Análisis del flujo de un fluido newtoniano entre dos cilindros concéntricos de longitud infinita

ISSN 1870-9095

Arturo F. Méndez Sánchez[1], Edith Cortez Martínez[2], Leonor Pérez Trejo[1]
[1]*Instituto Politécnico Naciona, Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas,CDMX, México.*
[2]*Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Ciencias Básicas, Escuela Superior de Ingeniería Textil, CDMX, México.*

E-mail: afmendezs@ipn.mx

(Recibido el 24 agosto 2023, aceptado el 30 noviembre 2023)

Resumen

En los cursos de dinámica de fluidos, mecánica del medio continuo y reología donde se analizan problemas de flujo de fluidos newtonianos se analizan problemas como el flujo de Poiseuille o el flujo de corte simple debido a la relevancia que tienen este tipo de flujos a nivel industrial y reométrico. No obstante, son escasos los problemas en la literatura que pueden analizarse teóricamente y reducirse a este tipo de flujos. Estos ejemplos en los cursos, son de gran apoyo didáctico para los estudiantes ya que les permite reproducir como casos límite campos de flujo comunmente tratados, y así, analizar la coherencia de sus resultados cuando logran reducirlos a problemas más simples y comunes. En este trabajo se analiza el flujo de un fluido newtoniano que está localizado entre dos cilindros concéntricos de longitud infinita cuando el cilindro interno desciende a velocidad constante. El campo de flujo se genera por el movimiento del cilindro interno y la presencia de un gradiente de presión. Se obtiene el perfil de velocidades que se genera bajo esta situación de flujo y se muestra que se reproducen el flujo de Poiseuille y el flujo de corte simple como casos límite particulares. Además, se considera que este desarrollo teórico será de gran utilidad para los estudiantes en sus cursos, pues permite enfrentarlos al análisis de las situaciones límite y comprobar su coherencia durante su desarrollo y análisis.

Palabras clave: Fluido newtoniano, Flujo de Poiseuille, Flujo cortante simple, Mecánica del medio continuo,

Abstract

In the fluid dynamics, continuum mechanics and rheology courses where the Newtonian fluid flow problems are analyzed, such as Poiseuille flow or simple shear flow are analyzed due to the industrial and rheometric relevance. However, there are few problems in the literature that can be theoretically analyzed and reduced to these flows. These examples in the courses are of great didactic support for students since it allows them to reproduce commonly treated flow fields as borderline cases, and thus, analyze the coherence of their results when they manage to reduce them to simpler and more common problems. In this work, the flow of a Newtonian fluid that is located between two concentric cylinders of infinite length is analyzed when the internal cylinder descends at a constant speed. The flow field is generated by the movement of the internal cylinder and the presence of a pressure gradient. The velocity profile that is generated under this flow situation is obtained and it is shown that the Poiseuille flow and the simple shear flow are reproduced as particular limit cases. In addition, it is considered that this theoretical development will be very useful for students in their courses, since it allows them to face the analysis of limit situations and check their coherence during their development and analysis.

Keywords: Newtonian Fluid, Poiseuille Flow, Simple Shear Flow, Continuum Mechanics.

I. INTRODUCCIÓN

En los cursos de dinámica de fluidos, mecánica del medio continuo y reología, es común tratar problemas idealizados y bien conocidos como el flujo de Poiseuille o el flujo cortante simple, ya sea por la importancia que tienen a nivel industrial o por el manejo simple que se puede realizar y la importancia de ser flujos de tipo reométricos. Particularmente, el flujo cortante simple está identificado en los flujos reométrico de placas paralelas, cilindros concéntricos y cono y plato [1, 2]. Por ello, es que son los problemas más analizados en tales cursos.

Sin embargo, tratar ejercicios teóricos que puedan identificar o reducirse a estos problemas es de gran aporte didáctico para los estudiantes, ya que les permite verificar o comprobar la coherencia de sus resultados cuando logran reducirlos a problemas más simples.

En el presente trabajo, se analiza el flujo de un fluido newtoniano que se encuentra entre dos cilindros concéntricos de longitud infinita cuando el cilindro interno desciende a velocidad constante. El campo de flujo se genera por el movimiento del cilindro interno y la presencia de un gradiente de presión. Este análisis permite determinar el perfil de velocidades que se genera en esta situación de flujo y, como casos particulares de este problema, se muestra que

puede reducirse a un perfil de velocidades generado por el flujo de Poiseuille y al perfil de velocidades del flujo cortante simple. Esta solución, también es consistente con el perfil de velocidades que se genera en el viscosímetro de aguja descendente de dimensiones finitas, aunque en esta situación, el gradiente de presiones se genera por la fuerza que ejerce el peso de la aguja en el fluido [2, 3, 4].

II. TEORÍA

El desarrollo y obtención de perfiles de velocidad se analiza desde un punto de vista de la teoría del medio continuo, el cumplimiento de la ecuación de continuidad y analizando las ecuaciones de conservación de momento, en función de los esfuerzos aplicados (τ) [5], a saber,

Componente r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\tau_{r\theta})}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial(\tau_{rz})}{\partial z}\right)+\rho g_r. \quad (1)$$

Componente θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\tau_{\theta\theta})}{\partial \theta}+\frac{\partial(\tau_{\theta z})}{\partial z}\right)+\rho g_\theta\ . \quad (2)$$

Componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\tau_{\theta z})}{\partial \theta}+\frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z}\right)+\rho g_z. \quad (3)$$

Considerando sistemas isotérmicos, fluido newtoniano incompresible, es decir, con densidad y viscosidad (ρ, μ) constantes y componentes de velocidad (v). Estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones de Navier-Stokes [2, 5, 6].

Para introducir el contexto de las soluciones particulares, a continuación se presentan los casos de flujo cortante simple y de flujo de Poiseuille, los cuales pueden encontrase resueltos en la literatura

a) *Flujo* cortante simple.

Este es el flujo unidireccional de un fluido newtoniano entre dos placas horizontales infinitas, separadas una distancia fija *d*, una placa que se encuentra en reposo y la otra moviéndose en su propio plano con velocidad constante v_0 como se ilustra en el esquema de la Figura 1. En este esquema se muestra un corte trasversal. Si *x* es la dirección del flujo, entonces, el campo de velocidad para el plano de Couette es de la forma,

$$v_x = v(y);\ v_y = v_z = 0. \quad (4)$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas rectangulares [6] y de las condiciones de frontera,

$$v(0) = 0\ ;\ v(d) = v_0. \quad (5)$$

El perfil de velocidades queda determinado por:

$$v(y) = v_0\frac{y}{d}, \quad (6)$$

que es la expresión del flujo cortante simple. Esta expresión cumple las condiciones de frontera pues a una altura $y=d$ la velocidad es v_0 y corresponde a la velocidad del fluido inmediato a la placa móvil. Mientras que cuando $y = 0$, la velocidad es nula $v(0) = 0$ y corresponde a la velocidad del fluido en la placa fija.

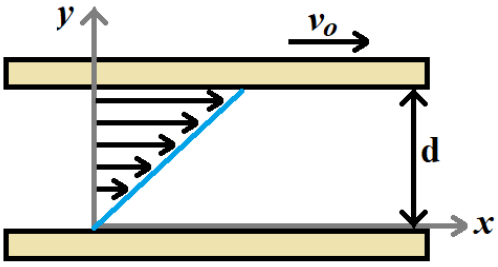

Figura 1. Esquema del perfil de velocidades de un flujo cortante simple planar de un fluido newtoniano entre placas infinitas.

a) Flujo de *Poiseuille*

El flujo de Poiseuille consiste en un flujo unidireccional de un fluido newtoniano generado mediante un gradiente de presión en una tubería. Un corte transversal de este tipo de flujo se ilustra en la Figura 2.

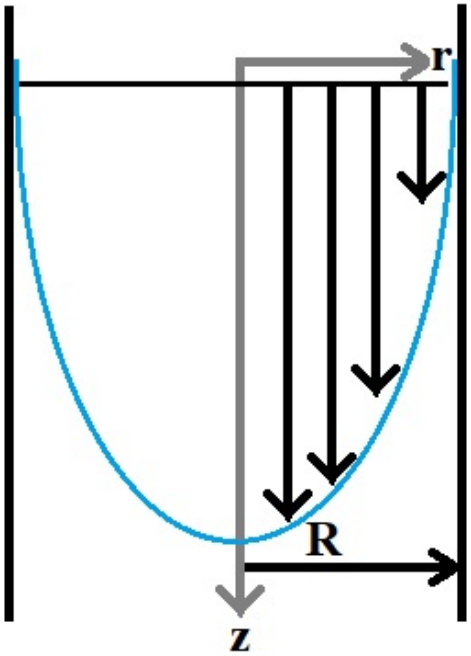

Figura 2. Esquema del perfil de velocidades del fujo de Poiseuille para un fluido newtoniano.

En este caso, se supone que el flujo es generado mediante un gradiente de presión $\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)$. Donde *z* corresponde a la dirección del flujo. El campo de velocidades bajo esta situación es de la forma:

$$v_z = v(r);\ v_r = v_\theta = 0. \qquad (7)$$

De las ecuaciones de conservación de momento y considerando la condición de no deslizamiento en la frontera,

$$v_z(r = R) = 0. \qquad (8)$$

Se obtiene el perfil de velocidades del flujo en una tubería generado por un gradiente de presiones,

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)(R^2 - r^2). \qquad (9)$$

Donde μ es el coeficiente de viscosidad. En la Figura 3 se presenta el perfil de velocidades generado.

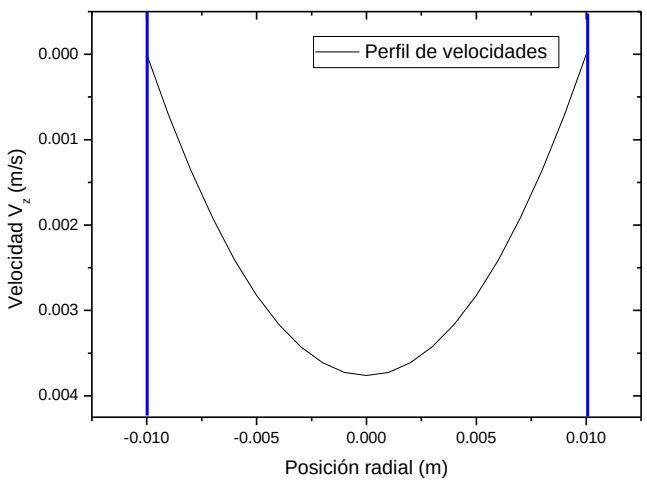

Figura 3. Perfil de velocidades del fujo de Poiseuille para un fluido newtoniano. En este caso se consideraron los siguientes valores, $R = 0.01m$, $\mu = 0.1014Pas$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 15.26Pa/m$. Donde, el eje vertical z creciente está dirigido hacia abajo para que se asemeje al esquema presentado.

III. DESARROLLO DEL PROBLEMA

Un ejemplo de flujo cortante simple puede analizarse y derivarse si se considera el flujo de un fluido newtoniano que se genera entre dos cilindros concéntricos infinitos donde el cilindro interior desciende a velocidad constante v_0. En la Figura 4, se ilustra el flujo que se genera bajo esta situación.

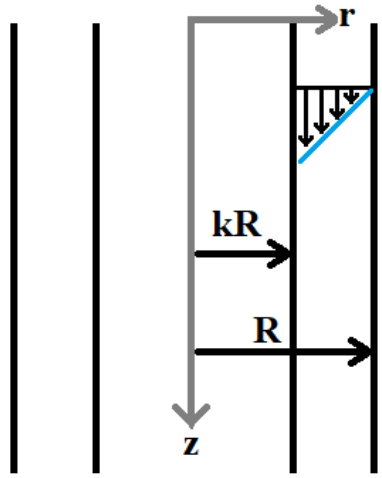

Figura 4. Esquema del perfil de velocidades de un flujo cortante simple planar infinito de un fluido newtoniano que se genera por el descenso del cilindro interno en otro cilindro.

Este problema puede analizarse a partir de las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas anteriormente descritas y considerando las condiciones de frontera siguientes,

$$v(r = R) = 0\ ;\ v\,(r = kR) = v_0. \qquad (10)$$

Si se ignora la gravedad, sin pérdida de generalidad, se obtiene la siguiente expresión para el perfil de velocidades,

$$v(r) = v_0 \frac{\ln(\frac{r}{R})}{\ln(k)}. \qquad (11)$$

Graficando la ecuación (11) se puede notar (ver figura 5) que este perfil está lejos de aproximarse al perfil del flujo cortante simple debido a la presencia de la función logaritmo.

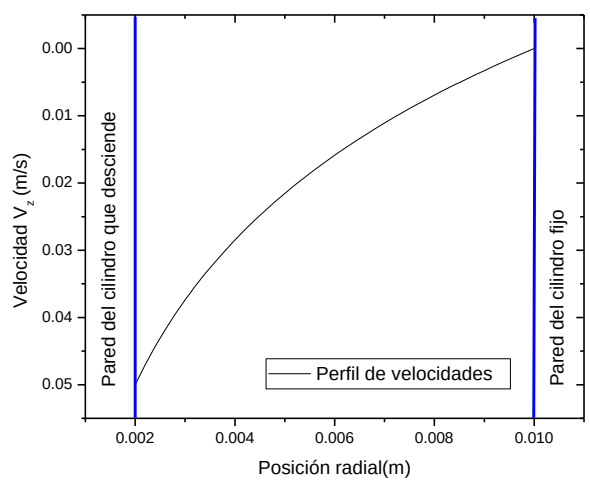

Figura 5. Perfil de velocidades del fujo generado por el descenso del cilindro interior para un fluido newtoniano. En este caso se consideraron los siguientes valores, $k = 0.2$, $R = 0.01m$, $kR = 0.002m$, $y\ v_o = 0.05m/s$.

Pero considerando un desarrollo en serie para el logaritmo natural, a saber,

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots. \quad (12)$$

Válido en el intervalo

$$2 \geq x > 0. \quad (13)$$

Por lo que realizando la aproximación a primer orden de la ecuación (11), se tiene que:

$$v_z(r) = v_o \frac{\left(\frac{r}{R}-1\right)}{(k-1)} = v_o \frac{(r-R)}{R(k-1)}. \quad (14)$$

Es decir,

$$v_z(r) = v_o \frac{(R-r)}{R-kR} = v_o \frac{(R-r)}{d}. \quad (15)$$

Donde se ha escogido, que $d = -R(k-1)$ lo que corresponde a la condición de flujo cortante simple de la Figura 1. Como puede verse, de esta ecuación el comportamiento de la velocidad es una función lineal en r y el radio R aparece debido a la elección de las condiciones de frontera del problema. En la Figura 6, se presenta el perfil generado bajo esta situación y que corresponde al perfil de velocidades de la Figura 1 pero en una posición vertical con el eje vertical z creciente dirigido hacia abajo.

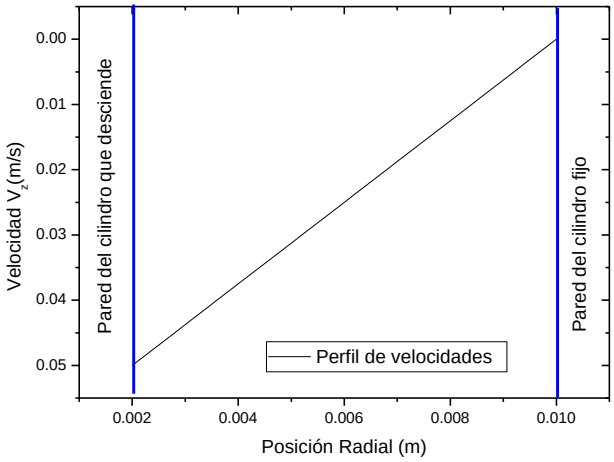

Figura 6. Perfil de velocidades del fujo cortante simple para un fluido newtoniano. El eje vertical z crece hacia abajo.

Otro sistema que se puede analizar en esta geometría consiste en agregar un gradiente de presión al problema anterior. Con estas condiciones se esperaría que este flujo sea una combinación del flujo cortante simple en la región que está en contacto con el cilindro interno y el caso del flujo de Poiseuille (Figura 7), ya que el movimiento del fluido también es causado por el gradiente de presiones que se tiene [4].

El campo de velocidades bajo esta situación está descrito por,

$$v_z = v(r);\ v_r = v_\theta = 0. \quad (16)$$

Además, de las siguientes condiciones de frontera,

$$v_z(r = kR) = v_o \quad y \quad v_z(r = R) = 0 \quad (17)$$

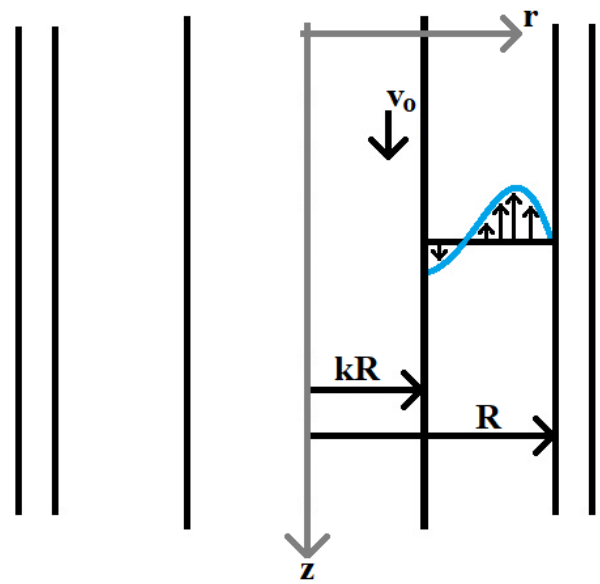

Figura 7. Esquema del perfil de flujo planar que se genera entre dos cilindros concéntricos infinitos, donde el cilindro interior de radio kR desciende a velocidad constante $v_z = v_o$ dentro de otro cilindro de radio R.

De las ecuaciones de momento (ecuaciones 1, 2 y 3), se puede ver que la componente de esfuerzo no nula es τ_{rz} que solo es función de la coordenada r. Mientras que la única condición del gradiente de presión no nula es $\frac{\partial p}{\partial z}$. A partir de estas consideraciones, las ecuaciones de momento se reducen a,

Componente r

$$0 = 0, \quad (18)$$

Componente θ,

$$0 = 0, \quad (19)$$

Componente z,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}\right) + \rho g_z. \quad (20)$$

Dado que la única componente no nula es la componente z y sin pérdida de generalidad considerando que $P = -p + \rho g_z z$ esta ecuación se reduce a,

$$0 = \frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}\right). \quad (21)$$

Integrando para obtener la expresión del esfuerzo, se tiene:

$$\tau_{rz} = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{r}{2} + \frac{c}{r}. \quad (22)$$

Donde c es una constante. Pero se sabe que en un punto arbitrario $r = \lambda R$ el esfuerzo es nulo $\tau_{rz} = 0$, entonces al sustituir esta condición se tiene,

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(r - \frac{(\lambda R)^2}{r}\right). \tag{23}$$

Por otra parte, se sabe que la ecuación para un fluido newtoniano está dada por:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r}. \tag{24}$$

Si se igualan estas dos expresiones y se integra para obtener la expresión del perfil de velocidades, se llega a:

$$v_z(r) = -\frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{r^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(r)\right) + c_1. \tag{25}$$

Aplicando las condiciones de frontera que se tienen, $v_z(r = kR) = v_o \;\; y \;\; v_z(r = R) = 0$ y resolviendo el sistema de ecuaciones que se genera para λ y c_1, el perfil de velocidad queda determinado por,

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}R^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \left[v_o + \frac{1}{4\mu}R^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)(k^2 - 1)\right]\frac{\ln(\frac{r}{R})}{\ln(k)}. \tag{26}$$

En la figura 8, se grafica este perfil de velocidades, note que el eje vertical z está dirigido hacia abajo, pues se ha supuesto que este eje se incremente en la dirección en que baja el cilindro. Asimismo, en la gráfica se ilustran las paredes de estos cilindros.

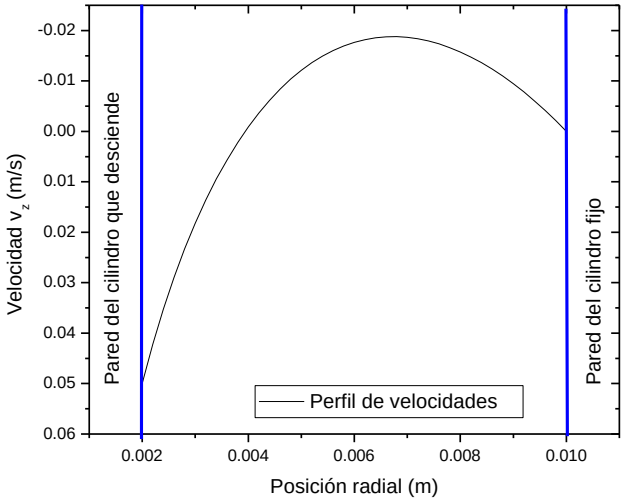

Figura 8. Perfil de velocidades planar del flujo generado entre dos cilindros infinitos en donde uno desciende a velocidad constante y además existe un gradiente de presión. En este caso se consideraron los siguientes valores, $k = 0.2$, $R = 0.01m$, $kR = 0.002m$, $\mu = 0.1Pas$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 1000Pa/m$, $v_o = 0.05m/s$. El eje vertical z es creciente hacia abajo.

Para la obtención del perfil de velocidades del flujo de corte simple y del flujo de Poiseuille, en la expresión (26) se hacen las consideraciones siguientes:

Haciendo que $k = 0$, el cilindro interno se elimina quedando solamente el flujo generado por el gradiente de presión, por lo que esta reducción conduce a la expresión del fujo de Poiseuille [5, 6], esto es,

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}R^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \tag{27}$$

Esto ocurre debido a que el logaritmo de k diverge ($\ln(k) \to \infty$) lo que hace que el segundo miembro de la ecuación (26) se anule. Reproduciendo así la expresión del perfil de velocidades del flujo de Poiseuille (ecuación 9).

Mientras que cuando el gradiente de presión es nulo $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, el flujo solo queda generado por el movimiento del cilindro interno, lo que conduce a la expresión del flujo cortante simple, es decir,

$$v_z(r) = [v_o]\frac{\ln(\frac{r}{R})}{\ln(k)}. \tag{28}$$

Esta expresión es la ecuación (11) obtenida anteriormente, por lo que su perfil también queda descrito por el perfil presentado en la figura 5 que como se mostró, utilizando el desarrollo en serie para el logaritmo natural esta expresión se reduce a,

$$v_z(r) = [v_o]\frac{(R - r)}{d}. \tag{29}$$

El cual corresponde a un perfil de velocidades que es lineal en r (ver figura 6).

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el flujo de un fluido newtoniano que está localizado entre dos cilindros de longitud infinita, donde el cilindro interior desciende a velocidad constante. El flujo es generado por el descenso del cilindro interior y un gradiente de presión que existe en el sistema.

Se obtuvo el perfil de velocidades que se genera bajo esta situación de flujo y se esquematizó. Además, se mostró que como casos particulares, cuando el cilindro interno se elimina se reproduce el flujo de Poiseuille, mientras que cuando se elimina el gradiente de presión, se obtiene una expresión del perfil de velocidades que corresponde al flujo cortante simple cuando el logaritmo natural se aproxima a primer orden.

La solución y desarrollo teórico a este problema es de gran aporte didáctico pues permitirá enfrentar a los estudiantes al análisis de situaciones límite y a la coherencia que debe de presentarse en el desarrollo y análisis de sus cálculos teóricos.

AGRADECIMIENTOS

AFMS y LPT son becarios SIBE y EDD.

REFERENCIAS

[1] Schramm, G., *A Practical Approach to Rheology and Rheometry* (Thermo Haake, 2a Edición, Federal Republic of Germany, 2000).
[2] Macosko, C. W., *Rheology Principles, Measurements, and Applications*, (Wiley-VCH, 1a Edición, Estados Unidos de América, 1994).
[3] Lohrenz, J., Swift G. W., and Kurata F., *An Experimentally Verified Theoretical Study of the Falling Cylinder Viscometer*, AIChE J. **6**, 547-550 (1960).
[4] Park, N., Irvine, Jr T. F., *Liquid Density Measurements using the falling needle viscometer*, Int. Comm. Heat Mass Transfer **24**, 303-312 (1997).
[5] Bird, R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N, *Fenómenos de transporte*, (Repla S. A. 1ª Edición, D.F. México, 1987).
[6] Lai, W. M., Rubin, D., Krempl, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, (Elsevier, 4th Edición, Oxford UK, 2010).
[7] Walters, K., *Rheometry*, (John Wiley & Sons, 1ª Edición, Gran Bretaña, 1975).