

Matrices ABCD en óptica



Alberto Francisco Sandino Hernández

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
Avenida San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, 09340 México, D.F.

E-mail: afsandino@gmail.com

(Recibido el 4 de Febrero de 2014; aceptado el 30 Junio de 2014)

Resumen

En este trabajo se presenta de manera didáctica, la derivación de la matriz ABCD para rayos que se propagan en el vacío así como también en lentes gruesas y delgadas con superficies esféricas, a partir de la aplicación de la óptica geométrica, por medio de un análisis matemático. En este proceso es importante la aplicación de la aproximación paraxial al problema, ya que ayuda a reducir las expresiones matemáticas obtenidas a ecuaciones lineales.

Palabras clave: matriz ABCD, aproximación paraxial, lentes.

Abstract

This paper presents the derivation of the ABCD matrix applying of geometrical optics, through an analysis mathematician for three cases: rays propagating in vacuum, thick and thin lenses with spherical surfaces. In this process, the application of the paraxial approximation to the problem is important because it helps to reduce the mathematical expressions obtained to linear equations.

Keywords: ABCD matrix, paraxial approximation, lenses.

PACS: 42.79.Bh, 02.10.Yn, 42.79.-e.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

A. Óptica Geométrica

La óptica geométrica se encarga de estudiar fenómenos ópticos describiendo la propagación de la luz como rayos rectilíneos. Dichos rayos están descritos por dos variables:

- la pendiente del rayo y ,

- la distancia entre un eje de referencia conocido como *eje óptico* y un punto perteneciente al rayo distinto al punto fuente del cual emerge.

Si tomamos en cuenta una fuente puntual en un punto objeto S que emite ondas esféricas, entonces los rayos representarán la dirección del frente de onda, la cual es radial. Estos rayos llegan a un sistema óptico (lente, espejo, etc.) propagándose en este hasta llegar a un punto imagen P . La línea recta perpendicular a las superficies del sistema óptico que une a los puntos S y P es el eje óptico (Ver Figura 1).

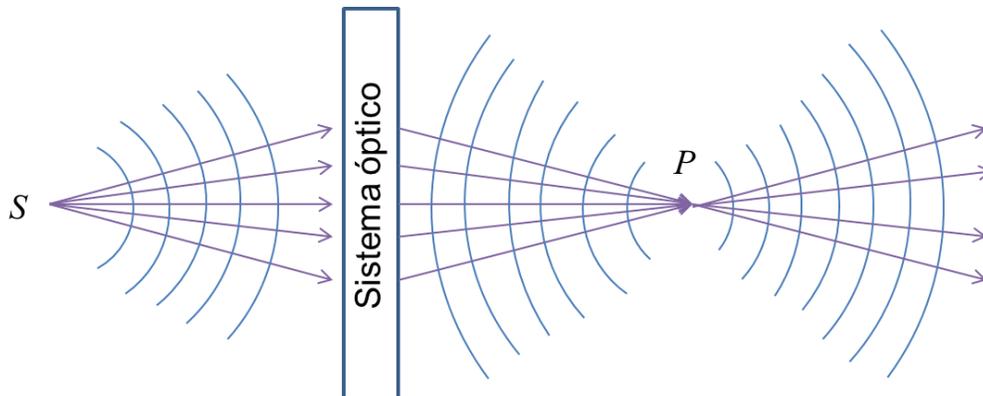


FIGURA 1. Representación de ondas esféricas a partir de rayo.

A continuación mencionamos las características que deben tomarse en cuenta para un sistema óptico:

- a) Sistema óptico estigmático: Este se refiere que al incidir rayos del punto objeto S hacia la superficie de un sistema óptico se consideran solamente un cono divergente de estos rayos, de la misma manera se considera otro cono convergente al punto imagen P en el otro lado del sistema óptico.
- b) Puntos conjugados: Cuando se intercambian de lugar los puntos objeto e imagen entre sí, es decir, se coloca el punto S en el lugar de P y el punto P en el de S , y se observa el mismo fenómeno descrito en el inciso anterior entonces se dice que los puntos son conjugados por principio de reversibilidad.
- c) Efectos por difracción: Aún en medios homogéneos, las ondas son difractadas. El grado de perfección alcanzable en la formación real de imágenes será limitado por la difracción. Para despreciar cualquier efecto por este fenómeno, en óptica geométrica se considera la longitud de onda $\lambda \rightarrow 0$, produciendo una propagación rectilínea en medios homogéneos.

B. Descripción matemática general de un rayo

En este apartado se presenta la descripción matemática general de los rayos emitidos, posteriormente en las siguientes secciones se mostrará la descripción matemática para casos particulares, como son la propagación en el vacío y en lentes tanto delgadas como gruesas. Para esta descripción general se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Anteriormente se mencionó que un rayo está descrito por su pendiente \dot{x}_j (donde $j = 1, 2, 3$ y el punto superior en la variable x representa la derivada con respecto a la dirección de propagación z) y la distancia entre el eje óptico y algún punto x_j ($j = 1, 2, 3$) de la pendiente.
- Un rayo pasa por distintos puntos en los cuales varía o mantiene constante su pendiente.

Así, la representación matemática general está dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + B\dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 &= Cx_1 + D\dot{x}_1, \end{aligned} \tag{1a}$$

cuya forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, \tag{1b}$$

donde la matriz de tamaño 2×2 es conocida como *matriz ABCD*.

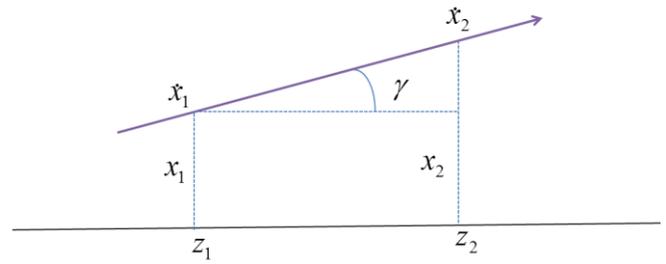


FIGURA 2. Esquema de un rayo.

II. PROPAGACIÓN EN EL VACÍO

A continuación se deducirá la matriz ABCD para el caso de propagación en el vacío o en un medio de índice de refracción n constante. En este caso no se toma en cuenta un sistema óptico. La pendiente del rayo no varía, debido a que está propagándose en un solo medio (Figura 2). Por lo tanto

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2,$$

comparando con (1a) se observa que $C = 0$ y $D = 1$.

Para obtener A considérese un rayo con pendiente cero (paralelo al eje óptico)

$$\dot{x}_1 = 0,$$

entonces su distancia al eje óptico es constante

$$x_1 = x_2,$$

esto implica que $A = 1$.

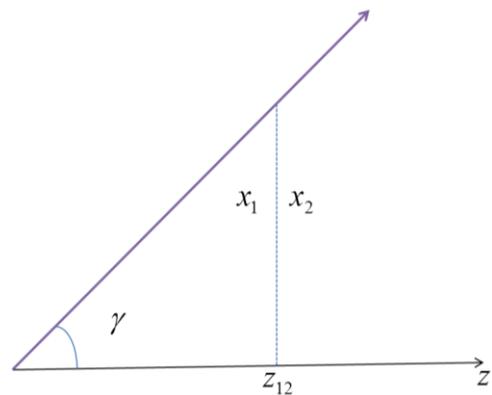


FIGURA 3. Esquema de un rayo en el vacío.

Finalmente para encontrar B se considera la Figura 3. Sea $z_1 = z_2 = z_{12}$, el haz se aleja del eje óptico una distancia

$$x_2 = z_{12} \tan \gamma = z_{12} \dot{x}_1,$$

donde γ es el ángulo entre el rayo y eje óptico. Si la pendiente del haz se mantiene constante entonces $B = z_{12}$.

Por lo tanto la matriz $ABCD$ de propagación en el espacio libre es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

III. LENTE GRUESA

A. Definición

Para iniciar esta sección, es importante saber que es una lente. Una lente es un dispositivo refractor que reconfigura la distribución de la energía emitida. Hay distintos tipos de lentes, para este caso se estudiará una lente con superficies esféricas, de la cual se obtendrá su matriz $ABCD$. En la figura 4 se puede observar la geometría de la lente a tratar:

- S y P son los puntos fuente e imagen.
- C_1 y C_2 son los centros de las superficies esféricas de la lente.
- R_1 y R_2 son los radios de curvatura de la superficie 1 y superficie 2 respectivamente.
- d es el grosor de la lente.
- V_1 y V_2 son los vértices de las superficies 1 y 2 respectivamente.

- θ_i y θ_t son los ángulos de incidencia y transmisión respectivamente.
- n_j es el índice de refracción del medio.

B. Aproximación paraxial y álgebra matricial

Los diseñadores de lentes han hecho uso de la óptica geométrica para poder desarrollar relaciones matemáticas y así describir los fenómenos relacionados con la incidencia de un haz sobre el lente, fenómenos como la refracción y la propagación de haces en un sistema óptico. Este tratamiento del fenómeno los ha llevado a obtener relaciones en forma matricial.

Se empezará por estudiar el fenómeno de propagación de un haz a través de una lente gruesa. Lo que nos llevará a la formulación de una matriz involucrando funciones seno y tangente.

Simplificando el estudio se realizará un desarrollo de Taylor de las funciones mencionadas:

$$\begin{aligned} \text{sen} \gamma &= \gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \dots \\ \tan \gamma &= \gamma + \frac{\gamma^3}{3} + \frac{2\gamma^5}{15} + \frac{17\gamma^7}{315} + \dots \end{aligned}$$

La aproximación paraxial asume que γ es muy pequeño, así que solamente se toma en cuenta hasta términos de primer orden, los de orden mayor son prácticamente despreciables.

Se hace uso de la teoría paraxial para construir una ecuación matricial lineal que describa la propagación de un haz a través de un sistema óptico.

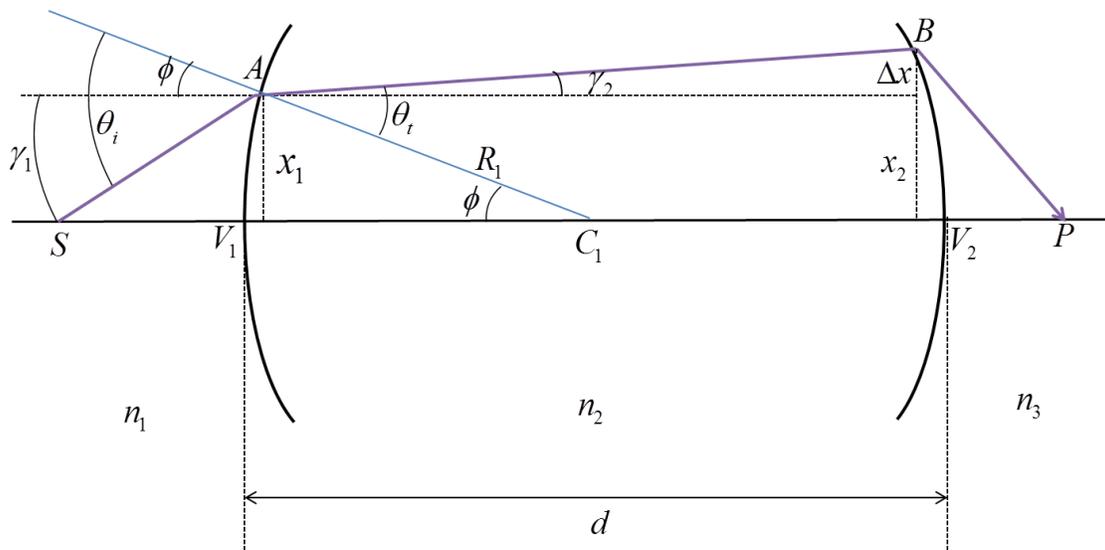


FIGURA 4. Esquema de la propagación de un rayo en una lente de grosor d .

C. Matriz de refracción R_1

En la Figura 4 se observa a un haz de luz proveniente de un punto objeto S que se propaga en un medio de índice de refracción n_1 e incide en un punto A de la superficie esférica, para después propagarse en un medio de índice n_2 y llegar a un punto B . Para comenzar su descripción matemática, se hará uso de la Ley de Snell que matemáticamente nos dice:

$$n_1 \text{sen}\theta_i = n_2 \text{sen}\theta_t.$$

Con el uso de la aproximación paraxial en esta ley tenemos que:

$$n_1\theta_i = n_2\theta_t, \tag{3}$$

donde se considera que $n_1 < n_2$.

En la Figura 4 se observa que el ángulo de incidencia está dado por:

$$\theta_i = \gamma_1 + \phi, \tag{4}$$

y el ángulo de transmisión por:

$$\theta_t = \gamma_2 + \phi. \tag{5}$$

De la geometría de la Figura 4 se obtiene:

$$\text{sen}\phi = \frac{x_1}{R_1}. \tag{6}$$

Haciendo de nuevo uso de la aproximación paraxial para la función seno, se obtiene que

$$\phi \approx \frac{x_1}{R_1}. \tag{7}$$

Los subíndices $j = 1, 2, 3$ en las variables $x, \dot{x}, \gamma, \dot{\gamma}$ indican el medio en donde se toman en cuenta, es decir, si el subíndice j es igual 1, entonces la variable pertenece al medio 1 y así sucesivamente.

Sustituyendo (7) en (4) y (5), para posteriormente sustituir el resultado en (3) se obtiene:

$$n_1 \left(\gamma_1 + \frac{x_1}{R_1} \right) = n_2 \left(\gamma_2 + \frac{x_1}{R_2} \right),$$

despejando γ_2 :

$$\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2} \gamma_1 + \frac{x_1(n_1 - n_2)}{n_2 R_1}, \tag{8}$$

la cual se puede reescribir como:

$$\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2} \gamma_1 + \frac{x_1 P_1}{n_2},$$

donde

$$P_1 = \frac{n_2 - n_1}{R_1}.$$

Es conocida como *potencia refractada* de la superficie 1 o simplemente potencia y es positiva dado a que $R_1 > 0$ y $n_1 < n_2$.

Por la geometría de la figura 4 y aplicando teoría paraxial, en general:

$$\dot{x}_j = \tan \gamma_j \approx \gamma_j,$$

entonces la ecuación (8) se transforma en:

$$\dot{x}_2 = \frac{n_1}{n_2} \dot{x}_1 + \frac{x_1(n_1 - n_2)}{n_2 R_1}. \tag{9}$$

La altura del punto A no cambia en ambos lados de la superficie, entonces

$$x_1 = x_2. \tag{10}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (9) y (10) forman un sistema de ecuaciones que podemos representar como un sistema matricial.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix},$$

Donde

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Es la *matriz de refracción* de la superficie 1. El determinante de la matriz \mathbf{R}_1 es

$$|\mathbf{R}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{vmatrix} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Así se muestra que solo depende de los índices de refracción de los medios 1 y 2 por donde se propaga el rayo.

D. Matriz de transmisión T

Ahora se obtendrá la matriz de transmisión del rayo dentro de la lente. Para ello, se considera las dos superficies de la lente. De la Figura 4 se observa que el rayo pasa por un punto A de la superficie 1, se propaga por la lente de índice de refracción n_2 y grosor d hasta llegar a un punto B de la

superficie 2, para luego salir a un medio de índice de refracción n_3 .

De la geometría de la figura 4, se muestra que:

$$x'_2 - x_2 = \Delta x = d \tan \gamma_2 \approx d\gamma_2. \quad (12)$$

El ángulo γ_2 no cambia del punto A al punto B . Pero la altura cambia de x_2 a x'_2 . Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'_2 = x_2 + d\gamma_2 \\ \gamma'_2 = \gamma_2 \end{cases}. \quad (13)$$

Aplicando la aproximación paraxial:

$$x_j = \tan \gamma_j \approx \gamma_j$$

A (13) se obtiene, ya en su forma matricial, el sistema de ecuaciones en términos de la altura y de la pendiente del rayo:

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ \dot{x}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Es la matriz de transmisión y su determinante es:

$$|\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

E. Matriz de refracción \mathbf{R}_2

El método de obtención de la matriz de refracción \mathbf{R}_2 es el mismo al anteriormente expuesto para la obtención de \mathbf{R}_1 , solo que ahora se considera los dos lados de la superficie 2.

En este caso, el rayo se propaga de un medio de índice n_2 a otro medio de índice n_3 . Entonces, la ecuación matricial de refracción de la superficie 2 es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ \dot{x}'_2 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de refracción para esta superficie es:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

El determinante de la matriz \mathbf{R}_2 es:

$$|\mathbf{R}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{vmatrix} = \frac{n_2}{n_3}.$$

Se ve claramente que el determinante depende solo de los índices de refracción de los medios 2 y 3 por donde se propaga el rayo.

La potencia en la superficie 2 es:

$$P_2 = \frac{n_2 - n_3}{R_2}.$$

Así, la potencia del rayo en la lente es:

$$P = P_1 + P_2.$$

F. Matriz ABCD de la lente gruesa

El producto de las tres matrices da como producto la matriz \mathbf{S} del sistema

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T} \mathbf{R}_1$$

o mejor conocida como la matriz $ABCD$ de la lente gruesa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (16)$$

Las componentes de la matriz son

$$A = 1 + \frac{d(n_1 - n_2)}{n_2 R_1},$$

$$B = \frac{dn_1}{n_2},$$

$$C = \frac{1}{n_3} \left[\frac{n_2 - n_3}{R_2} + \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{d(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)}{n_2 R_1 R_2} \right],$$

$$D = \frac{n_1}{n_3} \left[1 + \frac{d(n_2 - n_3)}{n_2 R_2} \right].$$

El determinante de la matriz de la lente gruesa es:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{R}_2| |\mathbf{T}| |\mathbf{R}_1| = AD - BC = \frac{n_1}{n_3},$$

se observa que solo depende de los índices de refracción de los medios 1 y 3.

IV. LENTE DELGADA

A. Matriz ABCD de la lente delgada

Se puede obtener la matriz ABCD de una lente delgada, a partir de la matriz de una lente gruesa, si se considera $d \rightarrow 0$, entonces se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_2 - n_3}{R_2} + \frac{n_1 - n_2}{R_1} \right) & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Si los medios 1 y 3 son aire, es decir, $n_1 = 1$ y $n_3 = 1$, se obtiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

B. Matriz ABCD de la lente delgada (Derivación alternativa)

Otra manera de obtener la matriz ABCD de una lente delgada es analizar la Figura 5, donde se muestra tres rayos distintos que se propagan dentro de la lente.

Primero se toma en cuenta el haz 2, en la figura se observa que si la lente es muy delgada las distancias x_1 y x_3 al eje óptico se consideran prácticamente iguales ($x_1 = x_3$), esto implica que $A = 1$ y $B = 0$ en la expresión (1a).

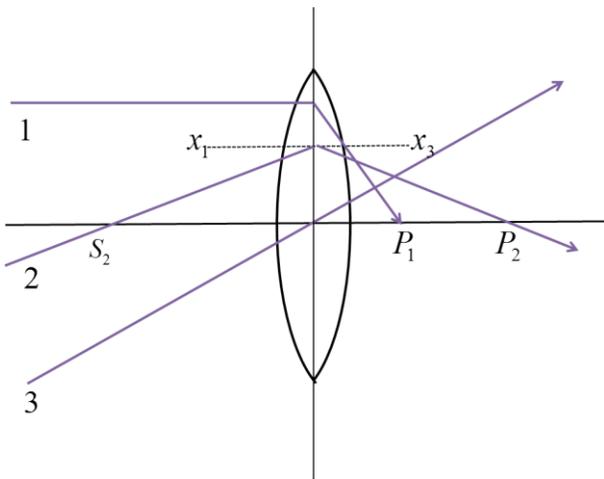


FIGURA 5. Esquema de la propagación de un rayo en una lente delgada.

Ahora considerando el haz 3 que es paralelo al eje óptico y pasa por el centro geométrico de la lente, dicho haz no se desvía, por definición. Entonces su pendiente permanece constante y la distancia al eje óptico es nula, por lo que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dot{x}_1, \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $D = 1$.

Finalmente considerando el haz 1 con pendiente cero (paralelo a eje óptico) al atravesar la lente y llegar al foco P_1 adquiere una pendiente $\frac{x_3}{f}$. La cantidad f es la distancia focal que se mide del centro de la lente al foco. Obtenemos entonces las relaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{1}{f} x_1, \\ \dot{x}_1 &= 0. \end{aligned}$$

por lo que $C = \frac{1}{f}$. Entonces, la matriz ABCD es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Comparando la matriz (17) con la matriz (19) se obtiene una relación que involucra la distancia focal con los índices de refracción de los medios y los radios de curvatura de la lente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_2 - n_3}{R_2} + \frac{n_1 - n_2}{R_1} \right) \quad (20)$$

si $n_1 = n_3 = 1$, es decir, la lente se encuentra en el aire, se obtiene:

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (21)$$

Que es conocida como la *ecuación de fabricantes de lentes*.

V. COMENTARIOS FINALES

Si ahora consideramos rayos propagándose a través de varios sistemas ópticos, uno seguido del otro y con su respectiva matriz ABCD, entonces la ecuación matricial que describe al fenómeno será:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que el producto de matrices es asociativo pero no conmutativo. Físicamente esto quiere decir que al variar el orden de los sistemas ópticos simplemente no se repetirá el mismo fenómeno que se observó en un orden anterior.

Por último, cabe mencionar que cualquier sistema óptico, en principio, tiene su respectiva matriz ABCD. Entre estos sistemas se pueden mencionar espejos, lentes planos, cóncavos o convexos, vidrio, etc.

REFERENCIAS

- [1] Blaker, J. W., *Geometrics optics. The matrix theory*, (Marcel Dekker Inc., New York, 1971).
- [2] Guenther, R. D., *Modern Optics*, (John Wiley & Sons, USA, 1990).
- [3] Hecht, E., *Óptica*, 3era. Ed. (Addison Wesley, Madrid, 2000).
- [4] Nussbaum, A., *Contemporary Optics for Scientists and Engineers. Solid State Physical Electronics Series*. (Prentice Hall, USA, 1976).
- [5] Resnick R, Halliday, D. y Krane, K. S., *Física Vol. 2*, 4ta. Ed. (Grupo Editorial Patria, México, 2009).