

Ecuación de Burgers viscosa, solución numérica mediante diferencias finitas y un método iterativo para sistemas no lineales de orden 4 basado en el Número Áureo



Santiago David Quinga Socasi

Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, S/N y Ambato, Av. Gral. Rumiñahui, Sangolquí, Ecuador.

E-mail: sant.david@hotmail.com

(Recibido el 20 de mayo de 2021, aceptado el 27 de octubre de 2021)

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta la solución numérica de la Ecuación de Burgers; para ello se discretizó dicha ecuación mediante diferencias finitas haciendo uso de un método tipo Crank-Nicolson que lleva a la obtención de sistemas de ecuaciones no lineales, mismos que han sido resueltos empleando un método iterativo de orden cuatro basado en el Número Áureo; luego de realizar la validación de nuestro programa desarrollado en MATLAB, usando para ello la solución exacta proporcionada por la transformación de Cole-Hopf, se procedió a realizar varios ensayos obteniéndose las respectivas soluciones numéricas que fueron presentadas en forma gráfica para su posterior análisis.

Palabras clave: Ecuación de Burgers, Crank-Nicolson, Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones no lineales.

Abstract

In the following work the numerical solution of the Burgers Equation is presented; for this purpose the equation was discretized by means of finite differences using a Crank-Nicolson type method that leads to obtain systems of nonlinear equations, which have been solved using an iterative method of order four based on Golden Ratio; after having validated our program developed in MATLAB, using the exact solution provided by the Cole-Hopf transformation, we proceeded to perform several tests obtaining the respective numerical solutions that were presented in graphical form for further analysis.

Keywords: Burgers Equation, Crank-Nicolson, Iterative methods for systems of nonlinear equations.

I. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos físicos pueden ser descritos mediante ecuaciones en derivadas parciales no lineales, tal es el caso de la ecuación de Burgers viscosa que permite modelar varios fenómenos físicos como tráfico, ondas de choque, problemas de turbulencia y procesos estocásticos [1].

El modelo matemático que describe la ecuación de Burgers en una dimensión es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (1)$$

con la condición inicial:

$$u(x,0) = f(x), \quad a < x < b, \quad (2)$$

y las condiciones de frontera:

$$u(a,t) = g_1(t), \quad u(b,t) = g_2(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

en donde u es el campo de velocidades, $\nu > 0$ es un coeficiente de difusión viscosa, f , g_1 y g_2 son funciones suaves conocidas [2].

En 1915, Bateman [3] introdujo esta ecuación y dio una solución de estado estacionario para el problema. Más tarde, en 1948, J. M. Burgers, un físico holandés propuso esta ecuación como modelo matemático de turbulencia [4, 5] y debido a su amplia contribución, la ecuación lleva su nombre.

Esta ecuación se caracteriza por tener un término dependiente del tiempo un término de convección y un término de difusión, además la misma es utilizada para probar métodos numéricos para las ecuaciones de Navier-Stokes [6].

La ecuación de Burgers también se puede considerar como una forma simplificada de la ecuación de Navier-Stokes debido a la forma del término de convección no lineal y la aparición de una viscosidad [7]; si la misma cuenta con el término viscoso es parabólica, mientras que si no lo tiene es hiperbólica [2].

II. MARCO TEÓRICO

A. Solución exacta de la ecuación de Burgers

La ecuación (1) podría ser transformada en una ecuación de difusión lineal parabólica, mediante el uso de la transformación de Cole-Hopf [8, 9]:

$$u(x,t) = -\frac{2\nu \frac{\partial \phi}{\partial x}}{\phi}, \quad (4)$$

la ecuación (1) luego de aplicar dicha transformación, será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (5)$$

que tiene la forma de una ecuación lineal de calor. Como indican [1, 10], se puede aplicar series de Fourier para resolver la ecuación (5) se obtiene la siguiente solución exacta:

$$\phi(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} \text{Cos}(n\pi x), \quad (6)$$

donde:

$$A_0 = \int_a^b e^{-\frac{1}{2\nu} \int_a^x u(\xi,0) d\xi} dx, \quad (7)$$

y

$$A_n = 2 \int_a^b e^{-\frac{1}{2\nu} \int_a^x u(\xi,0) d\xi} \text{Cos}(n\pi x) dx, n=1,2,\dots \quad (8)$$

Obteniéndose la siguiente solución exacta de la ecuación de Burgers:

$$u(x,t) = 2\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} n \text{Sen}(n\pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} \text{Cos}(n\pi x)} \quad (9)$$

B. Diferencias finitas

Como se menciona en [11], una forma de resolver una ecuación que contiene derivadas parciales, es mediante una discretización de la misma mediante la reducción de su dominio a un número finito de puntos equiespaciados (x_i, t_j) , situados en los nodos de una malla rectangular uniforme. Este método de discretización recibe su nombre debido a que las diferencias divididas finitas aproximan a las derivadas parciales de la función $u(x,t)$. Si llamamos $u_{i,j}$ al valor de la función incógnita en el nodo (x_i, t_j) , con un paso horizontal $h = x_{i+1} - x_i$, y uno vertical $k = t_{j+1} - t_j$,

entonces se puede aproximar la primera deriva parcial de la función $u(x,t)$ respecto a x y t , con un error de truncamiento de orden uno $O(h)$ o $O(k)$, mediante:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, \quad (10)$$

y

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \quad (11)$$

las mismas que se conocen como diferencias progresivas o diferencias hacia adelante; la primera derivada parcial también se puede obtener mediante:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, \quad (12)$$

y

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}, \quad (13)$$

conocidas como diferencias regresivas o diferencias hacia atrás y cuyo error de truncamiento es de orden uno; se puede obtener también la aproximación mediante diferencias centrales o simétricas, cuyo esquema es el siguiente:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad (14)$$

y

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \quad (15)$$

que tienen error de truncamiento de orden dos, $O(h^2)$ o $O(k^2)$. Para la aproximación de las segundas derivadas parciales utilizamos un esquema en diferencias centrales con error de truncamiento de orden dos:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (16)$$

y

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}, \quad (17)$$

C. Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones no lineales

Como indica [12], considerando la expresión de un sistema de ecuaciones no lineales en forma general, tenemos:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

donde cada $f_i : R^n \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, n$, dicho sistema también puede ser representado como $F(x) = 0$

$$F(x) = 0, \tag{19}$$

donde F es una función vectorial $F : R^n \rightarrow R^n$ que tiene como funciones coordenadas:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T. \tag{20}$$

Como menciona [13], se puede transformar el sistema original en uno equivalente que tiene la forma:

$$x = G(x), \tag{21}$$

para una determinada función $G : R^n \rightarrow R^n$, donde sus funciones coordenadas se denotan por $g_i, i = 1, 2, \dots, n$; si se parte de una aproximación inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in R^n$ se genera una sucesión de vectores de R^n mediante la siguiente formula iterativa:

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots \tag{22}$$

El proceso es convergente si $\{x^{(k+1)}\} \rightarrow \xi$ cuando $k \rightarrow \infty$ donde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in R^n$ bajo ciertas condiciones de la función G es una solución del sistema $x = G(x)$, el vector ξ también es conocido como punto fijo del función G , y al algoritmo descrito por la ecuación (22) se le conoce como método de punto fijo.

Como menciona [11] una definición importante sobre el orden de convergencia establece que sea $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ una sucesión en R^n que converge a \bar{x} , entonces:

a) Se dice que la convergencia es lineal si:

$$\exists M, 0 < M < 1 \text{ y } \exists k_0, \|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|, \forall k \geq k_0 \tag{23}$$

b) Se dice que la convergencia es cuadrática, si:

$$\exists M, M > 0 \text{ y } \exists k_0, \|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|^2, \forall k \geq k_0 \tag{24}$$

c) Se dice que la convergencia es cubica, si:

$$\exists M, M > 0 \text{ y } \exists k_0, \|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|^3, \forall k \geq k_0 \tag{25}$$

Como señala [14], un ejemplo clásico de método iterativo de punto fijo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es el Método de Newton con orden de convergencia dos y cuyo esquema es el siguiente:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \tag{26}$$

donde $F'(x)$ es la matriz Jacobina del sistema.

Con el afán de obtener métodos iterativos eficientes para resolver sistemas de ecuaciones no lineales existen diferentes investigaciones [12, 13, 14, 15, 16], en las cuales se diseñan métodos iterativos con alto orden de convergencia.

En particular para este trabajo de investigación vamos a utilizar el siguiente esquema de método iterativo propuesto por Cordero et al [16] que lo nombran Método NG:

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} [F'(x^{(k)})]^{-1} F(z^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \end{aligned} \tag{27}$$

que tiene orden de convergencia cuatro y entre algunos de sus coeficientes aparece el Número Aureo y además se caracteriza por tener tres pasos, además se utiliza un esquema de composición con el método de Newton modificado de matriz Jacobiana congelada ya que en cada uno de los pasos se utiliza la misma evaluación de la matriz Jacobiana $F'(x^{(k)})$, a diferencia de otros métodos de orden similar que requieren las evaluaciones de diferentes matrices Jacobianas.

III. METODOLOGÍA

A continuación, se describe el proceso realizado para la obtención de la solución numérica de la ecuación de Burgers.

A. Discretización

Se va a tomar una malla rectangular regular cuyos nodos son $(x_i, t_j) = (a + ih, 0 + jk)$, $i = 0, 1, \dots, nx$ y $j = 0, 1, \dots, nt$, donde nx y nt representan el número de subintervalos espaciales y temporales respectivamente; el paso espacial es $h = \frac{b-a}{nx}$, mientras que el paso temporal es $k = \frac{T_{\max}}{nt}$, donde T_{\max} es el tiempo máximo de estudio.

Si utilizamos un Método tipo Crank-Nicolson, el cual consiste en discretizar la ecuación (1) en dos instantes de tiempo para luego realizar una media aritmética; entonces tomando diferencias finitas centrales tanto para $\frac{\partial u}{\partial x}$

para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, utilizando para ello los esquemas (14) y (16);

para el primer instante de tiempo t_j se aproxima $\frac{\partial u}{\partial t}$ mediante una diferencia progresiva, de la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \nu \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0 \quad (28)$$

para el segundo instante de tiempo t_{j+1} se aproxima $\frac{\partial u}{\partial t}$ mediante una diferencia regresiva, de la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \nu \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + u_{i,j+1} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} = 0 \quad (29)$$

Luego de tomar la media aritmética entre las ecuaciones (28) y (29), y realizar algunas simplificaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} u_{i,j+1} - \frac{\nu}{2h^2} u_{i+1,j+1} + \frac{\nu}{h^2} u_{i,j+1} - \frac{\nu}{2h^2} u_{i-1,j+1} \\ & + \frac{1}{4h} u_{i,j+1} u_{i+1,j+1} - \frac{1}{4h} u_{i,j+1} u_{i-1,j+1} = \left(\frac{1}{k} - \frac{\nu}{h^2} \right) u_{i,j} \\ & + \frac{\nu}{2h^2} u_{i+1,j} + \frac{\nu}{2h^2} u_{i-1,j} - \frac{1}{4h} u_{i,j} u_{i+1,j} + \frac{1}{4h} u_{i,j} u_{i-1,j}, \end{aligned} \quad (30)$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \dots, nt - 1$; para cualquier valor de j se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales de tamaño $(nx - 1) \times (nx - 1)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{k} u_{1,j+1} - \frac{\nu}{2h^2} u_{2,j+1} + \frac{\nu}{h^2} u_{1,j+1} - \frac{\nu}{2h^2} u_{0,j+1} \\ + \frac{1}{4h} u_{1,j+1} u_{2,j+1} - \frac{1}{4h} u_{1,j+1} u_{0,j+1} = \left(\frac{1}{k} - \frac{\nu}{h^2} \right) u_{1,j} \\ + \frac{\nu}{2h^2} u_{2,j} + \frac{\nu}{2h^2} u_{0,j} - \frac{1}{4h} u_{1,j} u_{2,j} + \frac{1}{4h} u_{1,j} u_{0,j}, \\ \vdots \\ \frac{1}{k} u_{nx-1,j+1} - \frac{\nu}{2h^2} u_{nx,j+1} + \frac{\nu}{h^2} u_{nx-1,j+1} - \frac{\nu}{2h^2} u_{nx-2,j+1} \\ + \frac{1}{4h} u_{nx-1,j+1} u_{nx,j+1} - \frac{1}{4h} u_{nx-1,j+1} u_{nx-2,j+1} = \left(\frac{1}{k} - \frac{\nu}{h^2} \right) u_{nx-1,j} \\ + \frac{\nu}{2h^2} u_{nx,j} + \frac{\nu}{2h^2} u_{nx-2,j} - \frac{1}{4h} u_{nx-1,j} u_{nx,j} \\ + \frac{1}{4h} u_{nx-1,j} u_{nx-2,j} \end{cases} \quad (31)$$

en donde las incógnitas de este sistema son $u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \dots, u_{nx-1,j+1}$ que son la solución aproximada de la ecuación de Burgers para un j cualquiera.

B. Solución Sistema de ecuaciones no lineales

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales (31), vamos a utilizar método iterativo NG cuyo esquema está en la ecuación (27), y que ha sido programado haciendo uso de MATLAB R2015a, para ello es necesario conocer la matriz

Jacobiana $F'(x)$ del sistema, cuyo valor se detalla en la siguiente matriz tridiagonal:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & c_m & a_m \end{pmatrix}$$

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{\nu}{h^2} + \frac{1}{4h} u_{k+1,j+1} - \frac{1}{4h} u_{k-1,j+1}; k = 1, 2, \dots, nx - 1$$

$$b_k = \frac{1}{4h} u_{k,j+1} - \frac{\nu}{2h^2}; k = 1, 2, \dots, nx - 2$$

$$c_k = -\frac{1}{4h} u_{k,j+1} - \frac{\nu}{2h^2}; k = 2, 3, \dots, nx - 1 \quad (32)$$

C. Validación

La solución numérica de la ecuación de Burgers se obtiene mediante un programa desarrollado en MATLAB R2015a, que contiene la etapa de discretización mediante diferencias finitas y el Método tipo Crank-Nicolson y la etapa de solución de nt sistemas de ecuaciones no lineales de tamaño $(nx - 1) \times (nx - 1)$ haciendo uso de un método iterativo para sistemas de ecuaciones no lineales de 3 pasos tipo Número Aureo nombrado por los autores NG; para la obtención de la solución exacta hacemos uso de la solución exacta propuesta por Cole-Hopf y descrita en la ecuación (9), como ejemplo vamos a considerar un coeficiente de viscosidad $\nu = 0.1$ con la siguiente condición inicial:

$$u(x,0) = \text{Sen}(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad (33)$$

y las condiciones de frontera tipo Dirichlet Homogéneas:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0, \quad (34)$$

haciendo uso de (7) y (8), se obtiene como ejemplo los siguientes coeficientes de Fourier con 7 cifras decimales:

$$A_0 = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2\nu\nu}(1-\text{Cos}(\pi x))} dx \approx 0.3544546,$$

$$A_1 = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2\nu\nu}(1-\text{Cos}(\pi x))} \text{Cos}(\pi x) dx \approx 0.4380796,$$

$$A_2 = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2\nu\nu}(1-\text{Cos}(\pi x))} \text{Cos}(2\pi x) dx \approx 0.1584021,$$

$$\vdots$$

$$A_{100} = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2\nu\nu}(1-\text{Cos}(\pi x))} \text{Cos}(100\pi x) dx \approx -4,3541559e-16 \quad (35)$$

de esta forma utilizando la ecuación (9) y con 100 coeficientes de Fourier, se obtiene la solución exacta de la ecuación de Burgers. A continuación, se presenta una tabla donde se compara los valores de la solución exacta y la

solución aproximada obtenida a $t=0.1s$ utilizando para ello 100 nodos temporales y un paso espacial $h=0.01$.

TABLA I. Solución exacta utilizando la transformación de Cole-Hopf con 100 coeficientes de Fourier y la solución aproximada utilizando diferencias finitas y el método iterativo NG, para el ejemplo de validación.

x	Sol. exac.	Sol. aprox.	Error
0	0,0000000	0,0000000	0,0000E+00
0,1	0,2234495	0,2234550	5,4976E-06
0,2	0,4358020	0,4358131	1,1070E-05
0,3	0,6251182	0,6251348	1,6554E-05
0,4	0,7777206	0,7777419	2,1270E-05
0,5	0,8772797	0,8773034	2,3726E-05
0,6	0,9042470	0,9042686	2,1587E-05
0,7	0,8369226	0,8369355	1,2933E-05
0,8	0,6573056	0,6573059	2,9561E-07
0,9	0,3657545	0,3657483	6,1787E-06
1	0,0000000	0,0000000	1,4804E-16

En la tabla anterior se puede observar como el error máximo cometido es de $2,3726E-05$; adicionalmente, se presenta una figura donde se compara la solución exacta con la solución aproximada para $t=0.1s$, para un paso espacial de $h=0.01$.

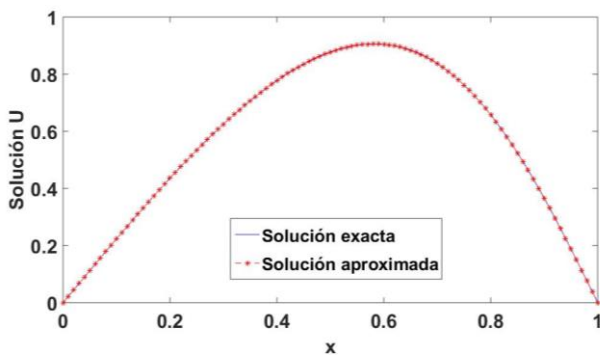


FIGURA 1. Se muestra la solución exacta y la solución aproximada de la ecuación de Burgers con las condiciones del ejemplo de validación para $t=0.1s$ y un paso espacial $h=0.01$.

III. RESULTADOS

Luego de haber hecho una validación del programa desarrollado para resolver numéricamente la ecuación de Burgers, se ha realizado varios ensayos sobre dicha ecuación; para las pruebas respectivas se ha utilizado MATLAB R2015a, el sistema computacional utilizado para realizar todas las pruebas tiene las siguientes especificaciones: Intel(R) i5-420U CPU @ 1.70GHz 2.40GHz, memoria RAM de 6 GB. A continuación, detallamos los experimentos realizados, así como los resultados obtenidos.

A. Solución de la ecuación de Burgers en relación a la variable espacial y temporal.

Para comprender el comportamiento físico de la ecuación de Burgers en relación a la variable espacial y temporal, se realizó varios ensayos, el Ensayo A1 en el cual se utilizó las mismas condiciones iniciales y de frontera utilizada en la validación, para $\nu=0.1$, un $T_{max}=1s$, una cantidad de nodos espaciales $n_x=50$ y una cantidad de nodos temporales $nt=100$; a continuación se presenta la solución obtenida.

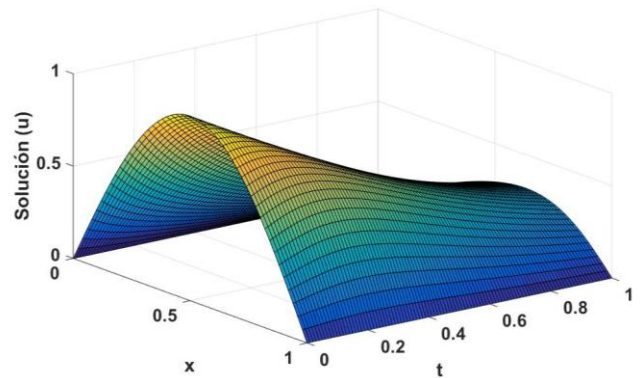


FIGURA 2. Se muestra la solución numérica del Ensayo A1, para $\nu=0.1, T_{max}=1s$, nodos espaciales $n_x=50$ y nodos temporales, $nt=100$.

Para el Ensayo A2 se utilizó la condición inicial $u(x,0)=\text{Sen}(2\pi x)$, $0 < x < 1$ y condición de frontera $u(0,t)=0, u(1,t)=0, t > 0$, para $\nu=0.1$, un $T_{max}=1s$, una cantidad de nodos espaciales $n_x=50$ y una cantidad de nodos temporales $nt=100$; a continuación se presenta la solución obtenida.

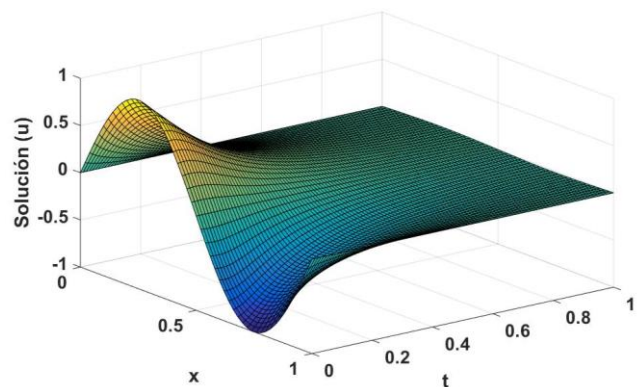


FIGURA 3. Se muestra la solución numérica del Ensayo A2, para $\nu=0.1, T_{max}=1s$, nodos espaciales $n_x=50$ y nodos temporales, $nt=100$.

B. Solución de la ecuación de Burgers a diferentes instantes de tiempo.

Santiago David Quinga Socasi

Para comprender el comportamiento físico de la ecuación de Burgers a diferentes instantes de tiempo, se realizó varios ensayos; para el Ensayo B1 se utilizó las mismas condiciones iniciales y de frontera utilizada en la validación, para $\nu = 0.1$, diferentes tiempos $t = 0.1, 0.4, 0.6, 1, 2$, una cantidad de nodos espaciales $n_x = 50$ y una cantidad de nodos temporales $n_t = 100$; a continuación se presenta la solución obtenida.

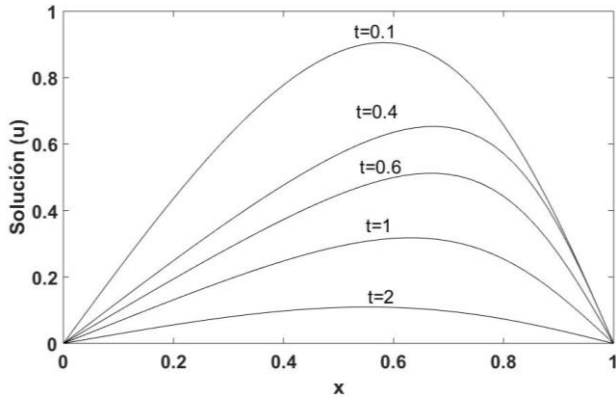


FIGURA 4. Se muestra la solución numérica a diferentes tiempos del Ensayo B1, para $\nu = 0.1$, nodos espaciales $n_x = 50$ y temporales, $n_t = 100$.

Para el Ensayo B2 se utilizó las mismas condiciones iniciales y de frontera utilizada en la validación, para $\nu = 0.01$, diferentes tiempos $t = 0.1, 0.4, 0.6, 1, 2, 3$, una cantidad de nodos espaciales $n_x = 100$ y una cantidad de nodos temporales $n_t = 100$; a continuación se presenta la solución obtenida.

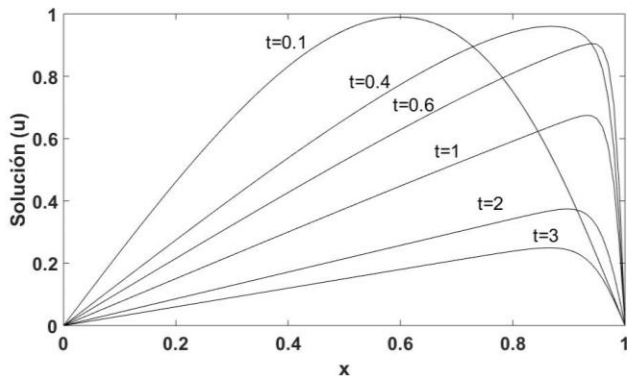


FIGURA 5. Se muestra la solución numérica a diferentes tiempos del Ensayo B2, para $\nu = 0.01$, nodos espaciales $n_x = 100$ y temporales, $n_t = 100$.

Para el Ensayo B3 se utilizó se utilizó la condición inicial $u(x,0) = \text{Sen}(2\pi x)$, $0 < x < 1$ y condición de frontera $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $t > 0$, $\nu = 0.01$, diferentes tiempos $t = 0.1, 0.4, 0.6, 1, 2, 3$, una cantidad de nodos espaciales $n_x = 100$ y una cantidad de nodos temporales $n_t = 100$; a continuación se presenta la solución obtenida.

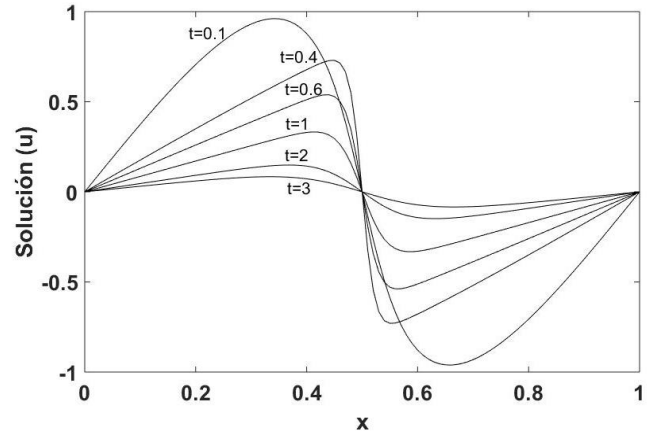


FIGURA 6. Se muestra la solución numérica a diferentes tiempos del Ensayo B3, para $\nu = 0.01$, nodos espaciales $n_x = 100$ y temporales, $n_t = 100$.

C. Solución de la ecuación de Burgers variando la viscosidad

Para comprender el comportamiento físico de la ecuación de Burgers con variación de la viscosidad, se realizó varios ensayos; para el Ensayo C1 se utilizó las mismas condiciones iniciales y de frontera utilizada en la validación, para valores de viscosidad $\nu = 0.1, 0.01, 0.001$, un instante de tiempo $t = 0.4$, una cantidad de nodos espaciales $n_x = 100$ y una cantidad de nodos temporales $n_t = 100$; a continuación se presenta la solución obtenida.

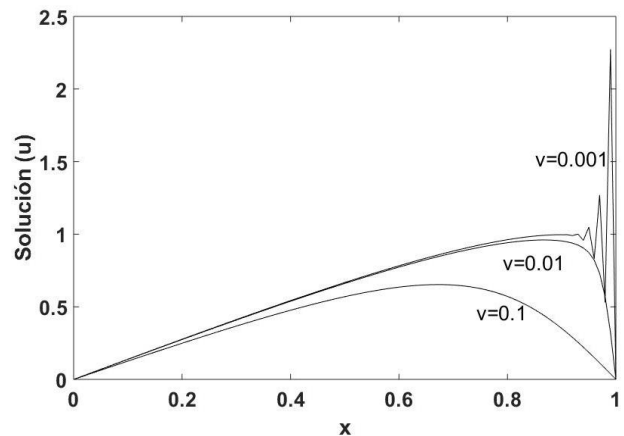


FIGURA 7. Se muestra la solución numérica variando la viscosidad ν del Ensayo C1, nodos espaciales $n_x = 100$ y temporales, $n_t = 100$.

Como se observa en la gráfica anterior a medida que la viscosidad disminuye se presenta inestabilidades en la solución numérica, para constatar este echo de mejor forma a continuación se presenta la solución numérica en relación a la variable espacial y temporal, para $\nu = 0.001$, un $T_{\text{max}} = 0.5 \text{ s}$, una cantidad de nodos espaciales $n_x = 100$ y una cantidad de nodos temporales $n_t = 100$;

REFERENCIAS

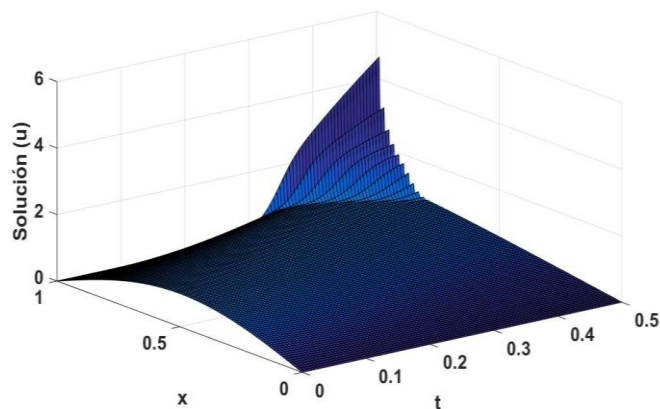


FIGURA 8. Se muestra inestabilidades en la solución numérica trabajando con viscosidad $\nu = 0.0001$, $T_{\max} = 0.5$ s, nodos espaciales $n_x = 100$ y temporales, $n_t = 100$.

IV. CONCLUSIONES

Para resolver la ecuación de Burgers existen métodos tanto analíticos como numéricos, en esta investigación evitamos el uso de métodos analíticos ya que el costo computacional resulta ser más elevado al momento de emplear dichos métodos, por ejemplo, al usar la transformación de Cole-Hopf se debe calcular series de Fourier, mientras que al utilizar técnicas numéricas terminamos resolviendo sistemas de ecuaciones que computacionalmente hablando requieren menor costo.

Las diferencias finitas son una herramienta de discretización utilizada en ecuaciones en derivadas parciales lineales, pudiendo ser extendidas a ecuaciones en derivadas parciales no lineales, y que ofrecen errores relativamente bajos, como se pudo demostrar en el ejemplo de validación.

Como se puede apreciar en el Ensayo C1, mientras la viscosidad disminuye, la solución numérica presenta inestabilidades, se debería realizar un análisis más profundo sobre este fenómeno ya que dicha inestabilidad se podría deber a la forma de discretización utilizada mediante un método de diferencias finitas tipo Crank-Nicolson, o al fenómeno físico como tal ya, que al disminuir la viscosidad se está elevando el número de Reynolds trabajando de este modo en régimen turbulento.

Para resolver los sistemas de ecuaciones no lineales que surgen de la discretización, se puede utilizar diferentes tipos de métodos iterativos para sistemas cuyos esquemas y diseños se encuentran ampliamente en la bibliografía propuesta en esta investigación, para el caso de nuestro estudio se empleó un método cuyo orden de convergencia es cuatro, de este modo se alcanza la solución utilizando una menor cantidad de iteraciones a diferencia de métodos tradicionales como es el caso del método de Newton.

- [1] Pandey, K., Verma, L. y Verma, A., *On a finite difference scheme for Burgers' equation*, Applied Mathematics and Computation **215**, 2206-2214 (2009).
- [2] Pandey, K. y Verma, L., *A Note on Crank-Nicolson Scheme for Burgers' Equation*, Applied Mathematics **2**, 883-889 (2011).
- [3] Bateman, H., *Some recent researches on the motion of fluids*, Monthly Wather Rev. **43**, 163-170 (1915).
- [4] Burgers, J. M., *A mathematical model illustrating the theory or turbulence*, Advances in Applied Mechanics **1**, 171-199 (1948).
- [5] Burgers, J. M., *Mathematical examples illustrating relations occuring in the theory of turbulent fluid motion*, Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam **1**. 17, 1-53 (1939).
- [6] Mukundan, V. y Ashish, A., *Numerical Techniques for Unsteady Nonlinear Burgers Equation Based on Backward Differentiation Formulas*, Nonlinear Engineering **7**, 171-181 (2018).
- [7] Kuo, C-K. y Lee, S-Y., *A New Exact Solution of Burgers' Equation with Linearized Solution*, Mathematical Problems in Engineering **2015**, 7 (2015).
- [8] Cole, J. D., *On a Quasilinear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics*, Quarterly of Applied Mathematics **9**, 225-236 (1951).
- [9] Hopf, E., *The Partial Differential Equation $u_t + uux = \nu u_{xx}$* , Communications on Pure and Applied Mathematics **3**, 201-230 (1950).
- [10] Cordero, A., Franques, A. y Torregrosa, J. R., *Numerical Solution of Turbulence Problems by Solving*, Algorithms **8**, 224-233 (2015).
- [11] Cordero, A., Hueso, J. y Torregrosa, J., *Problemas resueltos de métodos numéricos*, (Paraninfo, Madrid, 2006).
- [12] Vassileva, M. P., *Métodos iterativos eficientes para la resolución de sistemas no lineales*, (Universitat Politècnica de Valencia, España, 2011).
- [13] Artidiello, S., *Diseño, implementación y convergencia de métodos iterativos para resolver ecuaciones y sistemas no lineales utilizando funciones peso*, (Universitat Politècnica de Valencia, España, 2014).
- [14] García, J., *Análisis dinámico y numérico de familias de métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales y su extensión a espacios de Banach*, (Valencia: Universidad Politècnica de Valencia, Valencia, 2017).
- [15] Cordero, A., Gómez, E. y Torregrosa, J. R., *Efficient High-Order Iterative Methods for Solving Nonlinear Systems and Their Application on Heat Conduction Problems*, Complexity **2017**, 11 (2017).
- [16] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R., *Efficient high-order methods based on golden ratio for nonlinear systems*, Applied Mathematics and Computation **217**, 4548-4556 (2011).