestre \mathbf{B} interaccionando con el momento dipolar \mathbf{M} de la brújula ($\tau = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$). La ecuación del movimiento angular está dada por:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \tau = MB \sin(\theta). \quad (1)$$

En donde I es el momento de inercia de la brújula y estamos despreciando la fricción. La ecuación (1) es idéntica a la del oscilador armónico en la aproximación de ángulos pequeños ($\sin(\theta) = \theta$), tomando a I como la masa m y a MB como la constante k del resorte del

oscilador armónico. El período T del movimiento está dado por:

$$T = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} = 2\pi \left(\frac{I}{MB} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Podemos decir que el período T es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del campo magnético B . Aunque no sepamos las magnitudes del momento de inercia I y del momento dipolar M , podemos comparar las magnitudes relativas de dos puntos del campo magnético en los que se haya medido el período de oscilación para ángulos pequeños.

Si usamos varios imanes de pastilla, formando un cilindro, que atrape un hilo en su parte media, tenemos una brújula con el momento de inercia de un cilindro girando alrededor de un eje perpendicular al cilindro. Si se mueve en el campo magnético terrestre de valor conocido, se puede usar el período de oscilación para medir el momento magnético M . Conociendo las constantes se puede usar el período de oscilación para medir campos magnéticos desconocidos. Siempre y cuando la torca debida a la torsión del hilo sea mucho menor que la torca magnética, lo que se logra usando un hilo suficientemente delgado.

3. ¿Podemos trazar las líneas de fuerza del campo magnético de un imán colocado en el campo magnético terrestre? ¿Dependen de la orientación del imán respecto a los puntos cardinales? ¿Cómo se verán las líneas de fuerza?

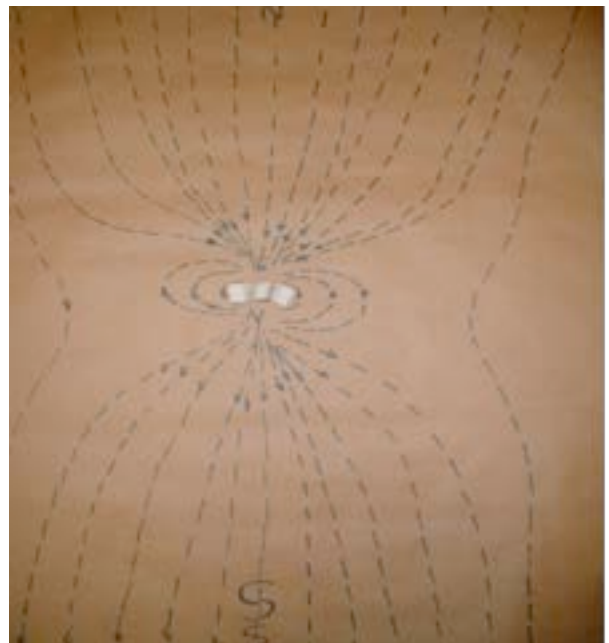


FIGURA 1. Líneas de fuerza trazadas con el polo sur del imán hacia el sur geográfico (norte magnético). Las líneas de fuerza terrestres son atraídas por el imán saliendo por su polo norte. Nótese que hay un círculo de campo cero en donde se cancela uno con el otro.

III. ¿QUÉ TIENEN EN COMÚN TARJETAS BANCARIAS, IMANES Y BRÚJULAS?

Lo que la brújula detecta es el campo magnético total, o sea, la suma del campo magnético del imán más el campo magnético terrestre. En un punto dado la brújula se alinea en la dirección del campo local. Colocando la brújula sobre un papel, podemos pintar un punto en el extremo de la brújula que apunta al norte; moviéndola hasta que su centro esté sobre el punto pintado anteriormente, podemos pintar un nuevo punto que esperamos esté sobre la misma línea de fuerza. Si la curvatura de la línea de fuerza es muy grande, se puede reducir la distancia recorrida por ella (a menos de media brújula).

La figura 1 muestra las líneas de fuerza obtenidas siguiendo el procedimiento anterior, con un imán colocado con el polo sur hacia arriba apuntando al polo sur geográfico que constituye un polo norte magnético. La atracción entre los polos opuestos se manifiesta en la atracción de las líneas de fuerza terrestres que entran por el polo norte del imán saliendo por su polo sur. El ancho del papel es de 89 cm, aunque el imán es fuerte, sus efectos no llegan demasiado lejos.

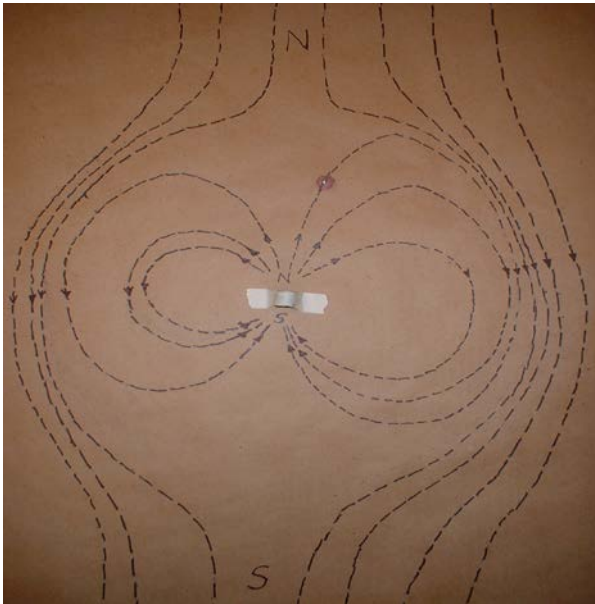


FIGURA 2. Líneas de fuerza del imán con su polo norte hacia el sur geográfico (norte magnético). En este caso la repulsión entre polos obliga a las líneas de fuerza del campo terrestre a desviarse. Nótese los dos puntos de campo cero sobre el eje de simetría.

La figura 2 muestra las líneas de fuerza obtenidas invirtiendo la polaridad del imán. El imán permanente repele a las líneas de fuerza del campo magnético terrestre, haciendo una especie de burbuja en donde están confinadas todas sus líneas de fuerza [1].

El campo magnético es un concepto que liga a los tres objetos, las tarjetas tienen una banda magnética, los imanes producen campos magnéticos y las brújulas detectan campos magnéticos. Las bandas magnéticas almacenan la información de la cuenta bancaria de su dueño, que puede ser dañada si se les acerca un imán. Los físicos solemos comprar imanes de cerámica y de neodimio, estos últimos tienen un magnetismo mayor que los de cerámica. Una brújula consiste de una aguja imantada a lo largo de su eje, suspendida de modo que puede moverse libremente en el plano horizontal; girando alrededor de una punta vertical que le sirve como soporte y eje de giro. Podemos usar como brújula cualquier imán horizontal, soportado de modo que pueda girar en su plano. Podemos preguntarnos ¿a qué distancia debo mantener separadas mis tarjetas bancarias de los imanes? Esto equivale a preguntar a qué campo magnético se borra mi tarjeta. Este valor no lo sabemos, pero si sabemos que el campo magnético terrestre no las borra. Esto nos lleva a la primera pregunta:

1. ¿Cómo puedo medir a que distancia el campo del imán es igual al campo magnético terrestre?

Esto sugiere preguntarnos como es el campo de un imán en el campo terrestre, la cual contestamos anteriormente, dibujando con ayuda de una brújula, los campos mostrados en la figura 3 para dos imanes cilíndricos de cerámica.

Pero para estudiantes de licenciatura, se puede usar que el campo magnético de un dipolo puntual de momento dipolar m , en coordenadas polares, está dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\mathbf{u}_r \cos(\theta) + \mathbf{u}_\theta \sin(\theta)), \quad (3)$$

que nos indica que el campo decae con el inverso del cubo de la distancia al imán.

En este caso, podemos hacer más preguntas:

1. ¿Cómo puedo medir a que distancia el campo del imán es igual al campo magnético terrestre?
2. ¿Podemos medir el momento dipolar de un imán?
3. ¿Podemos definir a partir de que distancia vale la aproximación de dipolo puntual?
4. ¿Podemos calcular el campo de un imán a favor del campo terrestre, en contra y a 90° ?

Respuestas

Si se tiene un medidor de campo magnético basta con medir, teniendo cuidado de que el campo terrestre no afecte la medida del imán. Pero también se puede medir con una brújula, si se coloca el imán de manera que su campo sea perpendicular al campo terrestre. Si colocamos un imán de pastilla con su eje en la dirección Este-Oeste, su campo magnético para puntos a lo largo del eje, apunta en la

Héctor G. Riveros

dirección Este-Oeste a 90° del campo magnético terrestre orientando en la dirección Sur-norte (el polo sur geográfico es un polo norte magnético). El campo total es la suma vectorial del campo terrestre B_t más el campo del imán B_i y la brújula gira un ángulo θ para indicar la dirección del campo total B , por lo que $\tan \theta = B_i/B_t$. Medir B_i/B_t requiere medir θ , o sea lo que se desvía la brújula de la orientación Norte-Sur.

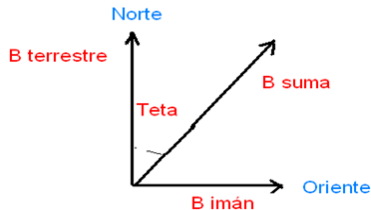


FIGURA 3. La tangente de Theta es el cociente de las magnitudes de los dos campos magnéticos presentes.

Cuando Theta sea de 45° , ambos campos son iguales y esa es la distancia buscada. La 5 muestra que esta distancia es de 8.6 cm para el imán de cerámica.



FIGURA 4. El ángulo Theta es de 45° para el imán de cerámica, quitando el imán la aguja apunta al norte.

Repetiendo el experimento con otros 5 imanes de neodimio, se encuentran las siguientes distancias para el ángulo Theta = 45° .

Imán	Distancia (cm)	Diámetro (mm)	Espesor (mm)
Cerámica	8,6	12	5
Neodimio1	13	12	3
Neodimio2	16	15	4
Neodimio3	30	25	9
Neodimio4	34	30	12

Estas distancias, al centro del imán, se midieron a lo largo del eje del cilindro magnético, para cuando la desviación de la brújula es de 45° .

2. ¿Podemos medir el momento dipolar de un imán?

Necesitamos medir como cambia el campo magnético con la distancia al imán, graficar los datos y ver si corresponden a un decaimiento inversamente proporcional a la distancia

al cubo. Para puntos a lo largo del eje el ángulo Theta vale 0 y usando la ecuación (3) podemos medir el momento dipolar. Usando datos medidos [2] usando una brújula y un Gaussmetro se construyó la figura 4.

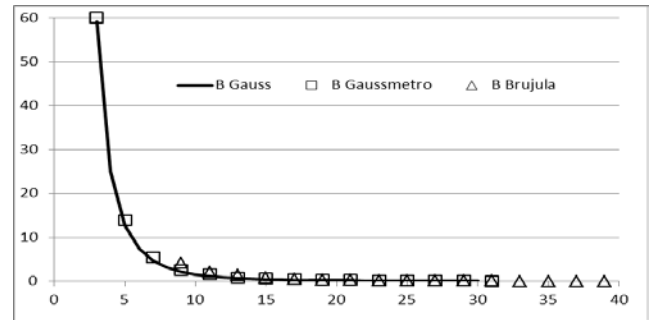


FIGURA 5. Campo magnético en Gauss a lo largo del eje del imán, distancias en cm. La línea es el campo teórico, ecuación (1), y los cuadros y triángulos son valores experimentales.

Para que la ecuación (3) pase por los puntos experimentales, el Momento Dipolar tiene el valor 0.78 Am^2 .

4. ¿Podemos definir a partir de que distancia vale la aproximación de dipolo puntual?

De la figura 4 el valor medido coincide con el calculado usando el Gaussmetro hasta 2 cm de distancia, y hasta 8 cm usando la brújula. El sensor del gaussmetro mide 3 mm y la brújula tiene un diámetro de 3 cm, para tener una buena resolución en grados. A distancias menores el campo magnético pasa a ser un campo uniforme en el interior del imán.

5. ¿Podemos calcular el campo de un imán a favor del campo terrestre, en contra y a 90° ?

Conociendo el Momento dipolar M del imán podemos calcular el campo magnético en cualquier punto en donde sea válida la aproximación de dipolo puntual, cerca del imán el campo es uniforme y podemos trazar líneas de campo calculando en Excel algunas líneas.

Calculamos para un punto (x,y) el valor del campo magnético $B = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$, podemos calcular un incremento en la dirección del campo Δs , con componentes Δx y Δy . Si el incremento en distancia es lo bastante pequeño, quedará sobre la línea deseada. En otras palabras, $\Delta x = \Delta s * B_x/B$ y $\Delta y = \Delta s * B_y/B$.

La figura 5 muestra el campo de un imán con momento dipolar = 0.325 Am^2 , orientado de manera que su campo repele al campo magnético terrestre, en un laboratorio en donde el campo terrestre mide 0.38 Gauss.

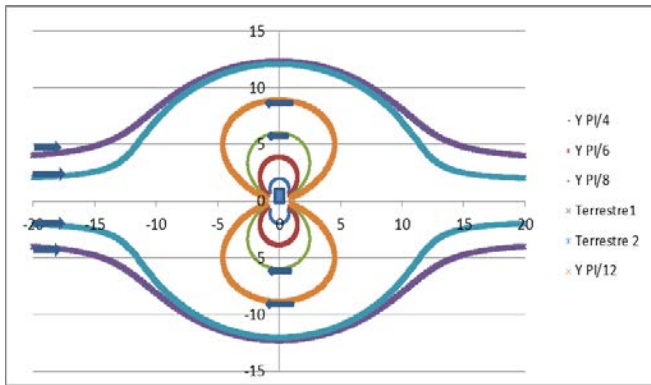


FIGURA 6. Campo magnético alrededor de un imán colocado en el campo magnético terrestre. Las líneas que salen del imán comienzan en un círculo de radio 1 cm en los ángulos medidos en radianes positivos y negativos. Los ejes X y Y están en cm.

La figura 6 muestra el campo de un imán que atrae al campo magnético terrestre, o sea, girado 180 grados del caso anterior. El eje del imán está orientado Norte-Sur. Solamente en la región muy cercana al imán domina su campo magnético.

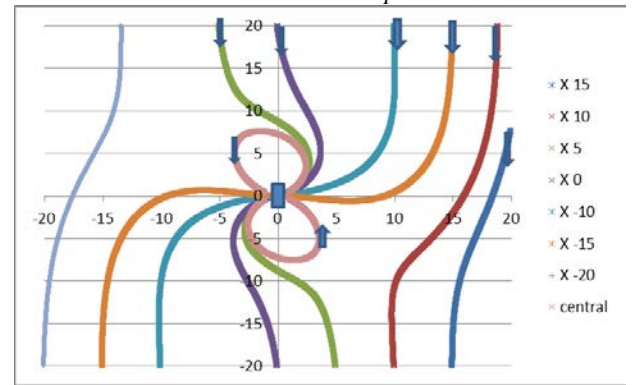


FIGURA 8. Imán orientado en la dirección este-oeste. Las líneas tienen $Y = -20$ para las X mostradas en la figura. La central comienza en el imán.

Las figuras reproducen las obtenidas con imanes y brújulas para dibujar el campo magnético combinado de los imanes y el campo magnético terrestre [2].

IV. ¿PODEMOS IMPULSAR UN COHETE APLASTANDO UNA BOTELLA DESECHABLE?

Usando una botella desechable de dos litros y 30 cm de tubo PVC de media pulgada para agua, puede ensamblarse un lanzador de un cohete; aprovechando que el tubo ajusta en la botella (insertando 2 cm). El cohete se construye con un acetato o plástico flexible con el área de una hoja tamaño carta, enrollada sobre el tubo de PVC formando un tubo de 28 cm de largo y que puede cerrarse con una tapa de pegamento Pritt. Para que no se desenrolle puede pegarse con cinta canela o gris. Para dispararlo es necesario sentarse, colocar la botella entre las rodillas, sujetarla en posición vertical y cerrar con la máxima rapidez las rodillas para que adquiera una velocidad vertical. El tiempo de vuelo es una medida de la velocidad inicial con que sale despedido el cohete. Es un juguete que suele gustar a los espectadores.

Preguntas

1. ¿Puede dispararse con las manos o con el pie?
2. ¿Podemos calcular el movimiento del cohete?
Masa = 15 gr.
3. ¿Influye la fricción con el aire?
4. ¿Podemos medir con cámara de video de 30 cuadros/segundo?
5. ¿Qué podemos medir a 420 cuadros/segundo?

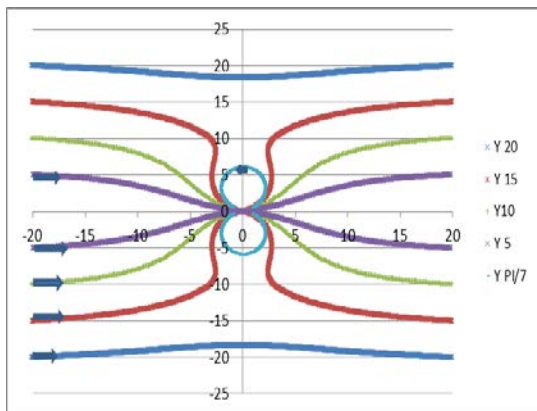


FIGURA 7. El imán atrae al campo terrestre. Las líneas empiezan en el borde izquierdo a las distancias Y marcadas positivas y negativas. La línea que comienza en el imán empieza a un ángulo $\text{Pi}/7$ positivo y negativo.

Si colocamos el imán con su eje orientado en la dirección este-oeste, obtenemos un campo completamente diferente, mostrado en la figura 7.



FIGURA 9. Botella desechable con tubo de PVC y cohete color naranja.

Respuestas

1. ¿Puede dispararse con las manos o con el pie? Se puede, pero con las manos no se obtiene tanta velocidad como con las rodillas. Aplastándolo con el pie, se requiere un soporte de madera y un ángulo de PVC de 90° para no perder el control sobre el ángulo de disparo y no lastimar o dañar algo.
2. ¿Podemos calcular el movimiento del cohete? El modelo más sencillo es tiro parabólico, limitado a la vertical. Esto es despreciando la fricción con el aire, de un objeto largo (0.28 m) y de poca masa (0.015 kg). El siguiente modelo sería meter una fricción con el aire proporcional al cuadrado de la velocidad. Con un tiempo de vuelo de 2.8 segundos, la altura máxima es menor a 9.6 m.
3. ¿Influye la fricción con el aire? Dada la poca masa del cohete podemos esperar que la fricción sea notoria, llegando a caer con velocidad terminal. Para determinar esto es necesario muchos datos de altura contra tiempo. Es posible obtenerlos con una cámara de video, a 30 cuadros/segundo.
4. ¿Podemos medir con una cámara a 30 cuadros/segundo? En youtube.com/ifunam se encuentra un video con la filmación del cohete. Midiendo la altura cuadro a cuadro usando Windows Movie Maker se pueden obtener datos cada 1/15 segundos, ya que el programa se salta un cuadro cada vez. La hora que marca es la correcta. Para la escala vertical se pueden usar los 0.28 m del cohete o el 1.38 m de mi pelo al suelo (sentado en la banca). La figura 10 muestra la altura como función del tiempo.

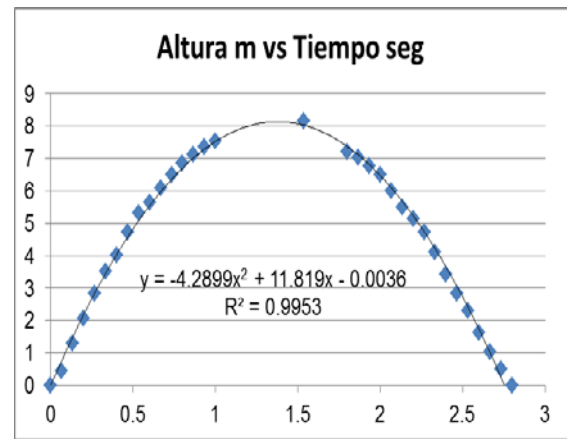


FIGURA 10. Los datos del video se pueden ajustar a una parábola en el tiempo.

De la ecuación en la figura podríamos deducir que en este ejemplo la fricción introdujo una fuerza constante, que redujo la aceleración de la gravedad de 9.78 a 8.58 m/s², valor calculado derivando dos veces la expresión para y. *Esta interpretación es falsa, la fricción con el aire no reduce la aceleración de la gravedad.* Los 5 primeros puntos definen una recta con pendiente $m = 11.6 \text{ m/s}$ (velocidad inicial) y los últimos 7 puntos quedan sobre otra recta de pendiente $m = 8.68 \text{ m/s}$ (velocidad final). Este resultado podría interpretarse como que se llegó a velocidad terminal, cuando el peso iguala a la fuerza de fricción. *Demostraremos que todavía no se llega a la velocidad terminal.* Pero si ajustamos un polinomio cúbico, también se encuentra acuerdo con los datos experimentales, con un coeficiente R^2 ligeramente mejor.

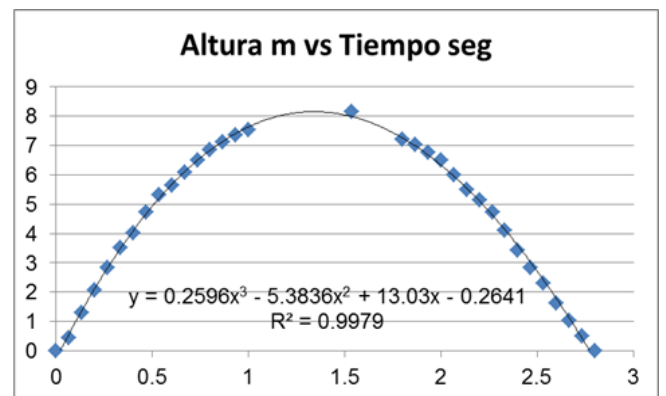


FIGURA 11. El ajuste de un polinomio cúbico es ligeramente mejor.

La aceleración derivada es $d^2y/dt^2 = 1.56t - 10.76$ en donde la fricción cambia con el tiempo, dado que la aceleración debida a la gravedad g es constante. De acuerdo con esta ecuación la aceleración inicial es -10.76 cambiando a -6.54 a 2.7 segundos. Realmente lo que habría que ajustar es un cálculo numérico de la ecuación de movimiento con

fricción proporcional al cuadrado de su velocidad. Realizando el ajuste no pasa por todos los puntos experimentales de la parte de caída, como muestra la figura 12. La fricción F con el aire se calcula con:

$F = \rho C_d A v^2 / 2 = b v^2$, en donde $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del aire en el Distrito Federal, C_d es el coeficiente aerodinámico que toma en cuenta la forma del objeto (para coche - 0.27 a 0.45), A es el área que presenta al fluido y b es el producto de las constantes.

Podemos resolver numéricamente la ecuación de movimiento en el aire, conociendo la velocidad y posición inicial del cohete. Dicha ecuación es: $m(d^2y/dt^2) = b(dy/dt)^2$ o $mg = ma$ que permite calcular la aceleración a conociendo la velocidad v y la posición y iniciales, escogiendo un incremento de tiempo Δt se calcula el incremento en velocidad $\Delta v = a \Delta t$, conociendo la velocidad media en el intervalo se calcula la nueva posición; repitiendo el proceso con Excel se obtiene la altura en función del tiempo. La figura 12 muestra el mejor ajuste obtenido con $m = 0.015 \text{ kg}$, $b/m = 0.005 \text{ m}^{-1}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, para $t = 0$, velocidad = 13 m/s y altura = 0.

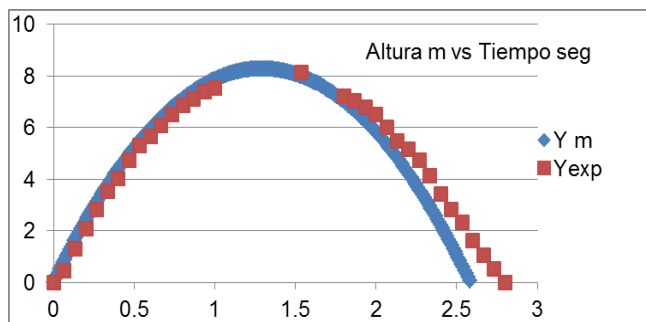


FIGURA 12. Ajuste numérico de la altura Y en metros comparado con los valores experimentales contra el tiempo en segundos.

Se pudo ajustar la rama de subida, pero no la bajada. Observando nuevamente el video del ifunam [6] se nota que el cohete sube vertical pero en la caída su posición es bastante horizontal. Su área al fluido es $= \pi r^2 = 0.000314 \text{ m}^2$ en la subida, pero cambia hasta = Largo x Diámetro = 0.0056 m^2 si llegara a ser completamente horizontal. La figura 13 muestra el ajuste obtenido al cambiar $b/m = 0.11 \text{ m}^{-1}$ al llegar a su altura máxima, tomando en cuenta el cambio en la orientación del cohete.

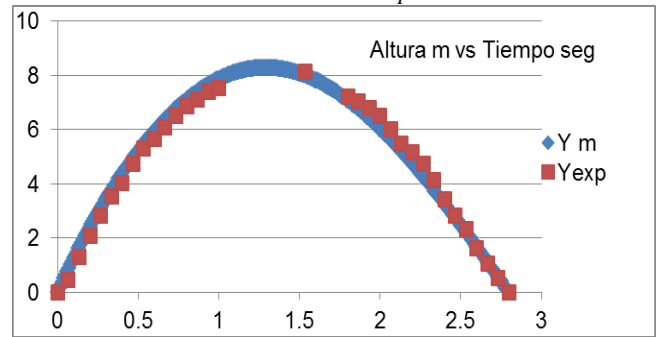


FIGURA 13. Ajuste numérico cambiando $b/m = 0.11 \text{ m}^{-1}$ al llegar a la altura máxima para tomar en cuenta que el cohete cae bastante horizontal.

La velocidad inicial para el ajuste es 13 m/s , pero la calculada usando los primeros 5 puntos es de 11.6 m/s , pero este valor es el promedio temporal de 0 a 0.33 segundos. La velocidad para 0.33 segundos del cálculo numérico es 9.6 m/s , que promediada con 13 m/s , nos da 11.3 m/s . La velocidad inicial no se puede calcular usando los primeros 5 puntos. La velocidad calculada usando los últimos 7 puntos es 8.68 m/s y la del cálculo numérico es 8.6 m/s , siendo ambos valores aceptables. En el cálculo numérico la aceleración inicial es 10.6 m/s^2 y la aceleración final es -1.6 m/s^2 indicando que todavía no se llega a velocidad terminal, aunque la velocidad parezca constante, ¡Cualquier curva en un intervalo corto es una recta! La velocidad terminal calculada, usando $b/m = 0.11$ es de 9.5 m/s . Asumiendo $C_d = 1$, calculando b/m subiendo verticalmente = 0.010 m^{-1} , su valor ajustado numéricamente = 0.005 m^{-1} indicándonos $C_d = 0.5$. En la bajada, con área al flujo máxima = 0.019 m^2 , el valor ajustado es 0.11 m^{-1} , que nos da un $C_d = 0.6$. El cambio en el coeficiente b/m debido al área es cercano a 19, pero el cambio en el ajuste es de 22. Falta tomar en cuenta el cambio en el coeficiente C_d . Con el video leído a 1/15 segundos se observa un solo punto dentro del tubo, lo que no permite medir la aceleración mientras se mueve en el tubo de disparo. Midiendo a 420 cuadros/segundo se obtuvieron más puntos. 5.- ¿Qué podemos medir a 420 cuadros/segundo?

La figura 14 muestra las alturas medidas con los primeros 8 puntos, con el cohete moviéndose en el tubo de disparo.

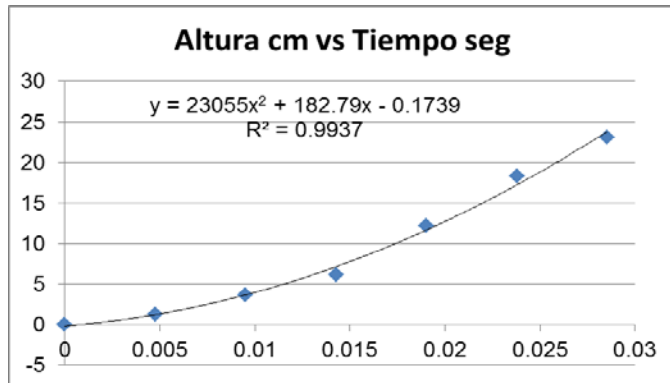


FIGURA 14. Altura contra tiempo (segundos) para el movimiento inicial del cohete a 420 cuadros/segundo.

El ajuste de una ecuación de segundo grado nos indica que la presión se puede considerar constante durante el lanzamiento, y derivando dos veces la altura y se obtiene el valor de la aceleración = 461 m/s^2 . Graficando los siguientes 6 puntos, ya volando fuera del tubo de PVC, se obtiene una línea recta con una velocidad de 10.6 m/s .

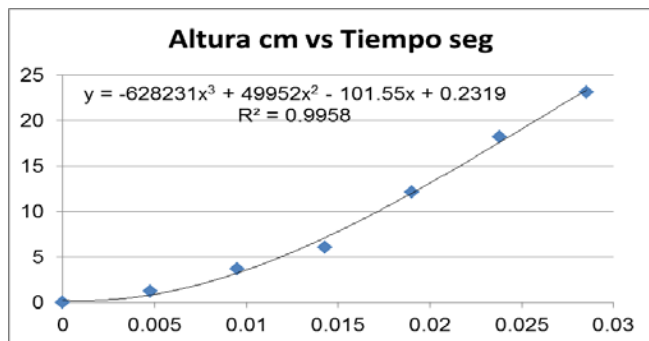


FIGURA 15. Ajuste de una ecuación cúbica para la aceleración dentro del tubo, del cohete de aire a 420 cuadros/s.

Ajustando una ecuación cúbica, se obtiene una constante R^2 ligeramente mayor. Calculando la aceleración A como segunda derivada: $A = -3769386 x + 99904$, con una aceleración que decrece rápidamente en el tiempo.

El ajuste cuadrático de la figura 14 implica una constancia en la aceleración y por lo tanto en la Presión en la botella que impulsa al cohete. La figura 16 muestra el acuerdo entre el cálculo numérico con una Presión de 22500 N/m^2 y un corrimiento de 0.003 segundos en el inicio del cálculo, dentro de la incertidumbre en el disparo de la película. La aceleración numérica cambia de 461 a 460 m/s^2 al final del intervalo, debido al crecimiento de la fricción con el aire. El acuerdo es excelente con la aceleración de 461 m/s^2 de la figura 14. Esta aceleración numérica es muy diferente a la calculada en la figura 15. La velocidad final calculada de 16.1 m/s esta en excelente acuerdo con los 16 m/s ajustados como valor inicial para la figura 17.

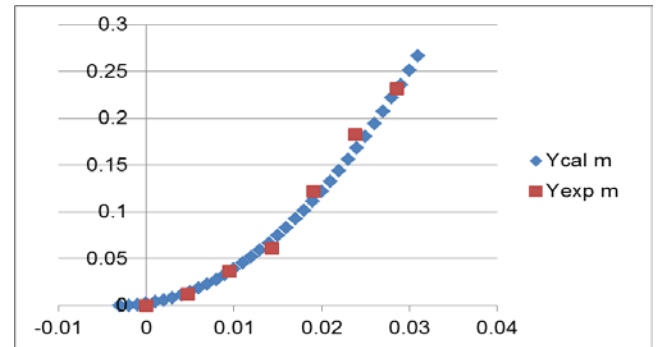


FIGURA 16. Alturas calculadas numéricamente y valores experimentales del video.

La presión calculada de 22500 N/m^2 se suma a la presión atmosférica en el DF de 76000 N/m^2 para darnos la presión interior de la botella al comprimirla de 2 Lt a 1.54 Lt, de acuerdo a la Ley del Gas ideal. Este valor es razonable viendo el video cuadro por cuadro.

Haciendo el ajuste numérico para todos los datos medidos, se obtiene la figura 17, en donde la velocidad inicial es 16 m/s , $b/m = 0.007 \text{ m}^{-1}$ inicialmente y cambia a 0.21 m^{-1} al llegar a la altura máxima. El incremento en el tiempo $\Delta t = 0.01$ segundos.

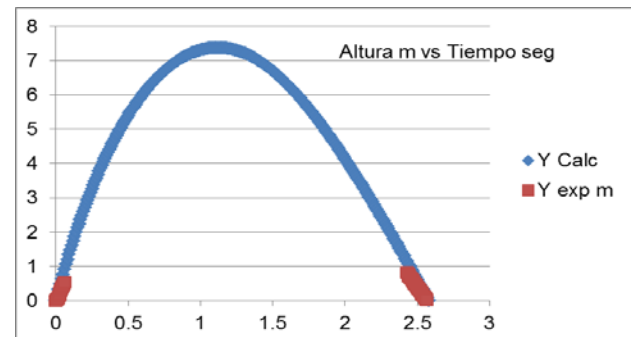


FIGURA 17. Alturas experimentales y calculadas para el video a 420 cuadros/s.

Agregando unas alitas de “masking tape” en la parte baja del cohete, se logra que suba y baje verticalmente, con lo que se puede usar un solo coeficiente de fricción en el ajuste numérico. Vel. inicial = 15 m/s , $b/m = 0.06 \text{ m}^{-1}$ $m = 0.0168 \text{ kg}$ y $\Delta t = 0.01$ segundos.

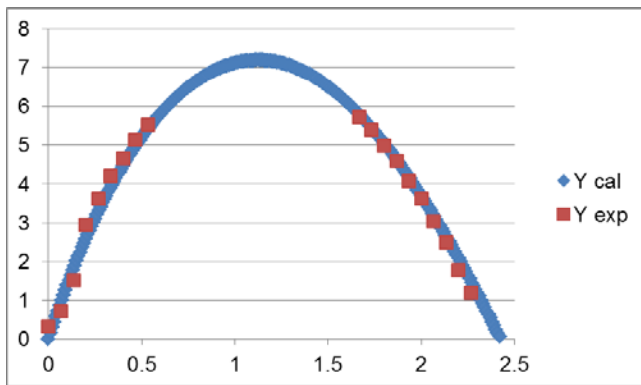


FIGURA 18. Solución numérica de la ecuación de movimiento para cohete con alas en la base para que suba y baje vertical, con un solo coeficiente de fricción.

Resumiendo, la mejor interpretación de las alturas contra tiempo de un objeto con fricción con el aire, requiere de una solución numérica de la ecuación de movimiento.

V. ¿CÓMO ES EL SONIDO EN COPAS, VASOS Y BOTELLAS DE VIDRIO?

Cuando golpeamos una copa, un vaso o una botella producimos un sonido característico, que es una combinación de las frecuencias que tienen sus modos normales de oscilación. Un modo normal es una frecuencia de resonancia para el objeto, excitándola a estas frecuencias se obtiene un máximo en la intensidad de su movimiento; resultado del equilibrio entre la potencia de excitación y la potencia disipada en las fricciones existentes. Casi todos hemos frotado con un dedo humedecido, el borde de una copa, de vidrio delgado, para hacerla resonar si la fricción es la adecuada. Diferentes personas tardan diferentes tiempos en lograr la resonancia. En Internet (buscando glass harp) existen varios videos mostrando canciones mediante copas. Pero surgen varias preguntas:

1. ¿Cómo es el sonido de copas, vasos y botellas?
2. ¿Copas iguales, suenan igual?
3. ¿En que difiere el sonido producido frotando o golpeando a una copa?
4. ¿Por qué cambia el tono de una copa, al agregarle agua?
5. ¿Qué tanto se puede cambiar el tono de copas y vasos?

Respuestas

1. Cómo es el sonido de copas, vasos y botellas. Podemos considerar a la copa como formada por placas de vidrio dobladas, o sea que tienen modos normales de oscilación, que se pueden excitar por fricción o golpes. Si el espesor es el mismo, los tonos de menor frecuencia corresponden a las copas más grandes y más agudos a las más

Taller: La computadora en el laboratorio
pequeñas. Las copas gruesas emiten frecuencias mayores. Mientras más delgada el sonido es más agradable. Las botellas son de vidrio grueso y su frecuencia fundamental es alta. El editor de sonidos Audacity permite analizar el espectro de los sonidos. La figura 19 muestra algunos resultados.

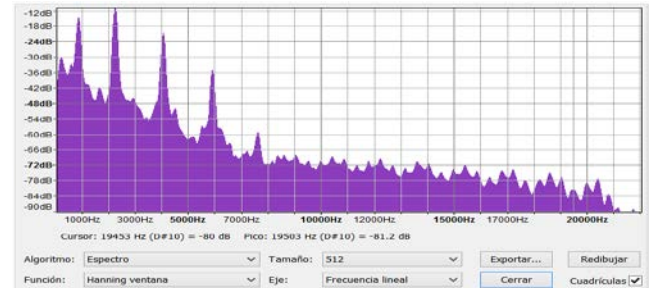


FIGURA 19. Espectro de copa delgada grande.

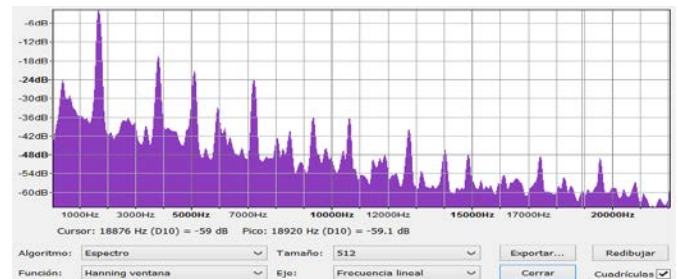


FIGURA 20. Espectro de vaso delgado.

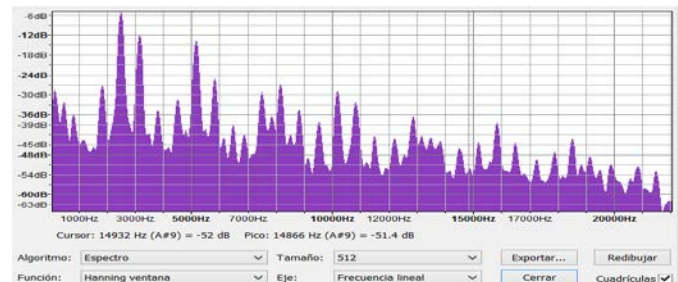


FIGURA 21. Espectro de botella sin etiqueta.

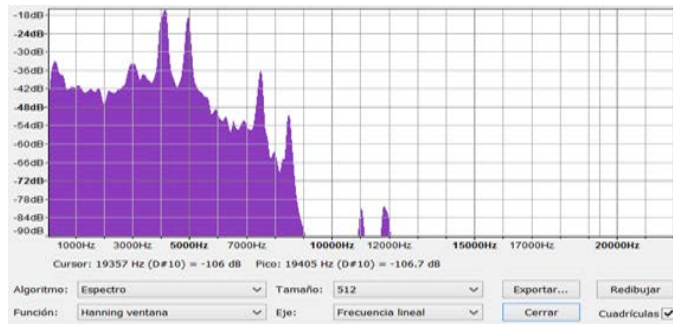


FIGURA 22. Espectro de botella de vidrio grueso con su etiqueta.

El contenido armónico hace agradable el sonido de los vidrios delgados y el grueso de las botellas las hace de frecuencias mayores. La etiqueta arruina la calidad del sonido.

2. Copas iguales suenan igual. - Tomando cinco copas para coñac grandes, se midieron las siguientes frecuencias para el primer pico obtenido en el análisis de Fourier hecho con el programa Audacity: 842, 880, 883, 907 y 960 Hz. Notamos que la segunda copa ya esta entonada para la nota La (880 Hz) y que la variación entre copas es relativamente grande para propósitos musicales. Las copas utilizadas tienen forma esférica (coñac) y miden 66 mm de diámetro en la boca, 100 máximo diámetro y 100 mm de profundidad.
3. En que difiere el sonido producido frotando o golpeando a una copa. - Grabando con Audacity ambos sonidos (figura 20), se observa que el sonido producido golpeando con una regla de madera, presenta un decaimiento exponencial de la intensidad con el tiempo, asociado a la disipación de la energía de un movimiento armónico, mostrado en el renglón inferior. En cambio, el sonido producido por fricción presenta cambios en la intensidad, asociados a cambios en la fuerza de fricción con el dedo utilizado, mostrado en el renglón superior. También se nota que al dedo le toma cierto tiempo lograr la emisión de sonido, el paquete de 2 máximos fue el utilizado para realizar el análisis de Fourier de las frecuencias emitidas.

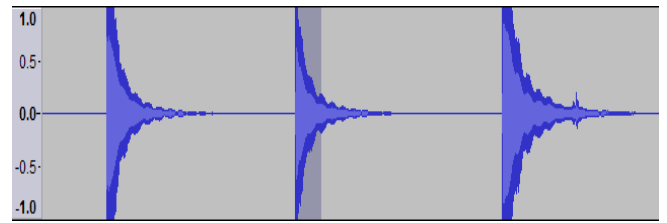


FIGURA 23. Grabación del Sonido emitido al frotar la copa vacía en el renglón superior y el renglón inferior muestra el caso de la copa vacía golpeada con regla de madera. La zona sombreada se usó para el análisis de Fourier con 893 Hz como frecuencia fundamental.

La figura 24 muestra el análisis de las frecuencias (Fourier) emitidas por la copa vacía, golpeada con regla de madera o frotada con dedo humedecido hasta lograr la resonancia (paquete de 2 máximos). Se observa que la frecuencia fundamental es la misma, pero cambia el timbre del sonido emitido, o sea, su contenido armónico.

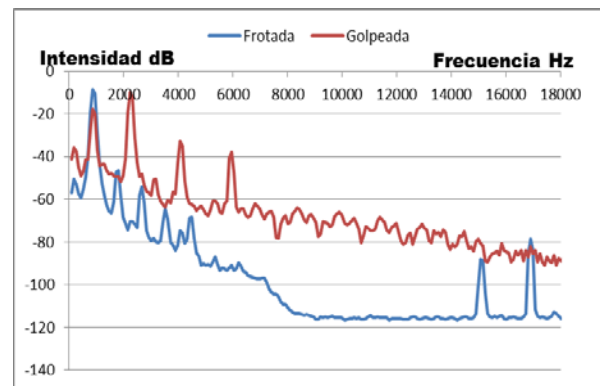


FIGURA 24. Análisis de Fourier, el tono fundamental (893 Hz) es el mismo para la copa vacía golpeada o frotada, pero cambia el contenido armónico, o sea, el timbre del sonido.

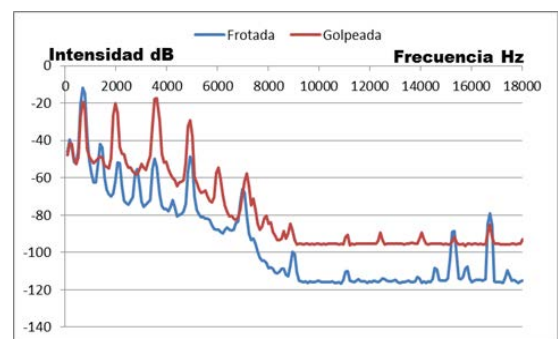


FIGURA 25. Análisis de Fourier, el tono fundamental (714 Hz) es el mismo para la copa con agua, ya sea frotada o golpeada.

La frecuencia fundamental de las copas vacías o con agua, es la misma ya sea frotando o golpeando, aunque cambia el contenido armónico (timbre) del sonido.

4. Por qué cambia el tono de una copa, al agregarle agua.- Esto depende de que consideremos cual es el efecto del agua en los modos de vibración de las paredes de la copa. Si el agua impide la vibración de la parte sumergida de las paredes, equivale a tener superficies vibrando con menos área y la frecuencia debe subir. Si el agua incrementa la masa efectiva de las partes sumergidas entonces la frecuencia de oscilación debe disminuir. Lo que se observa es que la frecuencia disminuye y el efecto del agua es incrementar la masa efectiva de las partes vibrando, no impide la vibración de las partes sumergidas.

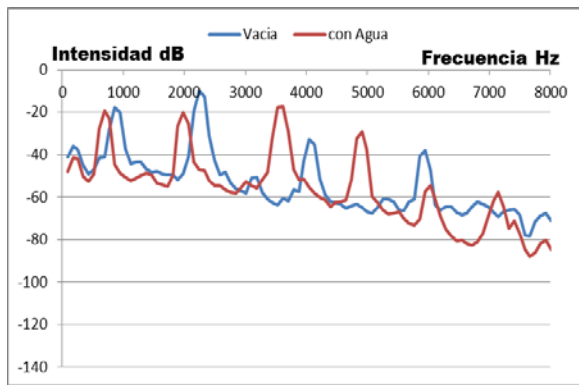


FIGURA 26. Cambio en las frecuencias del sonido medidas con la copa de coñac vacía y llena al 75% con agua.

En la figura 26 se observa que baja la frecuencia fundamental, y cambian las frecuencias mayores, cambiando el timbre del sonido emitido. También se nota una mayor intensidad en las frecuencias mayores asociadas a un decaimiento más rápido de la intensidad del sonido

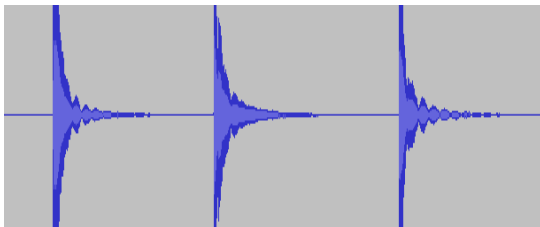


FIGURA 27.8. El decaimiento del sonido en la copa con 75% de agua se nota que decae más rápido que vacía, como se observa en la figura 23.

5. Qué tanto se puede cambiar el tono de copas y vasos.-Para medir este cambio se llenaron copas de vino y de coñac, con diferentes fracciones de agua de su volumen total y se obtuvieron las curvas de la figura 24. Se nota que las curvas son muy parecidas y que la frecuencia mínima es cercana a 2/3 de la frecuencia máxima. Llenando la copa

más del 90 % reduce mucho la intensidad del sonido emitido e incrementa el contenido armónico, con sonidos poco agradables. La copa de vino mide 70 mm de diámetro en la boca, 78 mm máximo diámetro y 76 mm de profundidad.

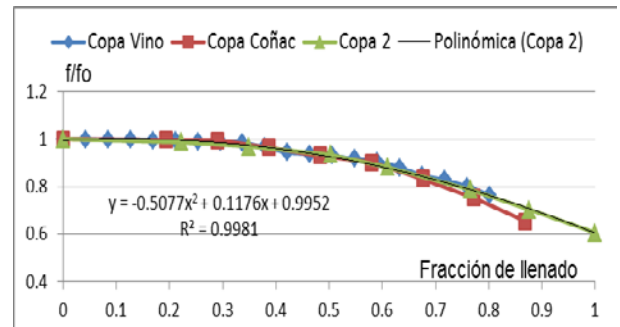


FIGURA 28. Cociente de la frecuencia f entre la frecuencia con la copa vacía f_0 , medidas con el programa Audacity, con copas con diferentes cantidades de agua. La frecuencia disminuye rápidamente para copas llenas más del 40%.

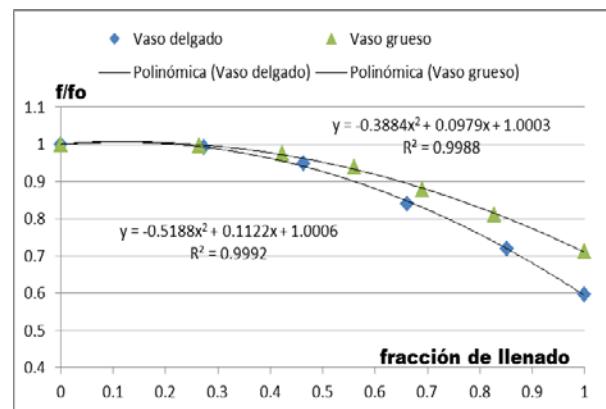


FIGURA 29. Cociente de la frecuencia f entre la frecuencia con el vaso vacío f_0 , medidas con el programa Audacity, con vasos con diferentes cantidades de agua.

La frecuencia disminuye rápidamente para vasos llenos más del 40 %. La frecuencia f_0 es mayor mientras más gruesa es la pared del vaso.

TABLA I. Frecuencias medidas para vasos con diferente espesor de la pared, mientras más grueso es el vaso es mayor la frecuencia fundamental.

Vasos grueso mm	fo Hz	Diámetro mm	Altura mm
1	1697	62	105
2	2088	80	120
3	2694	58	125
4	3143	65	88
4	2764	73	111
4	2753	73	111
4	3256	72	101

Comparando con las frecuencias de las notas de la escala musical, podemos estimar la cantidad de agua necesaria para obtener la nota deseada, conociendo la frecuencia fo sin agua para cada copa. El sonido se oye mejor mientras menos agua tenga la copa, o sea que el primer paso es medir las frecuencias naturales de las copas vacías, si queremos tener un instrumento de copas [4].

TABLA II. Frecuencias de las notas musicales

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
261	294	330	349	392	440	494
522	588	660	698	784	880	988
1044	1176	1320	1396	1568	1760	1976
2088	2352	2640	2792	3136	3520	3952

VI. ¿PODEMOS APROVECHAR LOS ANALIZADORES DE SONIDOS?

Un analizador de sonido es un dispositivo que por medio de un micrófono graba el sonido, midiendo su volumen en decibeles a una cierta frecuencia de muestreo. La computadora es una herramienta de laboratorio, requiere transductores que midan las variables de interés, en este caso un micrófono. Audacity es el nombre de un editor y grabador digital de sonido gratuito que se puede bajar del sitio //audacity.sourceforge.net. Puede leer la amplitud de la onda sonora con resolución de 12, 16 o 32 bits, con frecuencias de muestreo de 8 a 96 kHz.. Esto significa que el intervalo de muestreo más pequeño posible es de aproximadamente 10 μs (para una frecuencia de 100 kHz). Un sonido grabado se convierte en una gráfica de volumen contra tiempo. Con el cursor de la computadora se pueden leer tiempos en microsegundos, ya que interpola entre lecturas, o sea que podemos medir tiempos de eventos sonoros con precisión de microsegundos. Marcando una región del sonido grabado, se proporciona el análisis en frecuencia de dicha región. Pero, si no soy experto en sonido ¿Cómo puedo usar Audacity?

Puede servir en muchos experimentos, pero pensemos en tres:

- 1.- ¿Puede medirse la velocidad del sonido en una varilla de aluminio? Si la soportamos por su centro de masa, y le damos un golpe en un extremo para excitar ondas longitudinales de presión, oímos que se produce un sonido que cambia un poco de frecuencia, y su intensidad disminuye lentamente con el tiempo.
- 2.- ¿Puede medirse con precisión la frecuencia de un estroboscopio?
- 3.- ¿Puede medirse la disipación de energía en el rebote de una pelota?

Respuestas

1. ¿Puede medirse la velocidad del sonido en una varilla de aluminio?

Haciendo el experimento con una varilla de aluminio de ½ pulgada de diámetro y 1.216 m de longitud, obtuvimos que la intensidad del sonido del modo fundamental bajo 15 decibeles en 30 segundos. Haciendo un análisis en frecuencias en un intervalo de 2 segundos cercanos al golpe (inicial) y 30 segundos después (2 segundos al final) se obtuvo la figura 30.

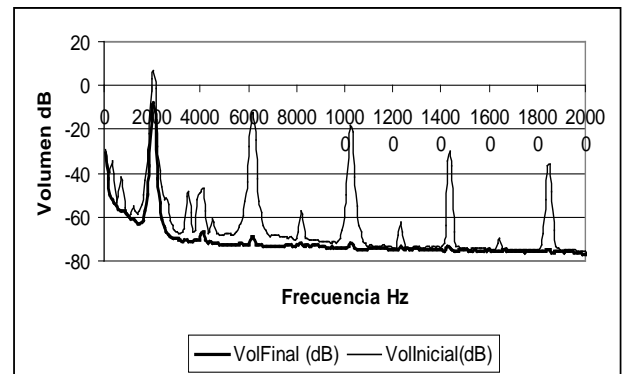


FIGURA 30. Análisis en frecuencia del sonido de la varilla inicialmente y transcurridos 30 segundos. Para este tiempo la varilla vibra en su modo fundamental, las otras frecuencias se amortiguan más rápidamente.

La figura 30 se obtuvo marcando un segundo en la zona inicial de la grabación (después del golpe) y pidiendo el análisis de frecuencias al programa Audacity. Observamos que los modos 3°, 5°, 7° y 9° fueron más excitados por el golpe en el extremo que los otros modos de resonancia de la varilla (Volumen Inicial). Después de 30 segundos la varilla equivale a un diapasón, tiene una sola frecuencia. Marcando un segundo en la parte final y pidiendo el análisis de frecuencias se obtuvo la curva de Volumen Final con una sola frecuencia remanente. Usando el cursor en la pantalla de Audacity mostrando el análisis de frecuencias podemos leer a 2060 Hz como el modo fundamental, 4108 Hz como el 2°, 6160 como el 3° pudiendo leer hasta el 9° modo. La pantalla normal nos muestra la onda medida como función del tiempo. Si amplificamos el tiempo

alrededor de los 30 segundos podemos medir el tiempo de 10 oscilaciones consecutivas para obtener valores de la frecuencia promedio en el intervalo. Calculando varias veces para estimar la incertidumbre se obtiene una frecuencia fundamental de $2057 \pm 10 \text{ Hz}$, que coincide con los 2060 dado por el análisis de frecuencia. Suponiendo que el modo fundamental hace que la longitud de onda sobre 2 ($\lambda/2$) sea igual a la longitud de la varilla se obtiene una velocidad de propagación (onda longitudinal) de $5003 \pm 25 \text{ m/s}$. Podemos comparar este valor con el de 5000 m/s reportado para varillas delgadas de aluminio en el Handbook of Physics and Chemistry publicado por Rubber Company.

A un diapason le pedimos intensidad y frecuencia constante, lo que se obtiene con las varillas de aluminio. Las varillas largas tienen bajas frecuencias de resonancia ($\text{Longitud} = \lambda/2$). Mientras más gruesa es la varilla más tiempo tarda en disipar la energía sonora almacenada durante el golpe inicial. Experimentalmente las varillas de latón, cobre y hierro amortiguan el sonido más rápido que las de aluminio.

2.- ¿Puede medirse con precisión la frecuencia de un estroboscopio?

Una lámpara estroboscópica tiene un par de electrodos y un gas a baja presión, cuando se produce una descarga eléctrica que ionice el gas contenido, se emite un pulso de luz de muy corta duración. Esta descarga eléctrica produce un pulso de sonido, el cual se puede detectar con un micrófono para medir su frecuencia promedio como el promedio de varios intervalos, como en el caso de la varilla de aluminio.

3.- ¿Puede medirse la disipación de energía en el rebote de una pelota?

Las pelotas al rebotar producen un sonido cada vez que chocan con el piso. Midiendo el instante en que empieza el pulso sonoro asociado al choque con el piso, se puede medir la duración de cada rebote (si se desprecia el tiempo que dura la pelota en contacto con el piso). Si no hay desplazamiento lateral durante los rebotes, el tiempo de vuelo es dos veces el de la caída libre equivalente. Para caída libre $x = gt^2/2$, si llamamos A a la altura máxima alcanzada y T a la duración del vuelo, entonces $t = T/2$ y $A = gT^2/8$.

Podemos medir con el cursor en la pantalla normal de Audacity el tiempo de inicio de cada rebote y escribirlos en una columna en una tabla de Excel. Calculando la diferencia entre dos tiempos consecutivos, obtenemos una segunda columna con los tiempos de vuelo T . En la tercera columna podemos calcular $A = gT^2/8$ que nos calcula la altura despreciando la fricción con el aire (que ya hemos encontrado despreciable con medidores de posición o cámaras de video). Dado que la energía potencial máxima se tiene al máximo de altura y es igual a la energía total, si calculamos el cociente A_2/A_1 obtenemos la razón de la energía antes y después de cada choque, lo que nos indica la cantidad de energía disipada en cada rebote.

Midiendo con una pelota de plástico duro hueca se obtuvieron los datos de la figura 31 en donde se observa la disminución en la altura en 39 rebotes consecutivos. Los cambios en altura muestran poco ruido o desviaciones de la curva suave que los une.

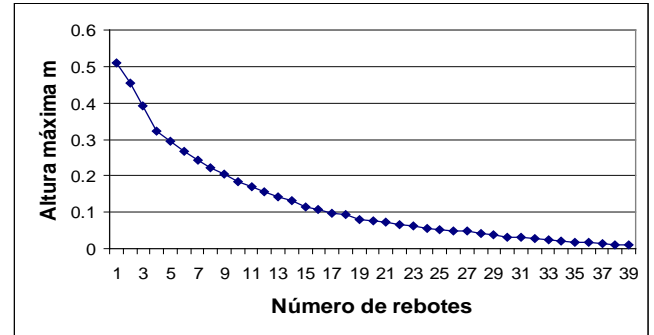


FIGURA 31. Alturas sucesivas para 39 rebotes consecutivos. La medida tiene poco ruido, la curva suave no muestra desviaciones al azar.

La figura 32 muestra que la pérdida de energía en cada choque es casi constante, y cercana al 10% de la energía inicial, o sea que rebota con el 90% de la energía inicial.

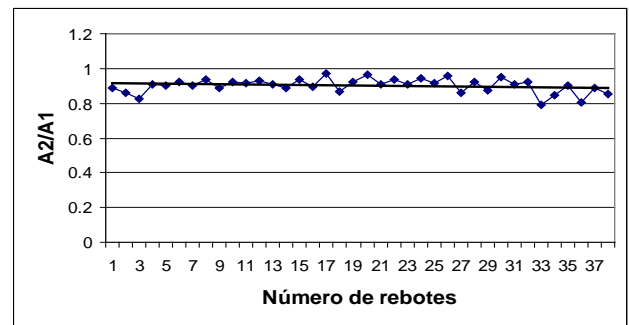


FIGURA 32. Cociente de la energía final entre la energía inicial para los choques de la pelota de plástico duro. El valor promedio del cociente A_2/A_1 es 0.90 ± 0.04 .

En el caso de una pelota de hule macizo se observan resultados muy semejantes, aunque hay que evitar que haya piedritas en el piso, que le den una fuerza que no pase por el centro de masa, lo que ocasiona desviaciones laterales reduciendo la altura máxima alcanzada y el tiempo de vuelo. Esta pelota no se queda vibrando como se queda la de plástico duro, lo que se nota como una prolongación en las vibraciones causadas por el rebote.

Nota: El coeficiente de restitución en el rebote de una pelota se define como el cociente de la velocidad después del rebote entre la velocidad inicial. En ese momento toda la energía es cinética y proporcional al cuadrado de la

velocidad. Para calcular el coeficiente de restitución es necesario sacar la raíz cuadrada del cociente de alturas [5].

VII. CONCLUSIONES

Este taller trata de enseñar como graficar campos mediante líneas y como resolver ecuaciones diferenciales usando Excel. El uso de Tracker para encontrar trayectorias, convierte los videos en estroboscopios. Audacity permite medir sonidos con alta resolución, además de permitir medir frecuencias con facilidad, ya sea usando el análisis de Fourier o midiendo el tiempo de 10 o 100 oscilaciones.

REFERENCIAS

- [1] Riveros H., *Placeres del Pensamiento*, Boletín de la SMF **21**, 261-263(2007).
- [2] Riveros H., *Placeres del Pensamiento*, Boletín de la SMF **29**, 125-128 (2015).
- [3] Riveros H., *Placeres del Pensamiento*, Boletín de la SMF **26**, 259-264 (2012).
- [4] Riveros H., *Placeres del Pensamiento*, Boletín de la SMF **29**,193-198 (2015).
- [5] Riveros H., *Placeres del Pensamiento*, Boletín de la SMF **22**, 53-55 (2008).
- [6] IFUNAM, <www.youtube.com/ifunam>, consultado el 10 de mayo de 2016.