

# Modelo de un circuito RL y una descomposición genética de su solución



Abel Medina Mendoza<sup>1,2</sup>, Alejandro Rosas Mendoza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria, Calzada Legaria No. 694, Del. Miguel Hidalgo, Ciudad de México.

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Comitán, Av. Instituto Tecnológico Kilómetro 3.5, Comitán de Domínguez, Chiapas.

**E-mail:** amedina105@hotmail.com

(Recibido el 30 de julio de 2017, aceptado el 8 de diciembre de 2017)

## Resumen

En este trabajo de investigación se pretende estudiar la construcción de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que modela un circuito eléctrico RL serie en los estudiantes del programa educativo de Ecuaciones Diferenciales del IV semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán. Considerando como marco teórico y metodología de investigación a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Eschema), debido a que nos brinda los elementos teóricos fundamentales para describir e interpretar razonamientos mostrados por los estudiantes con relación a la evolución cognitiva del concepto matemático en estudio.

**Palabras clave:** Teoría APOE, Descomposición genética, Ecuaciones Diferenciales.

## Abstract

In this research our objective is to study the construction of the solution of a first order ordinary differential equation that models a series RL electrical circuit in the students of the Differential Equations of the fourth semester of the curriculum of Engineering in Computer Systems of the Instituto Tecnológico de Comitán. We use the theoretical framework and research methodology of APOS (Action-Process-Object-Schema) theory in our research, because it provides the fundamental theoretical elements to describe and interpret the arguments shown by the students in relation to the cognitive evolution of the mathematical concept under study.

**Keywords:** APOS Theory, Genetic decomposition, Differential equation.

**PACS:** 01.40.gb, 01.40.Ha, 01.50.F, 02.30.Hq

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Desde la práctica docente se ha observado que en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales los conceptos permanecen ocultos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión y aplicación de los mismos. Chaves y Jaimes [1] mencionan que la observación espontánea que han tenido como profesores durante la enseñanza de los tópicos de EDO de primer orden bajo un enfoque tradicional, han constatado que los estudiantes presentan esquemas pobres y rígidos del concepto de solución de una EDO. Además, el modelo matemático y la solución de un circuito eléctrico RL serie mediante ecuaciones diferenciales, que puede verse en algunos textos universitarios muestran que no existe un camino cognitivo para que los estudiantes puedan aplicar más fácilmente dichos conceptos matemáticos a un proceso dinámico, siendo fundamental para el perfil de egreso del Ingeniero en Sistemas Computacionales.

Hace algunos años, en el área de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Comitán se trabajó con el diseño y

desarrollo de una especialidad en modelación de sistemas de control, con la finalidad de ofrecer otra alternativa para la formación profesional de los estudiantes de Ingeniería en Sistemas Computacionales, donde temas como el modelado matemático y las aplicaciones de ecuaciones diferenciales en diferentes sistemas como eléctrico y mecánico, entre otros, es fundamental para el desarrollo y aplicación de proyectos tecnológicos. La opinión de compañeros docentes fue que era necesario fortalecer algunos conocimientos previos como la clasificación de una ecuación diferencial, método de solución y su aplicación en problemas de contexto.

Por ello nuestro trabajo de investigación pretende estudiar el desarrollo cognitivo del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que modela un circuito eléctrico RL serie, ya que, al abordar el comportamiento de otros sistemas como el mecánico, entre otros, será mucho más fácil su comprensión mediante la comparación de los elementos de cada uno de los sistemas antes mencionado como se muestra en la Figura 1.

Sistema eléctrico	Sistema mecánico de traslación	Sistema mecánico de rotación
Voltaje $V$	Fuerza $F$	Torque $T$
Corriente $I$	Velocidad $V$	Velocidad angular $\omega$
Carga $Q$	Desplazamiento $X$	Desplazamiento angular $\theta$
Resistencia $R$	Amortiguamiento $\beta$	Amortiguamiento $\beta$
Inductancia $L$	Masa $M$	Momento de inercia $J$
Capacitancia $C$	Constante del resorte $K$	Torsión $K$

FIGURA 1. Analogías de elementos de los sistemas eléctrico y mecánico.

## II. ANTECEDENTES

Haciendo un análisis de investigaciones que muestran dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO. En primer término se presentan investigaciones que muestran dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, al respecto, Perdomo [2] realiza la comparación de la enseñanza y aprendizaje de las EDO, mediante la formación tradicional del concepto y la formación mediante resolución de problemas, la tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, Villar-Liñan y Llinares-Ciscar [3] mencionan las dificultades al definir el concepto de la ecuación diferencial, de igual forma Rasmussen [4] y Zandieh y McDonald [5] describen las dificultades en la concepción de la solución de una ecuación diferencial.

Guerrero, Camacho y Mejía [6] abordan las dos dificultades anteriores en problemas del concepto matemático para su aplicación de nuevos contextos de conocimiento, como el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones, así mismo Rodríguez [7] y Codes y Perdomo [8] experimentan con el uso de la tecnología para la introducción y visualización del concepto de EDO, para facilitar la solución de las dificultades antes planteadas.

En segundo término, se presentan investigaciones de la teoría APOE en la Matemática Educativa, teniendo como eje de aplicación la descomposición genética para la construcción de diferentes conceptos matemáticos, como la función exponencial [9], la transformación lineal [10], la derivada [11], el diferencial de una función en varias variables [12], la regla de la cadena [13] y el de ecuación diferencial [14].

## III. INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En este apartado se presenta un análisis de distintas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática y que han revelado un conjunto de dificultades que los estudiantes se han encontrado en el proceso de aprendizaje de las EDO, esto permitirá enmarcar las dimensiones de las preguntas de investigación. En el artículo de Perdomo [2], se presenta una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO, donde se distinguen dos partes principales: análisis de la forma en que un grupo de estudiantes que han recibido una formación tradicional del concepto utilizan sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO y, el análisis del papel que la resolución de problemas, la tecnología y la interacción juegan en el proceso de aprendizaje.

El análisis de los datos obtenidos en la primera fase permitió constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo de la comprensión del concepto. El análisis con el uso de la herramienta tecnológica y el modelo de trabajo en el aula, contribuyeron a crear un clima de indagación, reflexión, planteamiento de conjeturas y verificación.

Villar-Liñan y Llinares-Ciscar [3] establecen el modo en que los estudiantes son capaces de definir el concepto de ecuación diferencial y la proximidad entre esta definición y la definición formal. Los resultados de esta investigación muestran que, aunque sólo la décima parte de los estudiantes definió de forma precisa el concepto de ecuación diferencial, señalando con ejemplos diferentes EDO de variables separadas o lineales, casi la mitad de los alumnos propuso ejemplos correctos de ecuaciones diferenciales. Esto llevó a los autores a concluir que “el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto” (p. 99) y que “la imagen del concepto (de ecuación diferencial que tienen los alumnos) está muy ligada a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos” (p. 99).

Rasmussen [9] hace referencia a las dificultades que entraña el concepto de solución de una ecuación diferencial. Estas dificultades las asocia con el hecho de que es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos. Esta conclusión la extrae de un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes acerca de las soluciones de equilibrio de una EDO, las aproximaciones numéricas y la estabilidad. Zandieh y McDonald [5] identificaron esta misma dificultad en una investigación. Los autores apuntan como posible causa de estos errores conceptuales al hecho de que en muchas de las actividades que realizan los estudiantes no es necesario pensar en la variable, considerando ecuaciones de la forma  $y' = f(x, y)$ , como una

solución o una función.

Guerrero *et al.* [6] observaron que los estudiantes consideraban las funciones constantes sólo como números y no como funciones. Estos autores realizan una investigación haciendo uso del registro gráfico como medio de solución de las EDO. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes recuerdan las definiciones de algunos conceptos de cálculo, pero les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, en este caso, el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones.

En el trabajo de Rodríguez [7], se presenta cómo el alumno adquiere el modelo para representar, comprender y estudiar diversos fenómenos de naturaleza social, química, mecánica y eléctrica, así como la importancia de la visualización de representaciones de diversos aspectos de la Ecuación Diferencial a través del uso de tecnología. La autora realiza la investigación de tipo cualitativa. Concluyendo que la experiencia realizada permitió el desarrollo de competencias de modelación matemática y favoreció transiciones entre etapas del ciclo de modelación como las colaborativas y algunas tecnológicas.

En el taller “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación” de Codes y Perdomo [8], se presenta un conjunto de actividades, realizadas tanto de manera individual como en pequeños grupos con lápiz y papel, para introducir el concepto de ecuación diferencial ordinaria. Los resultados obtenidos sirvieron para reflexionar sobre los conocimientos previos necesarios (como Álgebra) para el diseño de cuestionarios y actividades de trabajo en el aula.

El análisis realizado de cada una de las investigaciones presentadas sobre las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de la EDO, me permitió visualizar el papel tan importante que juega la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, de igual forma que la comprensión del concepto matemático está muy ligada a expresiones formales y modelación de casos contextuales en donde el uso de registros gráficos son un medio adecuado para la solución de EDO. Lo anterior permite que los estudiantes logren comprender el concepto de EDO, aunque en un inicio se veía muy distante.

#### IV. TEORÍA APOE EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

La Teoría APOE es una teoría de tipo cognitivo-constructivista iniciada por Dubinsky y continuada por el grupo de investigadores llamados Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). La Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) se inició en Estados Unidos y se ha extendido a otros países (entre ellos México). Esta teoría fue desarrollada por Ed Dubinsky a partir de lo que Piaget llamaba “Abstracción Reflexiva”. Dicha “Abstracción

reflexiva” es un mecanismo, introducido por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños, y Dubinsky extiende esta idea al mecanismo de construcción de los conceptos matemáticos más avanzados [15].

Para determinar los elementos teóricos y metodológicos que conduzcan atender la problemática y considerando el impacto en investigaciones en el campo de la matemática educativa, se abordan experiencias con la teoría APOE, teniendo como eje de aplicación la descomposición genética en diferentes conceptos matemáticos.

Vargas *et al.* [9] elaboraron una descomposición genética del concepto de función exponencial, partiendo de los presupuestos del marco teórico APOE, de un estudio histórico del concepto de función exponencial, así como en los informes de investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática, la cual se realiza a través de los mecanismos de construcción: interiorización, coordinación, encapsulación y generalización. Concluyendo que la propuesta de descomposición genética de la función exponencial, es solamente un camino de los posibles a plantear, con ella se pretende analizar las construcciones mentales que tienen que hacer los alumnos para construir este concepto teniendo en cuenta tanto la epistemología del concepto como los resultados de investigaciones centradas en la comprensión de los alumnos.

Asimismo, Roa y Oktac [10], dan a conocer el procedimiento para diseñar una descomposición genética sobre el concepto de transformación lineal, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determina por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la Teoría APOE: Análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. Los resultados permitieron describir dos caminos para construir el concepto de transformación lineal, que fueron determinados por mecanismos mentales diferentes: uno por el de coordinación, el otro por el de interiorización.

De igual forma, Gutiérrez y Valdiva [11] describen la descomposición genética del concepto de derivada bajo la Teoría APOE. El estudio está enmarcado en uno de tipo cualitativo, la recolección y análisis de la información, y se desarrolló a través de cuatro actividades: fragmentación de la información, identificación y clasificación de las unidades de análisis, disposición y organización de la información y; descripción estructurada. Permitiendo reflexionar sobre el cómo explicar y desarrollar la definición de la derivada en clases para activar en los estudiantes procesos tales como reflexión, abstracción, síntesis y generalización, que generan la encapsulación de la definición.

Así mismo, Suárez-Aguilar [12] elabora un estudio sobre la descomposición genética del concepto diferencial de una función en varias variables, donde comprende el análisis de los elementos matemáticos que conforman el concepto, mencionando la importancia del concepto diferencial en las matemáticas avanzadas y en aplicaciones a otras ciencias. Donde con el estudio se busca establecer

los niveles de comprensión del concepto en el marco de la teoría APOE. El tipo de investigación utilizada es cualitativa, orientada hacia la forma como los estudiantes comprenden/construyen el concepto diferencial de una función en varias variables.

Del mismo modo, Mybert *et al.* [13] presentan un estudio en progreso que tiene como objetivo ayudar a los estudiantes a entender y aplicar la regla de la cadena, mediante el uso de la Teoría APOE y la descomposición genética de un conjunto de construcciones mentales, con la finalidad que los estudiantes comprendan la composición de funciones, derivadas y la regla de la cadena. El estudio se realiza bajo un enfoque cualitativo, donde se busca que el análisis de las respuestas escritas y las entrevistas del cuestionario utilizado permita obtener información sustancial para la identificación de construcciones mentales. Haciendo mención que la teoría APOE, a pesar de que ha sido escasamente utilizada ayudó a entender el concepto matemático mediante el uso adecuado de diversas actividades.

De gran importancia para este trabajo de investigación es la aportación de Chaves y Jaimes (s.f.), que mencionan en su trabajo en preparación “Análisis teórico de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas” que, en el estudio de las ecuaciones diferenciales, los conceptos son evadidos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión del concepto. Desarrollando en su trabajo una descomposición genética preliminar del concepto ecuación diferencial tomando como marco teórico y metodológico la Teoría APOE. Concluyendo que para construir esquemas que permiten comprender el objeto ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema en general, es necesario comprender cómo se construyen estos objetos matemáticos en algunos modelos particulares, lo que enriquece al sujeto con acciones, procesos y objetos.

Asimismo, Chaves y Jaimes [14], mencionan en su trabajo de investigación de grado “Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas” que la observación espontánea que han tenido como profesores durante la enseñanza de los tópicos de EDO de primer orden bajo un enfoque tradicional, han constatado que los estudiantes presentan esquemas pobres y rígidos del concepto de solución de una EDO, por ello presentan una descomposición genética de dicho concepto, siguiendo el marco metodológico propuesto por la teoría APOE.

Concluyendo que la descomposición genética presentada evidencia que un objeto matemático por muy “simple” que parezca o que algunos libros de texto presenten de forma trivial, implica un conjunto de construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes requieren desarrollar para lograr su comprensión e invitan a otros investigadores a utilizar la metodología ya que les permitió detectar que el modelo predice las construcciones de los estudiantes.

Teniendo como base la problemática de que en la “Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales

los conceptos permanecen ocultos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión y aplicación de los mismos”, objetivos y antecedentes de la investigación, los elementos teóricos a considerar se enmarcan en la Teoría APOE.

## V. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR

La revisión de investigaciones en Matemática Educativa, aunado al análisis reflexivo de lo considerado en la componente Análisis Teórico del ciclo metodológico de la Teoría APOE, ha permitido desarrollar una descomposición genética preliminar del concepto matemático en estudio con las construcciones y mecanismos mentales utilizados.

La asignatura de Ecuaciones Diferenciales dentro del plan de estudios de Ingeniería en Sistemas Computacionales consolida la formación matemática como ingeniero y potencia su capacidad en el campo de las aplicaciones, aportando al perfil del Ingeniero una visión clara sobre el dinamismo de la naturaleza. Una de las características sobresalientes de esta asignatura es que en ella se aplican todos los conocimientos previos de las matemáticas.

El primer tema fundamental de dicha asignatura es el estudio de las EDO de Primer Orden y sus aplicaciones. Por ello la Descomposición Genética [DG] preliminar que se presenta a continuación muestra los elementos que nos permitirán construir la solución de una EDO de primer orden que modela un circuito eléctrico RL.

Respecto a la primera componente del ciclo metodológico de investigación, se diseñó la DG con las aportaciones de docentes e investigadores sobre la enseñanza-aprendizaje de las EDO de primer orden y Análisis de libros de texto relacionados sobre Ecuaciones Diferenciales. En la Figura 2 se muestra la primera parte de la DG preliminar que consiste en realizar acciones para reconocer a la Ecuación Diferencial, su clasificación de acuerdo a su tipo, orden, linealidad y definición de su solución, aspectos que son interiorizados y encapsulados para llegar al proceso de una EDO lineal de primer orden tanto de su forma general, como de su forma estándar. Sin olvidarnos de los conocimientos previos sugeridos por docentes e investigadores como: concepto de función, límite e interpretación geométrica y física de la derivada.

La clasificación de una ecuación diferencial y su representación en su forma estándar de una EDO lineal de primer orden nos ayudará a determinar el método de solución, desarrollándose el mecanismo mental de coordinación, a través de la analogía de las variables, lo cual nos permitirá interiorizar el método del factor integrante y por consiguiente la encapsulación de la solución de una EDO lineal de primer orden para que sea utilizado en un problema de aplicación con el uso de ecuaciones diferenciales.

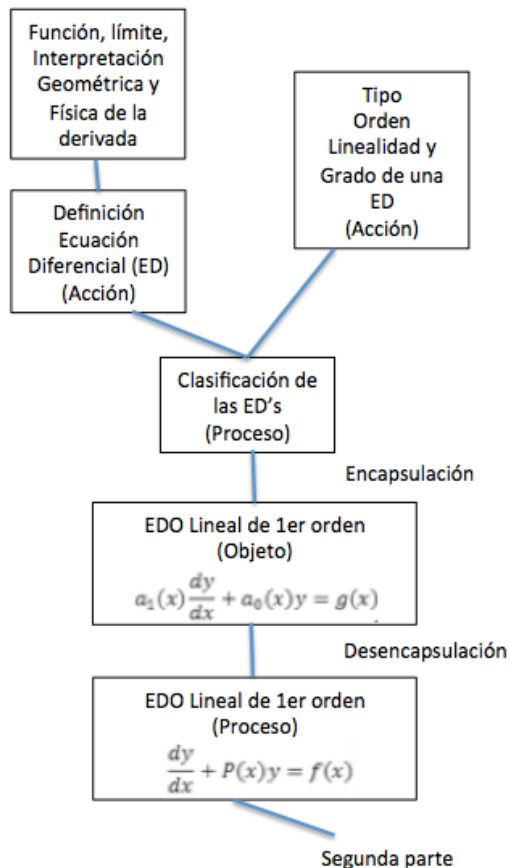


FIGURA 2. Primera parte de la Descomposición Genética preliminar.

En la Figura 3 se muestra la segunda parte de la DG preliminar que consiste en contar con los temas necesarios para modelar matemáticamente un proceso dinámico, en nuestro caso un circuito eléctrico RL, para ellos leyes físicas y eléctricas como la Ley de Lenz, Ley de Ohm y Ley de Kirchhoff, específicamente la segunda ley de Kirchhoff, que son interiorizados para llegar al objeto del modelo matemático del circuito eléctrico RL con el uso de Ecuaciones Diferenciales, representándolo en su forma estándar.

Cuando el estudiante ha logrado interiorizar diferentes acciones y procesos es momento de demostrar si ha encapsulado un objeto matemático en este caso el modelo matemático de un circuito eléctrico RL serie.

Con la comparación de los procesos: Método del factor integrante y la forma estándar del modelo matemático del circuito eléctrico RL serie, como se observa en la Figura 4 tercera parte de la DG preliminar, donde nuevamente permitirá que el estudiante logre desarrollar el mecanismo mental de coordinación a través de la comparación de variables dependientes e independientes para encapsular su método de solución y finalmente llegar a la construcción del objeto matemático en estudio.

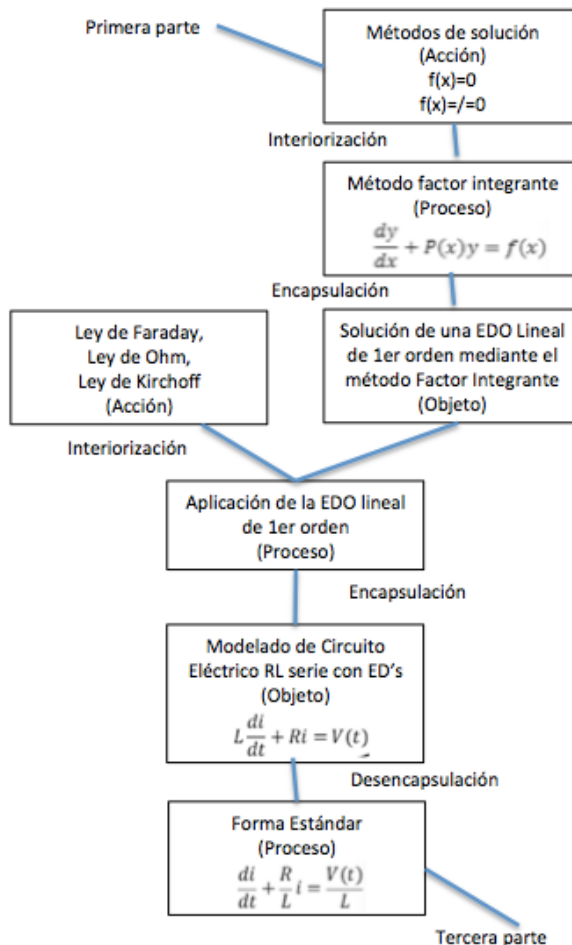


FIGURA 3. Segunda parte de la Descomposición Genética preliminar.

El objeto matemático es en nuestro caso la solución de una EDO de primer orden que modela un circuito eléctrico, nos ayudará a predecir su comportamiento y analizar el fenómeno en condiciones distintas de un proceso dinámico.

## VI. CONCLUSIONES

A partir de la descomposición genética se diseñaron instrumentos como cuestionarios, entrevistas y una práctica con el uso de una herramienta computacional, que serán aplicadas a los estudiantes regulares del IV semestre del plan de estudios de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán, para determinar si siguen el camino cognitivo que allí se describe.

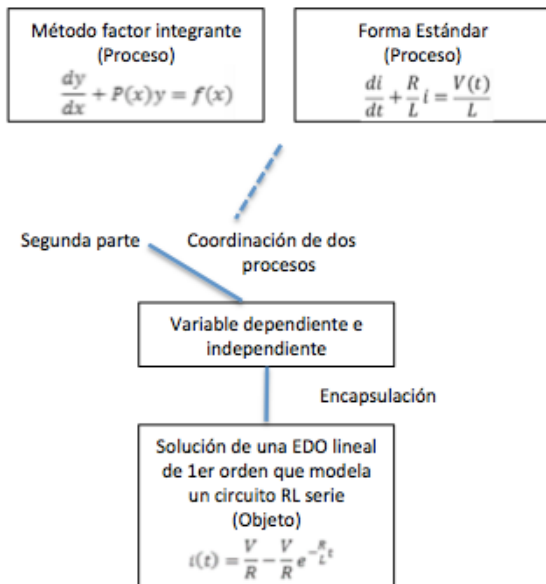


FIGURA 4. Tercera parte de la Descomposición Genética preliminar.

## REFERENCIAS

[1] Chaves, R. y Jaimes, L., *Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*, Tesis de maestría no publicada, Facultad de Ciencia y Tecnología, Colombia (2014), <http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/1179>.

[2] Perdomo, J., *Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología*, Números **78**, 113-134 (2011).

[3] Villar-Liñan, M. T. y Llinares-Ciscar, S., *Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de químicas*, Educación Matemática **8**, 90-101 (1996).

[4] Rasmussen, C., *New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties*, Journal of Mathematical Behavior **20**, 55-87 (2001).

[5] Zandieh, M. y McDonald, M., *Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations*, Proceedings of the Twenty-one Annual Meetin North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (1999).

[6] Guerrero, C., Camacho, M. and Mejía, H., *Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema*, Enseñanza de las Ciencias **28**, 341-352 (2010).

[7] Rodríguez, R., *Competencias de modelación y uso de tecnologías en ecuaciones diferenciales*, Proyecto de investigación presentado en la Corporación Universitaria para el Desarrollo de Internet A. C., Baja California, México (2012).

[8] Codes, M. y Perdomo, J., *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación*, Taller presentado en el III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Salamanca, España (2012).

[9] Vargas, J., González, M. y Llinares, S., *Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción*, Reporte de investigación presentado en el XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil (2011).

[10] Roa, S. y Oktac, A., *Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **13**, 89-112 (2010).

[11] Gutiérrez, L. y Valdivé, C., *Una descomposición genética del concepto de derivada*, Gestión y Gerencia **6**, 104-122 (2012).

[12] Suárez-Aguilar, Z., *Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto diferencial de una función en varias variables*, Revista de Investigación Desarrollo e Innovación **6**, 45-60 (2015).

[13] Mybert, Z., Maharaj, A. and Brijlall, D., *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of the Chain Rule*. US-China Education Review, 408-414 (2012).

[14] Chaves, R. y Jaimes, L., *Análisis teórico de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*, Manuscrito en preparación.

[15] Campero, J., *Propuesta didáctica en optimización dinámica: El caso del cálculo de variaciones y la teoría de control*, Tesis de doctorado no publicada, CICATA-IPN, México (2010).