

Uma análise do comportamento do campo gravitacional no interior da Terra



F.F.S. Justino, J.J. Rodrigues

*Departamento de Física, Universidade Estadual da Paraíba,
Campus Araruna, 58233-000, Araruna, Paraíba, Brasil.*

E-mail: jjrodrigues@uepb.edu.br

(Received 30 August 2020, accepted 17 November 2020)

Resumo

Neste trabalho exploramos a gravitação na análise do comportamento do campo gravitacional no interior da Terra em função do raio planetário, sob a consideração de dados sismológicos (ak 133-f) do Preliminary Reference Earth Model (PREM) para a modelagem computacional. Os resultados mostram que o campo gravitacional, considerando um perfil observacional de densidade variável, aumenta de forma não linear com mudanças abruptas à medida que se aproxima de transições de fase (superfície); devido às diferenças significativas de densidade das estruturas internas da Terra. Essa proposta conduz a uma visão mais aprofundada de uma abordagem comum em cursos básicos de gravitação, quando da consideração de um esfera homogênea, muito comum de ser apresentada durante a demonstração do teorema das cascas ou como uma aplicação direta da lei de Gauss na gravitação, e a consequente comparação deste modelo simplificado com aquele observado para a Terra.

Palavras-chave: Campo Gravitacional, Lei de Gauss da Gravitação, Modelagem Computacional.

Abstract

In this work, we consider the gravitation in the analysis of the behavior of the gravitational field inside the Earth as an object of study. The gravitational field is assumed to be a function of the planetary radius, under a consideration of seismological data (ak 133-f) of the Preliminary Reference Earth Model (PREM) for the computational modeling. The results shown that the gravitational field, with continuously variable density profile shape, increases with abrupt changes in the phase (surface) transitions non-linearly; due to significant differences in density of the Earth's internal structures. We find that this proposal leads to physically sensible results, instead the common approach, for basic courses of gravitation, where the Earth is considered a homogeneous solid sphere; a common way to prove the shell theorem or as a direct application of Gauss's law for gravitation and the consequent comparison of this simplified model with the observed behavior of the Earth.

Keywords: Gravitational Field, Gauss's Law of Gravitation, Computational Modeling.

I. INTRODUÇÃO

A introdução do campo gravitacional no estudo da gravitação newtoniana, especialmente alavancado devido os trabalhos de Pierre Simon de Laplace (1749-1827), apresentou um avanço significativo para o estabelecimento de técnicas que permitissem a resolução do problema da interação dinâmica dos corpos massivos [1]. Podemos elencar quatro rotas de estudo em que se interessa determinar o campo gravitacional e, conseqüentemente, a força gravitacional para uma partícula teste, quando do cálculo por:

- integração direta vetorial, utilizando-se do princípio de superposição;
- integração direta escalar, a partir do conceito de potencial gravitacional;
- aplicação do teorema da divergência, útil quando da existência de uma simetria facilitadora;

- resolução da equação diferencial parcial de Poisson associada.

Essas rotas obedecem uma seqüência de ensino bastante comum nos cursos básicos de gravitação [2, 3, 4, 5], iniciando uma discussão em torno da experimentação da Lei da Gravitação Universal para objetos esféricos massivos, extrapolada para partículas massivas pontuais, e a admissão da aplicação do princípio de superposição vetorial, seguido da definição de campo gravitacional como a fração entre a força gravitacional efetiva e uma massa m , característica de uma partícula, posicionada em um ponto do espaço. Sendo a força gravitacional proporcional a massa da partícula teste, podemos identificar o campo gravitacional como independente da massa dessa partícula, assim representando uma propriedade do espaço, um campo vetorial dependente da massa-fonte das partículas que o geram.

A generalização desse resultado é imediata: O uso do princípio da superposição e a suposição de que a massa

das partículas pode se confundir com quantidades infinitesimais levam ao método da integração direta vetorial,

$$\vec{g} = -G \int \frac{\hat{r}}{r^2} dm. \quad (1)$$

Aqui se percebe a necessidade de converter a quantidade dm , em função de uma densidade mássica, seja para a linha, superfície ou volume, o que torna a tarefa de integração vetorial bastante limitada, especialmente quando essa densidade mássica é variável.

Um novo recurso pode facilitar essa tarefa: observada a não rotacionalidade do campo gravitacional, pode-se definir uma função escalar intermediária, o potencial escalar, cuja função gradiente, coerentemente definida com um sinal de negativo, reestabelece o campo gravitacional, ou seja, podemos definir:

$$V = -G \int \frac{dm}{r^2}. \quad (2)$$

Isso minimiza a dificuldade de integração, agora escalar; ainda assim, é uma tarefa matemática analiticamente limitada.

Quando consideramos a possibilidade de um fluxo vetorial, Φ_g , sobre uma superfície fechada para uma partícula massiva pontual, generalizado a partir do uso do princípio de superposição, emerge, visto o teorema da divergência, a Lei de Gauss para a gravitação

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi Gm. \quad (3)$$

Nessa expressão, o menos é uma escolha de coerência para a definição do versor radial e reflete o fato observacional da força gravitacional ser atrativa. O índice ‘SG’ indica que a integração de superfície deve ser especialmente escolhida para reproduzir a simetria do comportamento do campo gravitacional, verificada a distribuição de massa do objeto estudado. A quantidade m representa a massa interna a superfície escolhida e não deve ser confundida com a massa total do objeto, a menos que o objeto esteja inteiramente sob a superfície gaussiana.

O uso do teorema da divergência, considerada a expansão do volume, da massa até a coincidência do volume da superfície gaussiana, nos leva a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (4)$$

sendo essa a representação da lei de Gauss diferencial que, combinado a definição $\vec{g} = -\vec{\nabla}V$, permite definir a equação de Poisson para a gravitação:

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho. \quad (5)$$

Se a região de interesse tem densidade de massa nula, então essa equação é reduzida a equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

Nenhuma dessas rotas é mais ou menos geral, porém suas aplicações se adequam melhor a cada contexto específico. A análise de sistemas com densidade variável, de um modo geral, prejudica a integração vetorial ou escalar, uma vez da presença do termo inverso em r , a menos de condições ajustadas para minimizar esse complicador. Uma condição de baixa simetria, no comportamento das linhas de campo elétrico, inibi a integração superficial da Lei de Gauss; ao tempo que condições de contorno podem ser um limitante para a atuação da equação de Poisson, ou mesmo da equação de Laplace.

É nesse contexto que o estudo da gravitação é minimalista em suas aplicações e pode induzir a falhas conceituais ou mesmo incompatibilidade com efeitos reais em modelagens de situações de interesse. Vamos nesse trabalho destacar uma dessas aplicações, como sugestão de estudo para um curso introdutório, e explorar, dentre as rotas de estudo da gravitação, a lei de Gauss.

É comum apresentar uma sequência de problemas nos cursos básicos de gravitação; interessa, em especial, o problema de esferas maciças, uma vez que está ligado ao teorema das cascas e a própria gênese da teoria proposta por Newton no “*Principia*” [6]. Se a esfera é homogênea o comportamento do campo gravitacional é linear na porção interior e cai com inverso do quadrado da distância radial central, na porção exterior. No caso de uma esfera ocada, o resultado continua válido, sendo agora nulo na região vazia e linear desde o raio interno até o raio externo, permanecendo a variação com o inverso do quadrado na porção externa a esfera ocada.

Uma grave falha é confundir esse comportamento como um modelo para a variação do campo gravitacional da Terra, não apenas porque o nosso planeta não é uma esfera perfeita, mas principalmente porque o interior da Terra não é homogêneo, sendo formado por regiões bem definidas: o núcleo, o manto e a crosta, incluindo-se as regiões de transição, sendo necessário considerar o perfil de densidade característico de cada região.

Embora o problema aparente desafiador, podemos assumir, com bom ajuste, uma função de variação de densidade para cada região, inclusive para as regiões de transição; nesse trabalho, admitimos essa variação como uma função linear da distância radial do centro da Terra e isso reflete os dados obtidos no modelo sismológico ak133-f do Preliminary Reference Earth Model (PREM) [7], discutido na seção III. Na seção II. apresentamos uma visão geral da lei de Gauss para a gravitação, como a rota para a análise do modelo. Os resultados e discussões são explorados na seção IV. A seção V. é reservada para as considerações finais.

II. A FORMULAÇÃO GAUSSIANA GRAVITACIONAL

A análise do comportamento do campo gravitacional no interior da Terra pode ser realizada por qualquer das rotas de estudo da gravitação. A integração direta, vetorial ou escalar, irá conduzir ao teorema das cascas, sendo esse um resultado

conhecido na literatura. As regiões de transição se mostram como uma dificuldade nessa rota, uma vez que é necessário realizar a integração, considerada a função de densidade escolhida. O leitor pode se interessar em seguir essa rota de estudo, como uma alternativa de análise; sugerimos, para uma primeira visão sobre essa rota, a solução apresentada nos textos [2, 3].

Estabelecer condições de contorno e explorar a equação de Poisson, especialmente em coordenadas esféricas, é desafiador e exige um conhecimento mais aprimorado do tratamento das técnicas de solução de equações diferenciais parciais, como a separação de variáveis e o uso da solução dos harmônicos esféricos [8, 9].

Aqui consideramos simplificações que permitem uma manipulação mais adequada a partir da lei de Gauss para a gravitação. A Terra é considerada como uma esfera composta por regiões com um perfil de densidade bem definido. Nesse caso, cada camada infinitesimal (mesmo nas regiões de transição) se assemelha a uma casca esférica e o fluxo perpendicular a superfície reduz a integral sobre a superfície gaussiana, apropriadamente escolhida como uma esfera concêntrica a superfície da Terra, a um produto simples, visto que a normal a superfície se alinha ao vetor campo gravitacional.

Para um primeiro estudo consideramos que as regiões de transição apresentam um comportamento linear para a variação da densidade de massa. Outra alternativa, que gera um estudo mais complexo do ponto de vista matemático, é considerar uma função de densidade que varie como uma tangente hiperbólica, uma vez que essa função é amplamente utilizada no estudo de transições de fase [10, 11].

Uma questão a ressaltar é a atenção que o leitor deve oferecer a massa interna a superfície gaussiana, que deve incluir toda a massa contida nas regiões internas. As condições de contorno devem ser cuidadosamente ajustadas para que não gere inconsistências nas superfícies de separação, delimitadas para cada uma das regiões, no perfil de densidade construído para a Terra.

III. MODELAGEM DO CAMPO GRAVITACIONAL

Para a análise da modelagem é necessário realizar considerações preliminares. Algumas destas já foram mencionadas, porém agora vamos organizar essas assertivas em um caminho que permita abordar o problema da obtenção do comportamento previsto do campo gravitacional no interior da Terra:

1. Para fins da solução, a Terra será considerada com geometria esférica perfeita. A Terra não é uma esfera perfeita; o geóide é a forma que mais se aproxima do formato geométrico, resguardada a atuação da gravidade perpendicularmente a superfície. Devido a complexidade dessa geometria, em geral, assume-se a forma usual do elipsoide de revolução achatado nos polos [8].

2. Admitimos apenas o núcleo interno, núcleo externo e manto, com raios fixos determinados; a crosta é demasiado fina (entre 5 e 70 km) para que gere um comportamento perceptível na escala do planeta como um todo. As demais camadas e subdivisões foram omitidas porque não há variação significativa no perfil de densidade, de modo que isso não acumula uma influência determinante no comportamento do campo gravitacional.
3. É utilizado o modelo sismológico ak133-f do *Preliminary Reference Earth Model* (PREM), para o perfil de densidade versus profundidade [7]. Este é o modelo mais utilizado atualmente como referência de dados globais de sismologia – vide [13] para uma discussão aprofundada.
4. A manipulação algébrica e o ajuste das condições de contorno são facilitadas pela aplicação de programas computacionais, uma vez que lidamos com integrais de volume, especialmente nas regiões de transição, de modo que possamos melhorar os ajustes as curvas de densidade obtidas pelo PREM.

A. Modelo Preliminar de Referência da Terra (PREM)

O PREM foi desenvolvido por Adam M. Dziewonski e Don L. Anderson em resposta às diretrizes do “Comitê Padrão do Modelo da Terra”, da Associação Internacional de Geodesia (IAG) e da Associação Internacional de Sismologia e Física do Interior da Terra (IASPEI). É um modelo unidimensional que representa as propriedades médias da Terra em função do raio planetário [7]. Os modelos sismológicos da Terra normalmente usam os perfis de velocidade versus profundidade e uma equação de estado relacionando (densidade ρ) e (módulos elásticos K) para obter perfis de pressão; este modelo tem sido amplamente utilizado como base para a tomografia sísmica e modelos geofísicos globais [13].

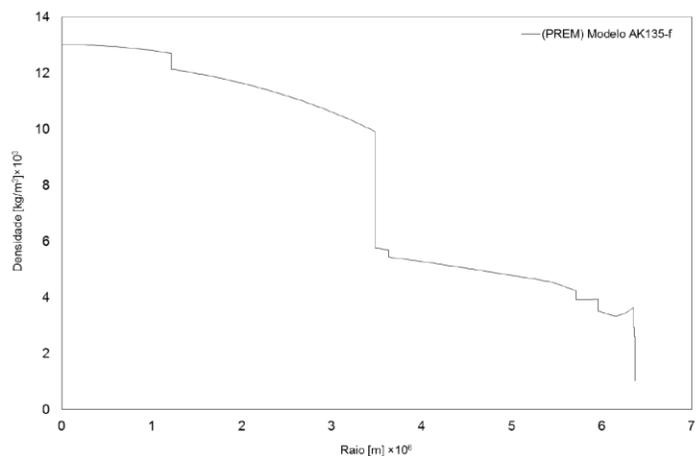


FIGURA 1. Perfil de densidade em função do raio da obtido dos dados do PREM (modelo ak133-f).

Os modelos de referência da Terra incluem o (*iasp91*) e o (*ak135-f*), este último sendo uma atualização do primeiro. Tal como o seu antecessor, *ak135-f* é um modelo de velocidade radial estratificado e as tabelas de tempo de trânsito são derivadas deste modelo, de modo que existe uma base consistente para todas as fases. Para o nosso interesse, iremos utilizar os dados de densidade em função da distância radial. Esses dados são traduzidos na figura (1).

Percebe-se um decaimento da densidade à medida em que se aproxima da superfície do planeta e também mudanças abruptas nesse intervalo. Isso ocorre principalmente pela composição de cada camada. O desafio para descrever um perfil de densidade em função da distância consiste no fato de ocorrerem essas mudanças abruptas de densidade na transição das camadas. Uma alternativa é tratar cada camada independentemente, obtendo assim três funções de densidade, e consequentemente três expressões para o campo gravitacional, como podemos observar na figura (2).

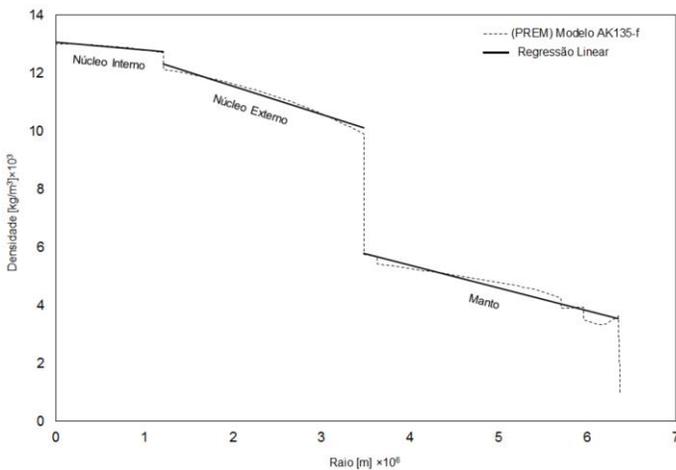


Figura 2. Perfil de densidade em função do raio da Terra com linearização de camadas.

Admitir o comportamento linear do perfil de transição é satisfatório para o nosso interesse, pois o núcleo interno e externo segue aproximadamente um padrão linear, com ligeira desvio ao manto, devido as heterogeneidades de formação dessa camada.

A partir da regressão linear das séries de dados em cada fase obtemos as seguintes funções lineares:

TABELA I. Funções lineares de densidade.

Camada	Função de densidade	R ²
Núcleo Interno	$\rho_1(r) = 13061 - 0,0003r$	0,933
Núcleo Externo	$\rho_2(r) = 13506 - 0,001r$	0,978
Manto	$\rho_3(r) = 8541 - 0,0008r$	0,933

onde R² representa o coeficiente de determinação da regressão linear.

Essas funções descrevem o comportamento da densidade em função do raio apenas em seus intervalos; o comportamento da densidade aproximada total será a junção dessas funções.

B. Expressão Geral para o Campo Gravitacional

A escolha da estrutura idealizada, com simetria esférica, torna conveniente a aplicação da lei de Gauss para o caso gravitacional, sendo o fluxo gravitacional através da superfície fechada proporcional à massa encerrada. Isso permite obter uma expressão generalizada em função da distância radial para *g* no interior da Terra, dada por:

$$g_n(r) = -4\pi G \left(\frac{a_n}{3} r + \frac{b_n}{4} r^2 \right), \quad (6)$$

onde (*n*) identifica a camada, ou região de transição, associada à função; *a* é o coeficiente linear e *b* um coeficiente angular. Esse resultado é possível porque para cada região obtemos um comportamento similar para a função de variação da densidade da Terra.

Quando da consideração da aplicação direta da lei de Gauss a um bôlido homogêneo, teríamos um comportamento linear; como comumente apresentado em análises para o interior do planeta nessas circunstâncias. A nossa modelagem propõe uma primeira correção a esse modelo, fase por fase, levando em conta os ajustes necessários as condições de contorno aplicadas a cada superfície de transição admitida. Enfatizamos a possibilidade de obtenção de um comportamento analítico, nem sempre direto quando de abordagens mais realísticas, quando presente efeitos não lineares de difícil tratamento matemático. Isso apenas foi possível devido as simplificações impostas ao modelo e abre uma rota de estudo para considerações menos limitantes; muito embora, a termos de um perfil geral, tenhamos incluído os efeitos e ajustes mínimos para a tomada de um modelo ajustado aos resultados observacionais, preconizados na literatura.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os diâmetros de cada região do interior da Terra foram considerados fixos, as variações locais são irrelevantes para traçar um perfil geral, sendo relevantes para uma análise localizada do campo gravitacional. Outra consideração ajustada é a aceleração gravitacional, sendo admitida no valor comum de 9,81 m/s² sobre toda a superfície do planeta. A Tabela (2) apresenta em detalhe os valores utilizados e os resultados obtidos.

TABELA II. Aceleração gravitacional por camada.

Camada	<i>r</i> (km)	$g \left(\frac{m}{s^2} \right)$
Núcleo Interno	1216	4,35
Núcleo Externo	2270	10,60
Manto	2885	9,69

A intensidade da aceleração gravitacional obtida em nosso modelo para a superfície da região delimitante do núcleo interno é levemente inferior a metade do valor admitido para a superfície do planeta. Apesar de ter uma razão de diâmetro

de quase metade em relação a superfície do núcleo externo e de quase um quarto em relação a superfície do manto. A justificativa para esse comportamento é o fato de o núcleo interno possuir alta densidade, atribuindo uma força gravitacional significativa a essa região.

Para a superfície do núcleo externo a gravidade obtida é, surpreendentemente, maior que a verificada na superfície do planeta. Esse resultado desafia uma primeira interpretação e parece incoerente sob uma aplicação direta do teorema das cascas. Ocorre que o perfil de densidade atinge uma variação abrupta nesse ponto (frente a alta densidade do núcleo e sua extensão), onde os efeitos de transição para a região externa ao planeta passam a ser relevantes e a aceleração da gravidade no manto segue o padrão de queda, se ajustando ao valor padrão admitido para a superfície na crosta do planeta.

Na figura (3) apresentamos o perfil gravitacional obtido para o interior da Terra e ele mostra que as considerações realizadas traduzem o comportamento de g , como obtida pelo PREM, em sua análise observacional, representando assim uma modelagem bem ajustada a este modelo [7]; ao nosso ver isso credencia essa abordagem como uma visão mais realística do comportamento gravitacional do nosso planeta, abrindo uma nova rota de discussão, que permita uma maior penetração no tema.

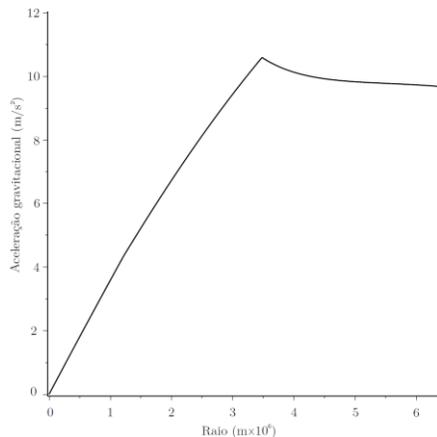


FIGURA 3. Aceleração gravitacional em função do raio.

Foi estimada uma aceleração da gravidade de aproximadamente $9,69 \text{ m/s}^2$ na superfície externa do manto. Esse resultado é coerente e está adequado aos padrões do modelo, visto as aproximações e considerações admitidas.

O gráfico mostra como o núcleo, por ser formado de altas quantidades de ferro, níquel e outras ligas densas, contribui de maneira significativa para o campo gravitacional como um todo, ainda que, na transição do manto para o núcleo externo, haja uma mudança abrupta da gravidade, que decai de maneira não linear até o centro. Na figura (4) apresentamos uma comparação direta da relação entre o raio e a aceleração gravitacional.

Este perfil representa uma forma adequada, em alternativa ao comportamento gravitacional linear, amplamente utilizado em livros de graduação, e também em

livros didáticos do ensino médio, podendo ser apresentado como material complementar para o ensino de gravitação.

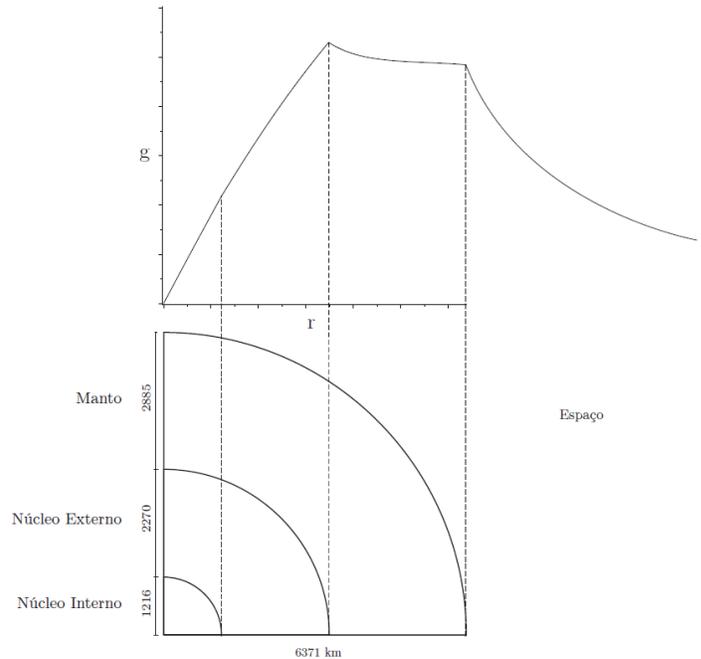


FIGURA 4. Comportamento gravitacional da Terra do interior ao exterior.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A discussão de problemas não minimalistas é um desafio para o ensino de Física, especialmente devido a complexidade matemática na inclusão de efeitos que, em geral, envolve a Física não linear. Eventualmente é possível apresentar um tratamento analítico e isso permite um aprofundamento conceitual relevante. No caso específico da determinação do perfil de aceleração gravitacional para o interior da Terra, pudemos explorar um confronto com a proposta de um bólide homogêneo, em que o campo gravitacional é erroneamente associado a uma relação funcional linear.

A heterogeneidade do nosso planeta impõe um percurso mais amplo e traz elementos de interdisciplinaridade; a exemplo do conhecimento geológico e a própria composição das camadas com suas características peculiares. Uma boa sugestão para enriquecer a proposta é incrementar a discussão sobre as propriedades geológicas do nosso planeta. Outra faceta particular desse estudo é a relação ensino-pesquisa; a busca e implementação de ferramentas tecnológicas, programas computacionais, técnicas matemáticas avançadas e imageamento, são importantes mecanismos de conhecimento, possibilitando uma formação mais ampla sobre o tema.

Sugerimos ao leitor a tentativa de avançar no aprofundamento da proposta e admitir outras relações funcionais nas fases de transição, bem como para o perfil de densidade do manto; apresentada como uma proposta de ensino complementar no estudo da gravitação newtoniana.

REFERÊNCIAS

- [1] Laplace, P. S., Marquis de, *Traité de Mécanique Céleste*, (Paris, 1799–1825).
- [2] Tipler, P. A. e Mosca, G., *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vol.1, 6ª Edição, (Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2009).
- [3] Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica*, Vol.1, 5ª Edição, (Ed. Blucher, São Paulo, 2013).
- [4] Young, H. D. e Freedman, R. A., *Física II, Termodinâmica e Ondas*, 14ª Edição, (Ed. Pearson, São Paulo, 2015).
- [5] Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J., *Fundamentos de Física – Gravitação, Ondas e Termodinâmica*, 10ª Edição, (Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2016).
- [6] Newton, I., *Principia, Livros II e III – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, Trad. Joly, F. D. E ASSIS, A. K. T., (Ed. Edusp, São Paulo, 2020).
- [7] Dziewonski, A. M., Anderson, D. L., *Preliminary reference Earth model*, Phys. of the Earth and Prelim. Int. **25**, 297-356 (1981).
- [8] Arfken, G. B., Weber, H. J. e Harris, F. E., *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, (Ed. Gen LTC, Rio de Janeiro, 2017).
- [9] Boas, M. L., *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, (Ed. Jonh Wiley & Sons, New York, 2005).
- [10] Papon, P., Leblond, J. e Meijer, P. H. E., *The Physics of Phase Transitions*, (Ed. Springer-Verlag, Berlin, 2006).
- [11] Stanley, H. E., *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, (Ed. Oxford University Press, Oxford, 1987).
- [12] Freedman, W., Nashed, M. e Zubair, S. T. (Eds.), *Handbook of Geomathematics*, vol. 2, (Ed. Springer-Verlag, Berlin, 2010).
- [13] Souza, E. D. J., *Estimativas da distribuição da densidade no interior da terra usando a equação de Adams Williamson*, (UFBA, Salvador, 2013).