



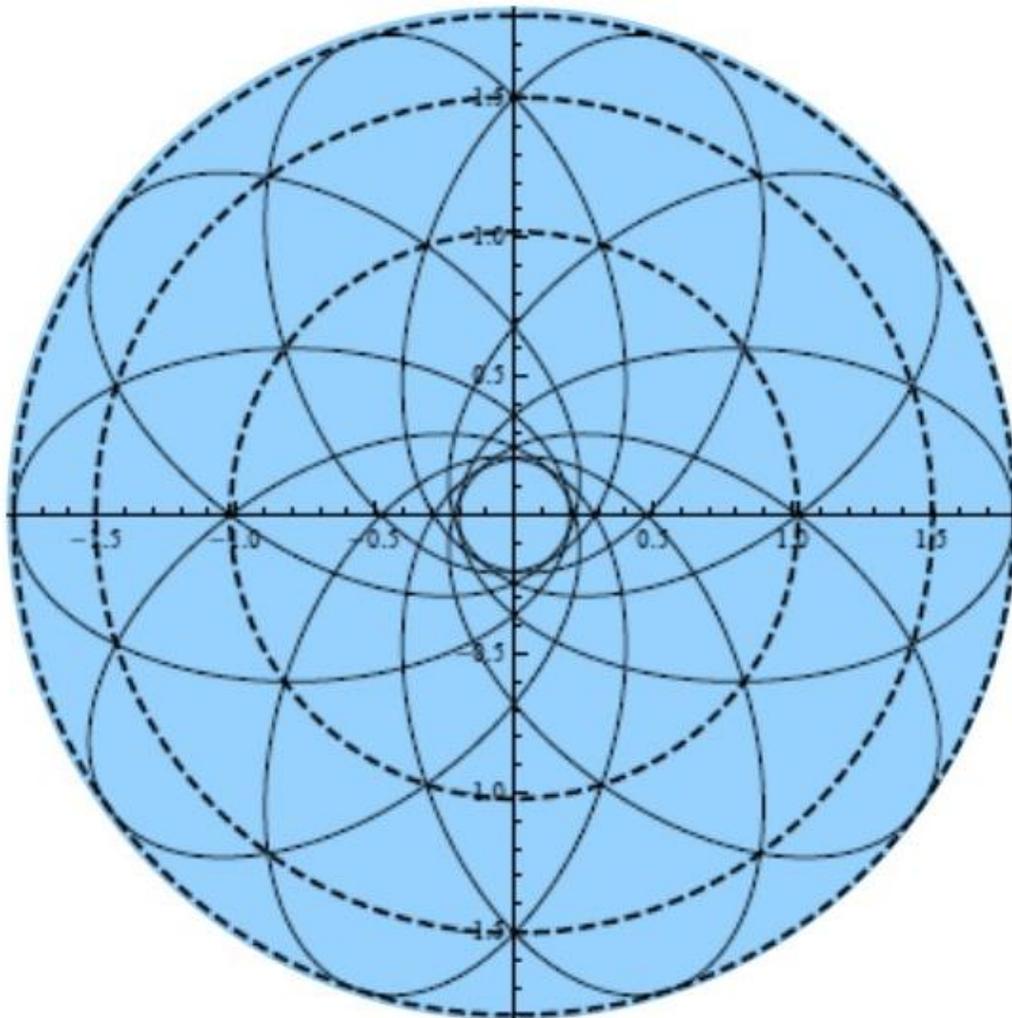
LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

www.lajpe.org

Volume 8

Number 2

June 2014



A publication sponsored by the Latin American Physics Education Network
and the Institute of Science Education



LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Electronic version of this journal can be downloaded free of charge from the web-resource:

<http://www.lajpe.org>

Production and technical support

Daniel Sánchez Guzmán
dsanchez@ipn.mx
Rocío Bonilla Castellan
chio@lapen.org.mx

Latin American Journal of Physics Education is indexed in:

DOAJ

Dialnet

latindex

EBSCO
PUBLISHING

INDEX COPERNICUS
INTERNATIONAL

EDITORIAL POLICY

Latin American Journal of Physics Education (LAJPE) is a peer-reviewed, electronic international journal for the publication of papers of instructional and cultural aspects of physics. Articles are chosen to support those involved with physics courses from introductory up to postgraduate levels.

Papers may be comprehensive reviews or reports of original investigations that make a definitive contribution to existing knowledge. The content must not have been published or accepted for publication elsewhere, and papers must not be under consideration by another journal.

This journal is published quarterly (March, June, September and December), by the Latin American Physics Education Network (LAPEN) and the Institute of Science Education. Manuscripts should be submitted to cmoral@ipn.mx or lajpe@lapen.org.mx. Further information is provided in the "Instructions to Authors" on www.lajpe.org

Direct inquiries on editorial policy and the review process to: Cesar Mora, Editor in Chief, CICATA-IPN Av. Legaria 694, Col Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, CP 11500 México D. F.

Copyright © 2014 César Eduardo Mora Ley, *Latin American Physics Education Network*. (www.lapen.org.mx)

ISSN 1870-9095

INTERNATIONAL ADVISORY COMMITTEE

Ann-Marie Pendrill, Göteborgs University (Sweden)
Bayram Akarsu, Erciyes University (Turkey)
Carl Wenning, Illinois State University (USA)
Diane Grayson, Andromeda Science Education (South Africa)
David Sokoloff, University of Oregon (USA)
Dean Zollman, Kansas State University (USA)
Edward Redish, University of Maryland (USA)
Freidrich Herrmann, University of Karlsruhe (Germany)
Gordon Aubrecht II, Ohio State University (USA)
Hiroshi Kawakatsu, Kagawa University (Japan)
Jorge Barojas Weber, Universidad Nacional Autónoma de México (México)
Jorge Valadares, Universidade Aberta de Lisboa, (Portugal)
Laurence Viennot, Université Paris 7 (France)
Lillian C. McDermott, University of Washington (USA)
Marisa Michelini, University of Udine (Italy)
Marco Antonio Moreira, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brazil)
Minella Alarcón, UNESCO (France)
Orhan Karamustafaoğlu, Amasya University, (Turkey)
Pratibha Jolly, University of Delhi (India)
Priscilla Laws, Dickinson College (USA)
Ton Ellermeijer, (Netherlands)
Verónica Tricio, University of Burgos (Spain)
Vivien Talisayon, University of the Philippines (Philippines)

EDITORIAL BOARD

Deise Miranda, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)
Eduardo Moltó, Instituto Superior Pedagógico José Varona (Cuba)
Eduardo Montero, Escuela Superior Politécnica del Litoral (Ecuador)
Josefina Barrera, Universidade do Estado do Amazonas (Brasil)
Julio Benegas, Universidad Nacional de San Luis (Argentina)
Leda Roldán, Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
Celso Ladera, Universidad Simón Bolívar (Venezuela)
Manuel Reyes, Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)
Mauricio Pietrocola Universidad de Sao Paulo (Brasil)
Nelson Arias Ávila, Universidad Distrital, Bogotá (Colombia)
Octavio Calzadilla, Universidad de la Habana (Cuba)
Ricardo Buzzo Garrao, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
Zulma Gangoso, Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

EDITOR-IN-CHIEF

César Mora, Instituto Politécnico Nacional (México)

ASSOCIATED EDITOR

Josip Sliško, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Volume 8, Number 2, June 2014

CONTENTS/CONTENIDO

Editorial	235-236
Papers/Artículos	
Teaching basic physics through Excel spread sheets Subramaniyan, A. L.	237-240
Simplifications and idealizations in high school physics in thermodynamics, electricity and waves: A study of Slovenian textbooks Matej Forjan, Josip Sliško	241-247
Compression and expansion processes for atmospheric air: teaching thermodynamic response coefficients Rodolfo Acevedo Chávez, María Eugenia Costas	248-254
Quantum Mechanics of the Solar System L. Acedo	255-262
Laser de rubi: uma abordagem baseada em unidades de ensino potencialmente significativas (UEPS) Daniela Schittler, Marco Antonio Moreira	263-273
Ideas alternativas acerca de la carga eléctrica, los materiales conductores y aislantes en estudiantes de la educación media Aarón Segura, Duván López, Julián Pulecio	274-280
Experimentos sencillos en magnetismo con materiales de bajo costo: desarrollo de modelos y terminología a partir de las observaciones Shitu, Jorge	281-291
Una alternativa de comunicación educativa, empleando nuevas técnicas en el proceso enseñanza-aprendizaje en las asignaturas de Física y Matemática en la enseñanza semipresencial de la carrera de Informática J. F. Valiente-Márquez, T. R Ruiz-González, J. J. Llovera-González, M. T Hernández –Valmaña	292-298
Equivalente electro-mecánico del calor usando tecnología computarizada Montero, Germán, Rodríguez, Nicolas	299-303

continued/continuación

contents/contenido

Matrices ABCD en óptica Alberto Francisco Sandino Hernández	304-310
Enseñanza de plasmas físicos en el nivel medio superior Fidel Benjamín Alarcón Hernández, María del Pilar Segarra Alberú, Jorge Barojas Weber	311-320
Modeling the one-dimensional oscillator with variable mass Hilário Rodrigues, Nelson Panza, Dirceu Portes, and Alexandre Soares	321-327
¿Es estable el Sistema Solar? José J. Arenas	328-334
Física 1++: Aulas de aprendizaje cooperativo para estudiantes que recursan Sandra Kahan, Adriana Auyuanet, Federico Davoine y Cecilia Stari	335-341
Circuito RC en descarga. Signo y sentido de la corriente Osaba-Rodríguez, C.	342-344
La tecnología en el aula de clase: De las calculadoras graficadoras a los ambientes virtuales de aprendizaje Elvia Rosa Ruiz Ledezma	345-354
Usando el patrón de interferencia de la doble rendija para obtener el espesor de una lámina delgada transparente Julio Guevara	355-358
Matriz no trivial con autovalores de Stern-Gerlach construida a través de la solución para un problema inverso del álgebra matricial J. D. Bulnes	359-362
A preliminary determination of the kinetics parameters of doped NaCl: Ca, Mn single crystals during fading stage Alejandro Ortíz Morales, Claudio Furetta	363-367
Spatial frequency response of a human eye apodized with the stiles crawford effect of the first kind in coherent illumination Nachieketa K Sharma, K. Mishra, S. K. Kamilla, Jatadhari K Sharma	368-373

continued/continuación

contents/contenido

Space science and astronomy awareness

Somoye, E. O., Akala, A. O., Ogwala, A., Adeniji-Adele, R. A.,
Iheonu, E. E., Onori, E. O.

374-377

Investigation of structure and properties of Graphene

Hosseinpour, Mansoureh, Hosseinpour, Maryam

378-380

Dear colleagues, as you know LAJPE is a free periodical on-line journal; unfortunately, 2014 has been a very difficult year for the normal operation of delivering, mainly because of the financial funding. Our philosophy about sharing scientific information is very simple; we agree and support the free spread of knowledge as was stated in the Berlin Declaration. It is known that the edition of journals is a very lucrative business, but our position is firm, we maintain a free journal for Physics Education students, researchers and Physics teachers. Most of the money for the complex editorial process is given by means of research projects made in the National Polytechnic Institute in Mexico City. In addition, private funding from the Institute of Science Education is so valuable and important in order to accomplish the big task of having an on-line free journal.

We apologize for the delayed issues, but we hope that the regularity will be the same as the beginning, four issues each year, launched on March, June, September and December. In this way, we present you a new issue of LAJPE with interesting contributions that include papers of researchers from Argentina, Brazil, Colombia, Cuba, Spain, Ethiopia, India, Iran, Mexico, Peru, Venezuela and the U.S.A. We appreciate the patience of the authors and readers because of the time of occurrence of this issue due to force majeure. You can be sure that we are going to continue with the current policy of being a free-access journal online for everybody. In general, the small support to science in Latin America region have negative consequences especially to Science Education. It is a pity, but the institute of Science Education should be close the bank account because of the lack of support, however academic support will be given for all the community through the activities of the Latin American Science Education Research Association (LASERA) located in Mexico and Brazil. We therefore call on researchers in the field of Physics Education, physicists, physics teachers and anyone interested in Science Education to propose research projects and training teacher programs in Physics for the poorest regions of our planet. We have no doubt that gradually contribute to improving the teaching of Physics

On behalf of the editorial team LAJPE appreciate your support and preference.

César Mora
Editor in Chief

Estimados colegas, como ustedes saben LAJPE es una revista periódica en línea gratuita; lamentablemente, 2014 ha sido un año muy difícil para la operación normal de la misma, esto debido principalmente a la falta de recursos. Nuestra filosofía de compartir información científica es muy simple; estamos de acuerdo y apoyamos la libre difusión del conocimiento tal como se afirma en la Declaración de Berlín. Se sabe que la edición de las revistas es un negocio muy lucrativo, pero nuestra posición es firme, mantendremos una revista de libre acceso para estudiantes de Educación en Física, investigadores y profesores de Física. La mayor parte del dinero para el complejo proceso editorial se da mediante el desarrollo de proyectos de investigación realizados y patrocinados por el Instituto Politécnico Nacional en la Ciudad de México. Asimismo, la financiación privada del Instituto de Educación en Ciencias es muy valioso e importante para lograr la gran tarea de tener una revista en línea gratuita.

Pedimos disculpas por los problemas de retraso, pero esperamos que la regularidad será la mismo que al principio, esto es, cuatro números al año, publicados en marzo, junio, septiembre y diciembre. De esta forma, les presentamos una nueva edición de LAJPE con interesantes aportaciones que incluye trabajos de investigadores de Argentina, Brasil, Colombia, Cuba, España, Etiopía, India, Irán, México, Perú, Venezuela y los EE.UU. Apreciamos la paciencia de los autores y lectores debido al tiempo de aparición de la revista por causas de fuerza mayor. Pueden estar seguros de que vamos a continuar con la política de ser una revista en línea de libre acceso para todo el mundo. En general, el pequeño apoyo a la ciencia en la región de América Latina tiene importantes consecuencias negativas, principalmente para la Educación en Ciencias. Es una lástima, pero el Instituto de Educación en ciencias va a cerrar su cuenta bancaria debido a la falta de apoyo. Sin embargo, seguirá dando apoyo académico para toda la comunidad a través de las actividades de la Asociación Latinoamericana de de Investigación en Educación en Ciencias (LASERA), con sede en México y Brasil.

Hacemos pues, un llamado a investigadores del área de Educación en Física, a físicos, a maestros de Física y a todos aquellos interesados en la educación en ciencias a establecer proyectos de investigación y de formación de profesores en Física en las regiones más pobres de nuestro planeta. No tenemos duda de que poco a poco contribuiremos a mejorar la enseñanza de la Física

A nombre del equipo editorial de LAJPE agradecemos su apoyo y preferencia.

César Mora
Editor en jefe

Teaching basic physics through Excel spread sheets



Subramaniyan, A. L.

Thiyagarajar College of Engineering, Madurai 625015, India.

E-mail: alsphy@tce.edu

(Received 16 August 2013, accepted 30 March 2014)

Abstract

There is a strong dependence of mathematics in understanding the basic laws of physics. Many physics problems demand a sound mathematical knowledge and can be solved or interpreted in a quick or better way with the basic mathematics. Some of the physics concepts which have a mathematical relationship are the motion of bodies in one and two dimensions, charging and discharging of a capacitor, nuclear radioactivity, simple harmonic motion. The above concepts demand the understanding of the algebraic, trigonometric exponential and probability functions. The dynamic mathematics can also lead to a study of physical phenomena if coupled at the right point of delivery by the instructor. Thus, the maths tutors that have already being designed can also serve the additional purpose of learning physics. This work highlights the physics concepts which can be dealt with existing dynamic and interactive mathematic learning environment

Keywords: Physics problems, mathematical functions, interactive mathematics.

Resumen

Hay una fuerte dependencia de las matemáticas para la comprensión de las leyes básicas de la física. Muchos problemas de la física exigen un conocimiento matemático sólido y pueden ser resueltos o interpretarse de manera rápida o mejor con las matemáticas básicas. Algunos de los conceptos físicos que tienen una relación matemática son el movimiento de los cuerpos en una y dos dimensiones, la carga y descarga de un condensador, la radioactividad nuclear, el movimiento armónico simple. Los conceptos anteriores exigen la comprensión de las funciones exponenciales, trigonométricas algebraicas y de probabilidad. Las matemáticas dinámicas también pueden dar lugar a un estudio de los fenómenos físicos, si se combinan en el punto exacto por parte del instructor. Así, los profesores de matemáticas que ya se están diseñando, también pueden servir al propósito adicional de aprendizaje de la física. Este trabajo subraya los conceptos de la física que se pueden ser manejados en el ambiente de aprendizaje matemático dinámico e interactivo existente

Palabras clave: Problemas de física, funciones matemáticas, matemáticas interactivas.

PACS: 01.40.gb, 01.40.-d

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Over the past decade teaching in high schools and university has shifted from the teacher centric environment to the learner centric environment. The concept is also termed as active learning where learners are continuously involved in various activities including quiz, role play, demonstrations, model making, group discussions. Active learning has not been precisely defined in education literature but has the general characteristics that students can be engaged in various activities including reading ,writing discussing and giving importance to students exploration of their own thinking values [2]. Techniques like the mind mapping and discovery sheet have also been used to achieve the student centered approach [3]. Teaching of difficult concepts is more challenging to the teacher. This is already emphasized by Kholer and Misra on “what makes concepts difficult or easy to learn” [4].

Teaching Physics has also changed over the past decade. The internet has been used as a vital tool in making students actively involved in the classroom environment [5]. Physics teaching has also been made more interesting and active environment can also be maintained by simulations. Kurt Squire has made the attempt of teaching electromagnetism by simulation [6]. Yiming ding has designed a computer simulation laboratory to simulate the diffraction grating pattern by C++ program [7]. Arotius, Kohler and Misra have analyzed the effect of playing a game, physics and the results are in support for teaching physics through games [8]. Yannis Hadzigeorgiou [9] has highlighted the importance of teaching by a story telling concept especially when the teacher has to teach the laws of physics. William D. Gearce has highlighted the reasons for the the failure of physics teaching by traditional methods [10].

There is a demanding situation from teachers to change the mode of teaching to get effective learning in classroom.

Over the years teaching has changed from the blackboard, Power point presentations, seminars to group discussions, games, animations, simulations, quiz. Some researchers have also suggested a mixed mode of teaching in the classroom to benefit all type of learners, L. A. Dobrzański, F. Brom, Z. Brytan have demonstrated the importance of teaching materials science by module and also the importance of mixed mode of learning [11]. Morten Brekke has reported on Using computer technology in physics, mathematics and computer science [12]. Recently Martinova and Zakaria Karadag have presented a new way of learning limits by a dynamic mathematic and interactive learning environment by use of Excel and Geogebra [1]. The present work deals on extending the same concept to physics teaching. Use of DIMLE can offer the following advantages to physics teaching

- a) Achieving active learning which is most desired.
- b) Individual thinking from each learners.
- c) Appreciating the mathematics involved in physics.
- d) Understanding the behavior of a physical law at the boundary conditions.
- e) Analyzing the rate of change of the behavior.
- f) Help the students think of higher cognitive level in blooms taxonomy (apply, analyse and design).
- g) May create research interest for subject beginners.
- h) Be highly motivating for the visual learners, innovators and satisfy all type of learners.
- i) It may also help the student to remember the concept for a larger time when compared to conventional teaching.
- j) Economical way of teaching instead of performing live experiment in special cases (radioactivity, nuclear collision).

II. TEACHING PHYSICS WITH MATHEMATICS ENVIRONMENT

Mathematics environment can be used to teach all those concepts in physics where mathematical equations or mathematical functions are involved.

Example include: Algebraic function in motion in one dimension, trigonometric functions in simple harmonic function, exponential functions in radioactivity, complex functions for dielectric constant, etc.

The above process can be taught with the Excel sheet and parallel analysis in the classroom.

A. Motion in one dimension

Imagine a ball falling from a height of 10 m .The student can be asked to find the velocity at any point acceleration and impulse imparted to the wall, nature of collision etc.

The above situation is best understood by allowing the learner to drop the ball from 10 m, measure the time of fall with a stop clock and calculate the velocity by the corresponding formulae $v = \text{square root } (2gh)$.

Then, the mass of the ball can be determined and the change in momentum can be determined by $2mv$.

The process of change in velocity can also be understood with a excel spread sheets and it will be more useful when the height is extremely less .Even in the case of dropping the ball from a height of 10 m ,it will be very difficult to measure the time accurately. Hence, alternative aids of teaching are to be adopted. Animation are handy in the current context but studying through the Excel sheet will demand more involvement and active learning from the student.

The teacher can give the following *instructions* to the learners with a specified time line to complete the task

- a) *What are the values of height that can be given to the ball?*

Since the ball is dropped from a height of 10 m from bottom of floor,the height from top is

0,1,2,3,4,5.....10

Some students can think of intermediate values

0,0.5,1.5....6.5,.10

Others may enter values at random 4.9, 6, 9.8, 10.

- b) *What is the relation between the velocity and displacement (height) for a freely falling ball.*
 $v = \text{square root } (2gh)$ where g is the acceleration due to gravity
- c) *Enter your choice of displacement as in step a) and the formulae in column B of excel sheet and plot the graph of velocity and displacement.*

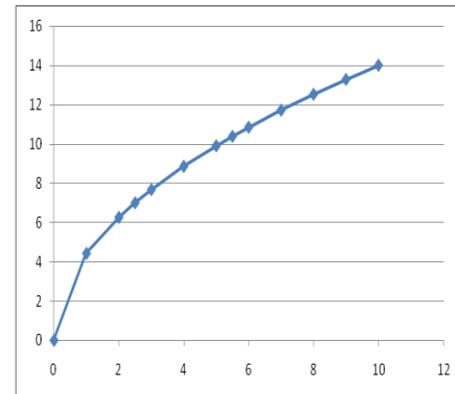


FIGURE 1. Graph with displacement on x axis and velocity on y axis.

- d) *What are the formulae for time of fall from the top to the bottom of the floor? Plot the graph of time and height of the ball $\text{Sqrt}(2g/h)$.*

The above problem can further be made interesting by asking the student to consider the collision between the ball on different surfaces like tennis ball on marble floor and rubber ball on sand or elastic ball on glass, The student can be asked to repeat the questions (a, b, c and d) given above for elastic and inelastic collisions. Elastic collisions are collisions in which momentum and kinetic energy are conserved. It is an ideal collision. Inelastic collisions are real collisions as the examples cited above and are collisions where energy is dissipated as heat. The student are expected to interpret the change in velocity for elastic and inelastic collision.

In elastic collision the ball rebounds with same velocity on reaching the floor and in inelastic collision the velocity of rebound changes according to coefficient of restitution between the body and the surface. The student can best understand this concept by doing the experiment practically but since the ball rebounds fast the learner may not be able to appreciate the decrease in velocity in an inelastic collision with time. By plotting the same on an excel sheet the student will understand the rate of change and also appreciate the physical phenomena of damping (energy loss in a system).

The student is expected to get the same graph as shown in figure 1. The process repeats indefinitely for elastic collision but for inelastic collision as time passes the maximum height decreases for each collision and the ball finally comes to rest.

The teacher can give the chance for the student to explore various aspects from the graph like finding the slope of the time velocity or velocity –displacement graph and analyze them further. The use of excel as a dynamic mathematics' environment is helpful in achieving the higher end of blooms cognitive domain like to apply, to analyze and to evaluate category [13]. At the same time the importance of mathematics in understanding physics is much appreciated by the learner. Many physical phenomena can be fun when explored with excel sheets or other suitable environments.

Further DIMLE is also a brain based approach on students as elaborated by Erkan Akyurek [14]. The same case of motion of a falling body has been done by an experiment set up in combination with a computer based measurement by Elmar Bergler [15].

III. CONCLUSIONS

The importance of mathematics in understanding physics is highlighted with the help of Excel sheet. Thus, dynamic mathematics' environment are a vital tool for achieving active learning in the class. The mode of teaching will be individual based learning by the student with a set of instructions from the teacher. The use of the dynamic mathematics' environment can be suitable to all category of learners from slow to fast. Further, it is a tool in achieving the higher end of blooms taxonomy of cognitive domain.

If a particular session is coupled with laboratory session followed by a dynamic mathematics approach students can remember and highly appreciate the concept. It can be the best alternative to power point presentations, ppts, quiz. With the obtained input, the teacher can motivate the student to design and evaluate the real time devices and also access quality of existing devices. It can leave the student with a quest for knowledge and to explore all physical phenomena for a better understanding. The use of spread sheets is a method of active learning and active learning has been reported as successful with ISLE [16]. The undergraduate student can be highly motivated from a research perspective. Geogebra has also been used for calculating the surface area of water in a rolling cylinder by Muhareen Aktumen [17].

ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to thank Dr. V .AbhaiKumar for providing an opportunity to be related to pedagogy activities of the college .The advice of all pedagogy members is appreciated and the useful input about DIMLE is greatly acknowledged to Dr. Zakaria Karadag.

REFERENCES

- [1] Martinovic, D. and Karadag, Z., *Dynamic and interactive mathematics learning environments: The case of teaching the limit concept*, J. Teaching Mathematics and Its Applications. **31**, 41-48 (2012).
- [2] Sudhir I., Mehta, A *method for instant assessment and active learning*, Journal of Engineering Education **84**, 295-298 (1995).
- [3] Catalano, G. D., *Some ideas on teaching of engineering science –A student centered approach*, Journal of Engineering Education **84**, 1-3 (1995).
- [4] Koehler, M. J. & Mishra, P., *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators*, (Edited by AACTE Committee on Innovation and Technology and Routledge, New York, 2008).
- [5] Toback, D., Mershin, A., Novikova, I., *New Pedagogy for Using Internet-Based Teaching Tools in Physics Course*. Department of Physics, (Texas A&M University, College Station [Arxiv 0408/0408034], 2011).
- [6] Squire, K., Barnett, M. Grant, J. M., Higginbotham, T. *Electromagnetism supercharged! Learning physics with digital simulation games*. Curriculum & Instruction, School of Education, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI 53706. Proceedings of the 6th International Conference on Learning Sciences. (2004) Online at: <http://www.educationarcade.org/files/articles/Supercharged/SuperchargedResearch.pdf>.
- [7] Ding March, Y., *Using a Simulation Laboratory to Improve Physics Learning: A Case Exploratory Learning of Diffraction Grating*, Education Technology and Computer Science, 2009. ETCS '09. First International Workshop (2009).
- [8] Foster, A., Koehler, M. & Mishra, P., *Game-Based Learning of Physics Content: The Effectiveness of a Physics Game for Learning Basic Physics Concepts*. In E. Pearson & P. Bohman (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications*, (2006) pp. 2119-2125.
- [9] Hadzigeorgiou, Y., *Humanizing the teaching of physics through storytelling: the case of current electricity*, Phys. Educ. **41**, 42 (2006).
- [10] Gerace, W. J. & Beatty, I. D., *Teaching vs. learning: Changing perspectives on problem solving in physics instruction*, Proceedings of the 9th Common Conference of the Cyprus Physics Association and Greek Physics Association: Developments and Perspectives in Physics—New Technologies and Teaching of Science (invited), Nicosia, Cyprus, Feb 4–6, (2005).

- [11] Dobrzański, L. A., Brom, F., Brytan, Z., *Use of e-learning in teaching fundamentals of materials science* Division of Materials Processing Technology, Management and Computer Techniques in Materials Science, Institute of Engineering Materials and Biomaterials, (Silesian University of Technology, Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice, Poland, 2007).
- [12] Brekke, M., Hogstad, P. H., *New teaching methods - Using computer technology in physics, mathematics and computer science*, International Journal of Digital Society **1**, 34-41 (2010).
- [13] Buick, J. M., *European, December Physics assessment and development of taxonomy*, J. of Physics Educ. **2**, 12-27 (2010).
- [14] Akyurek, E., *Effects of brain based learning approach on students motivation and attitude level in science class*, Mevlana International Journal of Education **3**, 104-119 (2010).
- [15] Bergeler, E., *Experiment showing the motion of a falling object and the influence of air drag*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 52-54 (2009).
- [16] Méndez Coca, D. & Slisko, J., *The influence of active physics learning on reasoning skills of prospective elementary teachers: A short initial study with ISLE methodology*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 3-9 (2013).
- [17] Aktumen, M., Yildiz, A., Baltaci, S., *Calculating the Surface Area of the Water in A Rolling Cylinder and Visualization as two and three Dimensional by Means of Geogebra*, International Journal of Computer Applications **25**, 0975 – 8887 (2010).

Simplifications and idealizations in high school physics in thermodynamics, electricity and waves: A study of Slovenian textbooks



Matej Forjan^{1,2}, Josip Sliško³

¹*School Centre Novo mesto, Šegova 112, SI-8000 Novo mesto, Slovenia.*

²*Faculty of Industrial Engineering, Šegova 112, SI-8000 Novo mesto, Slovenia.*

³*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.*

E-mail: jslisko@cfm.buap.mx

(Received 16 March 2014, accepted 20 June 2014)

Abstract

This article presents the results of an analysis of three Slovenian textbooks for high school physics from the point of view of simplifications and idealizations in the themes of thermodynamics, electricity and waves. Understanding simplifications and idealizations is crucial for the modeling of physical systems, since one ignores irrelevant properties and minor effects and focuses on the most important characteristics of the systems and the processes. In high-school physics, simplified and idealized models play a fundamental role in learning physics concepts and laws, so it is very important that textbooks present them carefully. This study shows that in all three textbooks more than a third of analyzed simplifications are not properly presented and clarified. Also, we almost could not find any explicit comment on assumptions and approximations used in the solved problems.

Keywords: textbook analysis, simplified models, modeling in physics.

Resumen

Este artículo presenta los resultados de un análisis de tres libros de texto eslovenos para la física en bachillerato desde el punto de vista de simplificaciones e idealizaciones en los temas de termodinámica, electricidad y ondas. La comprensión de simplificaciones e idealizaciones es crucial para modelar sistemas físicos, porque uno desprecia efectos propiedades irrelevantes y efectos menores, y se fija en las características más importantes de los sistemas y procesos. En la física estudiada en bachillerato, los modelos simplificados e idealizados juegan un papel fundamental en el aprendizaje de leyes y conceptos físicos, entonces es muy importante que los libros de texto los presenten cuidadosamente. Este estudio muestra que en todos los tres libros de texto más que un tercio de las simplificaciones analizadas no se presentan y clarifican adecuadamente. Además, en los problemas resueltos casi no pudimos encontrar un comentario explícito sobre suposiciones y aproximaciones usadas.

Palabras clave: análisis de libros de texto, modelos simplificados, modelaje en física.

PACS: 01.40.E-, 01.40.gb

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Since Galileo's time, the way science works is, more or less, related to two basic structural elements whose order may vary: (1) the careful observation of natural phenomena to discover patterns and regularity in data, and (2) the development and verification of models, which should explain the data and predict new phenomena. One can say that models and process of their formation, use and evaluation, which is called modeling, are the basis of scientific work and understanding. Similarly, many authors [1, 2, 3, 4, 5] consider that the knowledge about

models and modeling process is crucial for students' understanding science. In the field of physics education, the main contribution to models and modeling were given by Hestenes and colleagues [6, 7, 8, 9]. They define a model as a representation of the physical structure of the system and its properties and explain that physicists work with mathematical models. It means that they strive to describe the observed features with quantitative variables. When setting up models, scientists are holding to the rule written by Bossel [10]: "model should be as simple as possible, but as complex as necessary." Hannon and Ruth [11] agree with this statement and pointed out that this is the first and basic

principle of modeling. One of the key things in the modeling process is that certain characteristics of the phenomenon must be neglected to simplify it to such an extent that it is easier to focus on the most important features of the phenomenon. They introduce a model of a body (for example a particle), a model of an interaction (for example the air resistance is neglected), the system model, which is a combination of previous two models and a model of a process that describes the changes in the physical system. Portides [12] also believes that idealizations and simplifications of the physical system are very important facts that affect the process of building the model. In high school physics we mainly deal with simplified and idealized models, which play an important role in learning physics concepts and their application in everyday situations. Therefore, it is important for students to develop physical intuition about which idealizations should be done to make the theoretical treatment possible and, at the same time, not destroy the main features of physical process or situation. Since textbooks are one of the main factors that affects teaching, it is important that to accurately and clearly present assumptions, simplifications and idealizations of physical systems and the validity of the models that are based on these assumptions.

Since a review of simplification and idealizations in physics textbooks was not made in previous studies, we decided to analyze that aspect in three textbooks of physics, which are widely used in Slovenian high school, paying a special attention on how they introduce eight common simplifications and idealizations in the fields of thermodynamics, electricity and waves. Such a research is sensible because the results of Slovenian students in international evaluation of physics knowledge in the past show that, while the Slovenian students are good at solving routine problems, they have difficulties with tasks that require higher cognitive skills [13, 14]. Given the fact that setting models and understanding the assumptions and idealizations encourages a deeper understanding of physics content, such an analysis may represent a first step in improving the situation.

The structure of the article is as follows: first we present the basic characteristics of high school physics curriculum in Slovenia and analyzed the curriculum from the perspective of models and simplification. Then we compare how the three most commonly used textbooks for high school physics in Slovenia present some of the most common simplifications and idealizations in the fields of thermodynamics, electricity and waves and present the results.

II. THE CURRICULUM FOR HIGH SCHOOL PHYSICS IN SLOVENIA

High school in Slovenia (called Gymnasium) carried out a general secondary educational program that prepares students for continuing education in higher education, encourages creativity and develops the knowledge, abilities, skills and other personal qualities necessary for later success

in career and life [15]. In general, high school physics program is one of the obligatory subjects, which can be implemented on the basic level, selection level and "matura" level. The latter one represents the highest level of high school physics, giving a suitable basis for studies in the fields of science and technology [16]. Among the general objectives, there is a goal: "students learn about the nature of physical thinking". This goal is further elaborated in the section on expected achievements of students, where, among others, scientific method for studying of natural phenomena is exposed.

Scientific method is described in detail in the section on didactic recommendations. It says that students should, among other things, use and understand terms model and modeling. Students are also expected to know the main characteristics of scientific method, "which includes the observation of natural phenomena and designing models that best describe the specific phenomena, describing phenomena with mathematical methods and verifying the predictions of these models with a multitude of experiments". Detailed examination of the content objectives that the students should learn shows that between them the word model appears five times.

In three cases it is a physical model (model of the electric DC motor, model of electric generator, model of the camera) and in two cases the conceptual model (the model of a traveling sine wave, the wave model of light), while the content objectives nowhere explicitly mention any mathematical model or the development thereof.

In addition, we were interested in whether the curriculum emphasizes simplification and limitations of mathematical models. We found that in the curriculum of the 454 content objectives there are only three of them that relate directly to the limitations:

- students are aware of the limited validity of Hooke's law,
- students are aware that the term $\Delta E_p = mg\Delta h$ has limited validity when moving away from the Earth,
- students know that Ohm's Law does not apply to all conductors.

To these we may add two limitations, which are not explicitly written:

- oscillation of the simple pendulum is sinusoidal, when the amplitude of the oscillation is small compared to the length of the string,
- students know that all bodies fall to the Earth with the same acceleration, regardless of mass, if they are affected by gravity only.

Despite the fact that the curriculum emphasizes models and modeling as an important part of high school physics the students should master, among the content objectives models and simplifications are very little mentioned. This finding is consistent with the findings of Boujaoude [17], who analyzed science curriculum in Lebanon schools. He came to the conclusion that, although in general objectives it is mentioned that students should learn about scientific method, in the content objectives this isn't so obvious.

III. ANALYSIS OF TEXTBOOKS FOR HIGH SCHOOL PHYSICS IN SLOVENIA

In Slovenia, the official textbooks are confirmed by the Council of Experts for General Education, after ascertaining their conformity with the objectives of the curriculum and their content, didactic and methodical adequacy. Three of the most used official textbooks in Slovenia are presented in Table I.

First editions of textbooks B and C were written before new curriculum for high school physics came into use. Irrespective of the changes in curriculum, the content of two books remained the same over the years and in later editions only minimal changes were made.

In this way, the textbook A is the only one that has been written after the new curriculum came into use. It represents the most modern textbook for high school physics and is equipped with a DVD, which has much additional material for teachers and students.

TABLE I. Three of the most used official textbooks for high school physics in Slovenia.

Textbook	Authors	Title of the textbook	Year of the first edition	Year of the edition of analyzed textbook or the year of the last edition
A	Aleš Mohorič, Vitomir Babič	Fizika 1	2012	2012
		Fizika 2	2013	2013
		Fizika 3	2014	2014
B	Rudolf Kladnik	Gibanje, sila, snov	1993	2009
		Energija, toplota, zvok, svetloba	1994	2009
		Svet elektronov in atomov	1995	2010
C	Marjan Hribar in ostali	Mehanika in toplota	2000	2009
		Elektrika, svetloba in snov	1997	2011

In this study, we didn't analyzed DVDs or workbooks or other material, limiting ourselves to textbooks, and examine how an individual textbook emphasizes and clarifies certain simplifications, which we do when dealing with physical phenomena in the fields of thermodynamics, electricity and waves. In doing so, we are focusing on eight simplifications that are often used in the physics domains. They are presented in Table II.

TABLE II. Results of review of approximations and idealisations in the fields of thermodynamics, electricity and waves.

Approximations and idealisations	Textbook A	Textbook B	Textbook C
1. Ideal gas	✓	X	X
2. Constant coefficient of thermal expansion	✓	✓	✓
3. Stationary heat conduction	✓	✓	✓
4. Point charge	✓	✓	✓
5. Electric field of the large plate	✓	✓	X
6. Ideal connection wires	X	X	X
7. Plane and circular waves	X	X	✓
8. Thin lenses	X	✓	✓

A. Ideal gas

In thermodynamics, the concept of an ideal gas is very important because the equation of state of an ideal gas can be theoretically derived. Despite the fact that the equation of state is valid only for dilute gases and very low pressures, under a mentioned conditions it represents a good approximation for real gases too.

Textbook A explains that we speak about the ideal gas when the forces between the molecules are completely negligible and the molecules can be considered as particles and that this assumption is a valid for rare gases at high temperatures. Out of the four solved exercises in the book, in two cases the ideal gas is mentioned while in two cases treated gas is air but the assumption that it can be modeled as an ideal gas is not mentioned.

Textbook B defines the ideal gas like a textbook A but it does not describe the conditions under which real gas can be treated as ideal and also there is no consideration about the range of validity of the gas equation. From the field of the gas equation, we can find six solved problems in which the assumption about an ideal gas is nowhere mentioned. As the limited validity of the ideal gas equation is nowhere mentioned, students can get a feeling that is always applicable. This wrong idea can be further induced by some unsolved problems in which we can find such an absurd statements that the pressure is 970 bar! With such a high pressures, the results of the ideal gas equation are no more consistent with the experiment, but in the textbook the equation is still used without any further comment.

Textbook C derives ideal gas equation and explains that at the atmospheric pressure and room temperature almost all gases can be considered as ideal. However between the unsolved examples appear tasks in which for example the gas temperatures are -43°C and 100°C and pressure is 7.5 bar. These values are far away from the normal air pressure and ambient temperature.

B. Constant coefficient of thermal expansion

In thermal expansion of solids the elongation dl is proportional to the initial length l and the temperature difference ΔT which leads to the equation $dl = \alpha l dT$. This linear approximation is useful, if the temperature difference is small enough. At higher temperature differences, we need to consider yet another term in the Taylor series or write that we will make estimation or that we will calculate with the average coefficient of thermal expansion.

Textbook A, in the case of the thermal expansion of the solids, says that the temperature coefficient of linear expansion may vary slightly with temperature. It presents three solved problems and in all three problems expresses written assumptions: once the temperature coefficient of linear expansion is assumed constant, once it is calculated with average value and in third problem it is written that is an estimate of elongation.

Textbook B, after exposing the basic relationship between the relative elongation and change of temperature, mentions only that the temperature coefficient of linear expansion must be measured for each temperature interval separately. In three solved problems, it is not clear that this is an estimate or the average temperature coefficient of linear expansion.

In the unsolved problems at the end of chapters, there is no assumption mentioned, but, nevertheless, one of the problems involves a temperature change of 500 K.

The textbook C presents equation for thermal expansion and mentions that the detailed data for the temperature coefficient of linear expansion can be found in the reference books from which we can learn that it is temperature dependent. In this textbook there are no solved problems, but, at the end of the corresponding chapter, there are seven unsolved problems with no mentioned assumptions. Interestingly, this textbook also points out that the equation for linear expansion is valid only if the temperature changes are not too large, but, nevertheless, in unsolved problems the change in temperature of 200 K occurs.

C. Stationary heat conduction

The law of heat conduction $P = -\lambda S \Delta T / x$ is in this form useful only for stationary conditions and for conduction through evenly thick layers and walls. Textbook A tells us that the expression for the conduction rate can be used if temperatures aren't changing and thus for short time intervals, for bodies with high heat capacity or for the bodies which are at constant temperatures. It also comments in detail that otherwise time interval should be divided into shorter intervals at which the temperature does not change significantly and then we calculate conduction rate for a short time interval with a mean temperature difference. Whole transferred heat is then calculated by summing the contributions from shorter time intervals. In only one solved problem assumptions are not needed, while in five unsolved problems it is pointed out three times that it is a stationary situation and twice an explicit statement that the temperatures are constant is written down.

Textbook B clarifies, from the start, the distinction between the non-stationary and stationary distribution of temperature, commenting that the conduction rate in generally varies with time, since it depends on the temperature differences in the material which are decreasing with the conduction of heat. For stationary conditions, it writes an equation for conduction rate and later considers non-stationary situations. In all three solved and five unsolved problems it states clear that the temperatures are constant.

Textbook C defines the conduction rate and comments that, in the case of variable conduction rate, the term in the equation represents an average conduction rate. It mentions that the steady state occur when the temperatures of the materials do not change and it writes down equation for conduction rate for the stationary case. In this textbook equation of the conduction rate is used in one solved problem in which it states that the temperatures are constant.

D. Point charge

Coulomb's law quantifies the force between charged particles or point charges, which have a certain mass while their size is neglected. Similarly as with a model of the particle, the model of a point charge is useful in cases when the distance between the bodies is much greater than their dimensions.

Textbook A tells students that the Coulomb's law applies only to point charges, while, in the case of the extended bodies, the corrections must be taken into account. Later case is treated on the added DVD.

Despite of that, in three unsolved tasks at the end of chapter, it uses the words "small balls" but there is nowhere an suggestion that these balls can be modeled as a point charge.

The textbook B describes that the Coulomb's law was experimentally determined with help of charged spheres and that r in the equation is the distance of their centers. Then it writes down the clarification that if the charge is not uniformly distributed on the spherical body, the bodies must be sufficiently small compared to the distances between them. Nevertheless, between the unsolved tasks we can also found an example of a large storm cloud, where nowhere states it to be spherical or that an estimate is made.

Textbook C describes the Coulomb's law applies to balls only if the charge on them is evenly distributed and that this is the case when the distance between the balls is large compared to the diameter of the spheres. The force is then such as there were point charges in the centers of the spheres. In unsolved tasks it sticks to this definition because in nine out of ten tasks the involved body is described as a ball.

E. Electric field of the large plate

When dealing with electric fields, in addition to the electric field of the point charges, we usually discuss electric field in the vicinity of an infinite large plate. We define such a field as homogeneous and write down the equation for calculation of the strength of this field. Of course, no real plate is

infinitely large but can be regarded as infinite if the distance of the considered point from the plate is much smaller than its distance from the edge of the plate where the field isn't homogeneous anymore.

In this respect, the textbook A claims that experiments show the field near the middle of a large flat panel is homogeneous and generalizes that, if the plate is infinite, the field is homogeneous over the whole area around the plate. In deriving out the equation for the capacity of the capacitor, the textbook says that the field between the plates is homogenous and that electric field is equal to zero in the exterior of the capacitor. Once again, it is emphasized that this only applies to an infinite large plates. If the plates aren't infinite, the field is homogeneous only in the central part of the interior of the condenser and is increasingly inhomogeneous toward the edges and extends to the outside of the condenser. Among unsolved examples it uses the terms "large wall" and "large plate" and in one of the tasks writes explicit assumption that the edge effect is neglected.

In the textbook B, we find out that one can apply the equation for the electric field between the plates in the ideal case when the plates are evenly electrified and infinitely large. Actually, the panels have finite size and only inside them and away from the edges the field is approximately the same as between the plates of infinite size. One can we make such and assumption if the plates are close to each other and their spacing is small compared to their transverse dimensions. In both solved examples this assumptions aren't mentioned. In two unsolved tasks refers only to a plate or a wall and in the third one it mentions "a very large plate."

The textbook C displays pictures of electric fields and writes down that the electric field between the capacitor plates is constant in its direction and size. Before introducing the expression for the magnitude of the electric field, it speaks about the electric field between the extended plates but one can find no record about the validity of the equation. When deriving the formula for capacity of the parallel plate condenser, it is assumed that the spacing between the plates is small compared to the dimension of the plates. Then one can suppose that the charge density on the plates is constant and it is proportional to the magnitude of the electric field around the plate. In unsolved problems, the textbook holds the assumptions about the small spacing between the plates.

F. Ideal connection wires

When dealing with electrical circuits, we normally assume ideal wires that have no resistance, which means that there is no voltage drop on them. This assumption is valid when the resistance of the wires is much smaller than the resistance of the resistors. If this assumption is not highlighted sufficiently clear the students, they can become confused when dealing with transmission of electrical energy, where one is calculating the losses that arise precisely because of the resistance of the wires.

In the textbook A, we found only the comment that ideal wires conduct current which does no work on them. Unlike these, the real wires do receive some electrical work. In the solved and unsolved tasks, it is nowhere mentioned that the

resistance of the wires can be ignored or that ideal wires are assumed.

The textbooks B and C, while treating electrical currents, nowhere mention ideal wires or the possibility of negligible resistance.

G. Plane and circular waves

Plane wave is approximation that is used far from its source in a limited part of space in the selected direction. If there is no absorption, the intensity of the plane wave does not change. Although there are no ideal plane waves in nature, a lot of waves that are of practical interest, can be modeled as a plane wave. Circular waves result from a circular source or from a source that is small compared to the wavelength. Intensity of the circular wave decreases with the square of the distance from the source.

The textbook A describes that the plane wave travels in one direction perpendicular to the line and circular which comes from the particle spreads in all directions radially outwards. The textbook does not clarify when one can use an approximation of plane or circular wave. In one unsolved task, it is explicitly stated that a source emits a spherical wave that spreads in all directions equally and it also mentions the assumption that in the matter the waves are not absorbed.

The textbook B defines that the waves are plane, if the wave lines are straight and parallel. It also states that such a wave occurs when the source is long and straight. Wave lines of circular waves are concentric circles which origin from a common center where the source of circular waves is. This should send waves equally in all directions equally. The textbook suggests that usually source of the wave is not long and straight nor is it point source or circular source but far from the source (compared with the size of the source) all waves are circular. There are no solved exercises in the textbook B on plane and circular waves. In three unsolved problems, the type of wave isn't mentioned.

Textbook C indicates that the circular wave is obtained if the source is circular. If one touches the surface with a small board, the waves near it are plane. Even a small part of the circular wave can be treated as plane in a large distance from the source. There is only one unsolved tasks on this topic. In calculating the intensity, the approximation of the small source is not assumed and, despite of that, the equation for the intensity around a point-like source is used.

H. Thin lenses

Thin lenses are those whose thickness is much smaller compared to the focal length and distances of objects and images. It is assumed that refractions in thin lenses occur in the plane of the lens and that all the distances are measured from this plane. The assumption of thin lenses is fairly good for most practical cases and together, with the assumption one analyzes rays which are near the optical axis, it makes it easy to deal with geometrical optics in high school.

The textbook A claims that it searches for the image formation with a thin converging lens and that the derivation

is valid only for rays which are near the optical axis, Nevertheless, the idea and validity of a thin lens approximation is nowhere explained. In two solved and twelve unsolved problems, the thin lens approximation isn't anywhere mentioned.

The textbook B clearly defines the assumption that the lenses are thin and strongly flattened and that the thickness is small compared to the radius of curvature of the two interfaces or the distances to objects or images. Then it says that one obtains a clear and correct image of the object only if the rays are passing almost vertically through the central portion of the lens, so that the beams enclose small angles with the optical axis of the lens. The object must be small and must be located in the immediate vicinity of the optical axis. Since these conditions are often not met, the image formation with the lenses gives the incorrect image of the object. Then, the textbook makes the clarification that this error will be ignored. In the solved and unsolved tasks assumptions of thin lenses is not mentioned.

The textbook C defines a thin lens as such where the distance between the apices is small compared with the diameter of the lens and then makes the derivation of a thin lens equation. In the derivation of the equation, it indicates the assumption that the rays are close to the optical axis and that their deviation is small. In none of the six unsolved it uses the assumption of thin lenses.

IV. CONCLUSIONS

This review of some of the most common simplification and idealizations in the fields of thermodynamics, electricity and waves in Slovenian high school textbooks indicates that all three of the commonly used textbooks in roughly equal measure present and explain certain approximations and idealizations, which one assumes when dealing with physical examples of the above-mentioned fields. However, a detailed analysis shows that there are significant differences between the textbooks.

In the field of thermodynamics textbook A very carefully and logically presents the three analyzed approximations and it uses them in solved examples so that students can see a practical example of using these simplifications. Textbooks B and C clarify which molecular properties are neglected in the model of an ideal gas, but they tell students nothing about what conditions must be satisfied that this model can be used and they said nothing about the limited validity of the ideal gas equation. But in solved tasks the ideal gas equation is used, even in cases in which appearing thermodynamic quantities of a gas make no sense (gas density of 1.5 kg/l). Because of that, students do not develop the understanding of models and improving them when one encounters examples where the model results are no longer consistent with the experiment.

The second and third simplification of the field of thermodynamics are correctly presented in both textbooks, but the solved tasks on thermal expansion neither use the written assumptions nor they explain why they act in

contrary to what they write down in the definition of the coefficient of linear thermal expansion and use a large temperature ranges in solved and unsolved tasks.

In analysis on the idealizations in the field of electricity and wave, the textbook C deviates from the other two because in this textbook there are no solved examples. While both the assumptions from the field of waves and a point charge model are clearly described, this textbook does not sufficiently precisely define when a plate can be considered as infinite. Textbooks A and B well describe both assumptions from the field of electrostatics, but the textbook B, in some solved tasks, doesn't take into account the defined assumptions. It is also an interesting fact that none of the three textbooks presents the model of ideal wires, while all three define specific electrical resistance and they calculate the resistance of different wires. If we want our students to develop a sense of precision and exactness, then in this issue we must said them that all wires have some electrical resistance but, in some cases, it doesn't need to be taken into account.

The textbook A, for none of the analyzed assumptions in the field of the wave, doesn't define them with sufficient clarity or mentions their validity range. Similarly, the textbook B defines well the concepts of plane and circular wave, but doesn't describe under which conditions some waves can be treated as one or the other.

The assumption of thin lenses is, in the textbook B, explained in great detail, but it is no longer mentioned in solved tasks.

In the review of solved tasks that were related to analyzed idealizations and simplifications, we have found that they contain almost no explicitly written simplifications, so we expanded the analysis and review of solved tasks on the whole fields of thermodynamics, electricity and waves.

In the textbook C, the solved examples are only in chapters on thermodynamics. There are fourteen of them and explicit assumptions are written in two cases.

The textbook A contains 101 solved tasks in the fields of thermodynamics, electricity and wave and explicit assumptions were found in nine cases, while in the textbook B we found them in seven cases (of 86). The results show that, while textbooks, in most cases, correctly present simplifications in the text, the simplifications are, in a much lesser extent, suggested to the students in solved examples, giving them a sense their importance for analyzing and solving problems in physics.

Since, according to Romer [18], "modern science would not have started if Galileo and Newton insisted on exact description of falling bodies and circulating planets" and should not made simplifications, it is important to help students that they already in high school physics develop a sense for making reasonable approximations and idealizations.

An interesting study on this topic would be to what extent this sense is developed by solving computational tasks which are usually practiced in traditional physics course.

REFERENCES

- [1] Gilbert, J. K. and Boulter, C. J., *Learning science through models and modelling*, in Fraser, B. J. and Tobin K. G., International Handbook of Science Education, Dordrecht, Kluwer, pp. 53–66, (1998).
- [2] Harrison, A. G., and Treagust, D., *Learning about atoms, molecules and chemical bonds: A case study of multiple model use in Grade 11 chemistry*, Science Education **84**, 352–381 (2000).
- [3] Gilbert, J. K., *Models and modelling: Routes to more authentic science education*, International Journal of Science and Mathematics Education **2**, 115-130 (2004).
- [4] Brewster, E., *Modeling instruction in introductory physics*, Am. J. Phys. **76**, 1155-1160 (2008).
- [5] Viiri, J. E., Tolvanen, P., Planinšič, G. and Sliško J., *Student's ability to construct mathematical model*, Frontiers of Physics Education: selected contributions, 380-385 (2008).
- [6] Hestenes, D., *Modeling methodology for physics teachers*, in The Changing Role of the Physics Department in Modern Universities, edited by Redish, E. and Rigden, J., American Institute of Physics, Woodbury, NY, 935–957 (1997).
- [7] Wells, M., Hestenes, D. and Swackhamer, G., *A modeling method for high school physics instruction*, Am. J. Phys. **63**, 606-619 (1995).
- [8] Hestenes, D., *Toward a modeling theory of physics instructions*, Am. J. Phys. **55**, 440-454, (1987).
- [9] Hestenes, D., *Modeling Games in the Newtonian World*, Am. J. Phys. **60**, 732-748, (1992).
- [10] Bossel, H., *Systeme, Dynamik, Simulation: Modellbildung, Analyse und Simulation komplexer Systeme* (Books on Demand GmbH., Norderstedt, 2004).
- [11] Hannon, B. and Ruth, M., *Dynamic modeling*, (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1994).
- [12] Portides, D., *The Relation between Idealisation and Approximation in Scientific Model Construction*, Science & Education **16**, 699–724 (2007).
- [13] Beaton, A. E., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J., Smith, T. A. and Kelly, D. L., *Science achievement in the middle school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study*, (Boston College, Chestnut Hill, 1996).
- [14] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Robitaille, D. F. and Foy, P., *TIMSS Advanced 2008 International Report: Findings from IEA's Study of Achievement in Advanced Mathematics and Physics in the Final Year of Secondary School*, (TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Chestnut Hill, 2009).
- [15] *Zakon o gimnazijah*, <<http://www.pisrs.si/Pis.web/pregledPredpisa?id=ZAKO450>>, visited in July 20 (2014).
- [16] Planinšič, G. *et al.*, <http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2008/programi/media/pdf/ucni_nacrti/UN_FIZIKA_strok_gimn.pdf>, visited in July 20 (2014).
- [17] BouJaoude, S., *Balance of scientific literacy themes in science curricula: The case of Lebanon*, International Journal of Science Education **24**, 139-156 (2002).
- [18] Romer, R. H., *Reading the equations and confronting the phenomena: The delights and dilemmas of physics teaching*, Am. J. Phys. **61**, 128-142 (1993).

Compression and expansion processes for atmospheric air: teaching thermodynamic response coefficients



Rodolfo Acevedo Chávez, María Eugenia Costas

Departamento de Fisicoquímica, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Cd. Universitaria, 04510 México, D.F. México.

E-mail: maria_eugenia.costas@unam.mx

(Received 2 April 2013, accepted 17 June 2014)

Abstract

In introductory classical thermodynamics courses, the P - V - T systems are frequently employed as examples for presenting the several thermodynamic quantities, which are expressed in terms of measurable macroscopic quantities. The variation of one experimentally measured property as a function of other one, is called a thermodynamic response coefficient. One of the most accessible quantities to analyze is the so-called isothermal compressibility coefficient, $\kappa = -(1/V)(dV/dP)_T$, which contains the P - V relationship under isothermal conditions. For these quantities, the ideal gas model is usually used to illustrate calculations of the thermodynamic quantities. Nevertheless, the idea that any fluid behaves as an ideal gas is frequently taken for granted by students. In this work, two independent experiments considering one the compression and other the expansion of atmospheric air as a study fluid, were performed in order to quantify its $(P$ - $V)_\theta$ behaviour, and clarify the type of PV behavior atmospheric air shows. From these experiments and the corresponding data, the expression for $(dV/dP)_\theta$ was deduced, which resulted in turn volume-dependent. Further analysis yields a linear relationship between the isothermal compressibility coefficient (κ) and $(P_{abs})^{-1}$ values. All the results point to consider the non-ideal behaviour of the gaseous fluid studied when it is involved in two independent processes (a modest isothermal expansion and a modest isothermal compression), primarily due to the air water content.

Keywords: Atmospheric air, PVT behavior, air compressibility factor, thermodynamics teaching.

Resumen

En los cursos de introducción a la termodinámica clásica, los sistemas de PVT se emplean con frecuencia como ejemplos para la presentación de las diversas cantidades termodinámicas, que se expresan en términos de cantidades macroscópicas medibles. La variación de una propiedad medida experimentalmente como una función de la otra, se denomina coeficiente de respuesta termodinámico. Una de las cantidades más accesibles para analizar es el llamado coeficiente de compresibilidad isotérmica $\kappa = -(1/V)(dV/dP)_T$, que contiene la relación P - V en condiciones isotérmicas. Para estas cantidades, el modelo de gas ideal se utiliza generalmente para ilustrar los cálculos de las cantidades termodinámicas. Sin embargo, la idea de que cualquier líquido se comporta como un gas ideal, se da por sentada frecuentemente, entre los estudiantes. En este trabajo se consideraron dos experimentos independientes, tomando ambos al aire atmosférico como fluido de estudio; uno sobre la compresión y otro sobre la expansión. Ambos se llevaron a cabo con el fin de cuantificar el comportamiento $(P$ - $V)_\theta$, y aclarar el tipo de comportamiento PV que muestra el aire atmosférico. A partir de estos experimentos y los datos correspondientes, se dedujo la expresión para $(dV/dP)_\theta$, la cual resulta ser dependiente del volumen. Adicionalmente con otro análisis se obtiene una relación lineal entre los valores del coeficiente de compresibilidad isotérmica (κ) y de $(P_{abs})^{-1}$. Todos los resultados apuntan a considerar el comportamiento no ideal del fluido gaseoso estudiado, cuando está involucrado en dos procesos independientes (una modesta expansión isotérmica y una modesta compresión isotérmica), principalmente debido al aire contenido en el agua.

Palabras clave: Aire atmosférico, comportamiento PVT, factor de compresibilidad del aire, enseñanza de la termodinámica.

PACS: 51.30.+I, 51.35.+a

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

The relationship among the relevant extensive and intensive properties for a thermodynamic system is called the equation of state. These relations are a useful tool to understand the physicochemical behavior of

thermodynamic systems, and to also predict the system properties values at different experimental conditions. However, despite their relevance, equations of state tend to receive little attention in traditional physical chemistry courses and conventional textbooks used in the chemistry areas. Furthermore, they are normally defined as the

relation among the P , V and T variables in a system, and are usually limited to the description of gas phases [1, 2, 3, 4]. More specialized chemical engineering textbooks restrict the discussion to fluids in general although in further detail. Few books present the subject in a general fashion [5, 6, 7] and they are usually used in the physics areas. Only more advanced textbooks for graduate students [8] use the postulates formalism, which is general for any kind of thermodynamic system. Moreover, most of the papers on thermodynamics of fluids in science education journals, discuss the PVT fluid behavior by using theoretical models or computational techniques [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], and very few present experimental results on this kind of thermodynamic response [18-21]. Of these, one [18] is devoted to the determination of the thermal expansion coefficient of gases, and the other three, to a very inaccurate and limited determination of the PV relation for air [19, 20, 21].

The old fashion presentation used in undergraduate chemistry courses leads the students to believe that thermodynamics can only be applied to the gas phase, and more drastically, that the only existing equation of state is $PV=nRT$, the limiting $\rho \rightarrow 0$ ideal gas model. Also, they believe that this equation can be applied to any gas at any experimental condition.

Another approach to the study of equations of state [22] is the use of the so-called response coefficients, which in principle, can be experimentally determined.

They are simple partial derivatives involving the thermodynamic states of the system. Moreover, understanding the response coefficients meaning, is of major importance in physical chemistry studies, and it leads to the idea that thermodynamics can be applied to any system for which the relevant variables can be affected by the change of one of the properties (mainly temperature). This discussion is essential in the study, for example, of thermodynamic properties, in the definition of thermometric properties and in the construction of empirical temperature scales and thermometers.

As the measurement of the response of a system to variable conditions has been historically the subject of research in areas like chemistry, physics, the search of new materials, etc., it is very important to learn and teach how to measure the response coefficients of systems showing different characteristics. This communication concerns with experimental methods [23] to measure response coefficients for different thermodynamic systems in a conventional physical chemistry or classical thermodynamics laboratory for undergraduate students; in particular, in here we present the PVT behavior of air under two independent isothermal processes, deduced from experiments that have not been reported in science education journals up to date.

II. THEORY

The thermodynamic equilibrium state of a system is characterized by the specific values of the minimum number of variables (or properties) needed to define the system. This number is determined by the experimental experience. The properties depend on the system nature and on the kind of physical or chemical responses which are intended to obtain. Then, the equation of state is:

$$X_i = X_i(T, X_{j \neq i}, Y_i). \quad (1)$$

Where X_i and Y_i are the relevant extensive and intensive variables, respectively, and T the temperature. For example, for a fixed mass of a fluid or a solid, the relevant properties are V , P and T (volume, pressure and temperature), if the volumetric response is to be studied.

But if we are interested in the magnetic response of the same kind of systems, the relevant variables are M , H and T (magnetization, applied magnetic field and temperature).

Any infinitesimal change in the equilibrium state of the system due to changes in the independent variables, will result in

$$dX_i = \left(\frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_{X_{j \neq i}, Y_i} dT + \left(\frac{\partial X_i}{\partial X_j} \right)_{X_{k \neq i, j}, Y_i, T} dX_j + \left(\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} \right)_{X_{k \neq i, j}, Y_{m \neq j}, T} dY_j. \quad (2)$$

The partial derivatives involving extensive and intensive properties are the response coefficients. For example, for the volumetric response of a system, the volume is a function of temperature and pressure for a fixed system mass (*i.e.*, $V = V(T, P)$) and an infinitesimal change in the volume can be expressed as:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP. \quad (3)$$

Here, the response coefficients are defined as:

$$\beta \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \kappa \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (4)$$

β is known as the isobaric thermal expansion coefficient, and κ is the isothermal compressibility coefficient of the system. Another response coefficients, as

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{\beta}{\kappa}. \quad (5)$$

Can be obtained by simply applying the rules for partial derivatives.

Any response of a system due to a change of its equilibrium state (like magnetic, electric, surface, etc., responses) can be written in terms of the respective response coefficients. By measuring them (for example, β and κ in the above example), the respective differential

equation can be integrated, and the equation of state is obtained for the range of experimental conditions in which the response coefficients were determined.

In here, and as a second proposal [10] concerning the experimental study of response coefficients in thermodynamic systems, the experimental determination of the coefficient $(dV/dP)_\theta$ (being θ the empirical temperature) for a gaseous fluid in a conventional undergraduate physical chemistry or classical thermodynamic laboratory, is presented.

III. EXPERIMENT

As mentioned above, in the study here presented the relationship between pressure and volume for a gaseous fluid mass under isothermal conditions is obtained for: a) a compression process and b) an expansion process. In here, the fluid in study is the atmospheric air in a laboratory. In Figures 1 and 2, details of the instruments and equipment employed in both experiments (the compression and the expansion) are shown. For both processes, the experiment is basically the same, being the differences the pressure instrument employed (Figure 1) and the U-type indicator (with distilled water as manometric fluid; high vacuum oil was added on top of the water meniscus to prevent evaporation and air solubilization) manipulation (the opened tube is moved up for compression, and moved down for expansion).

The atmospheric air (Mexico City) confined (in the right tube in Figure 2) was carefully compressed (or expanded) in several steps. For each one, the corresponding P and V values were stabilized during ca. 30 minutes; in each step, manometric pressure (or relative vacuum) and volume values were collected. Also, the temperature value close to the gaseous fluid in study and equipment (to be constant) was corroborated. As both experiments were performed independently in different days, the gas mass (kept constant throughout each experiment) was not the same for both experiments, and the temperature (maintained constant for each process) differed from 23°C for the compression to 25°C for the expansion.

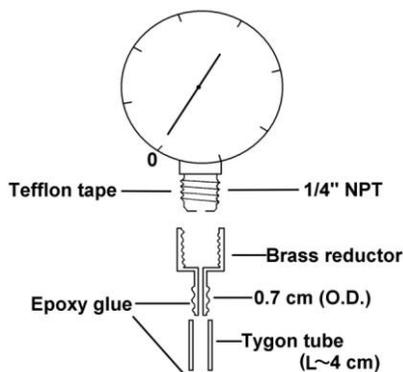


FIGURE 1. a) Compression: An analogic manometer (Marsh) was used for measuring the manometric pressure. Ranges: 0-20 Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 2, June 2014

0-20 in²; 0-90 cm H₂O. Zero-adjust screw is included. b) Expansion: An analogic vacuum gauge (Ashcroft) was used for measuring the relative pressure below the atmospheric (zero) reference. Ranges: 0-7.5 kPa; 0-30 in H₂O. Zero-adjust screw is included.

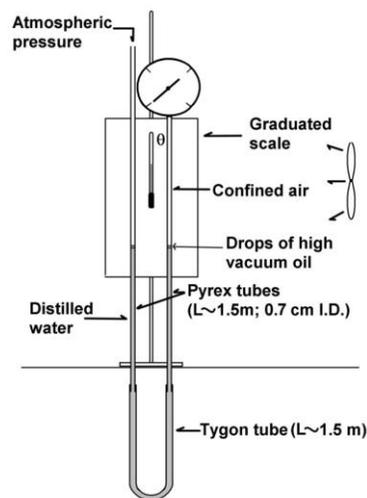


FIGURE 2. Experimental setting for the confined air isothermal a) compression and b) expansion processes.

Manometric pressure (or relative vacuum) values were obtained from both the analogical instrument (units at standard conditions) and the U-type indicator (as level differences, units at local conditions at an altitude of 2218 m at Mexico City). The latter were then converted to standard conditions by employing the local distilled water absolute density and g gravity values. For the compression, $\rho(\text{H}_2\text{O}(l))$ (23°C)=0.993 g/mL, $g=9.78 \text{ m/s}^2$, $P_{\text{atm}}=581.66 \text{ mm Hg(est)}$; for the expansion, $\rho(\text{H}_2\text{O}(l))$ (25°C)=0.992 g/mL, $g=9.78 \text{ m/s}$, $P_{\text{atm}}=581.40 \text{ mm Hg(est)}$. Such homologated values were compared to those of the manometer (or the vacuum gauge) to verify their mutual correspondence. Also, throughout the experiment, values of the atmospheric pressure (with an adjusted electronic barometer and units at standard conditions) were collected. In this way, both manometric pressure (volume and absolute pressure), volume values at 23°C were obtained for the compression process, and relative vacuum-volume and absolute pressure-volume values at 25°C were obtained for the expansion process.

IV. RESULTS AND DISCUSSION

A. Compression

The experimental (PV) data for the compression process is shown in Figure 3. From these, a non-linear relationship between the variables was detected.

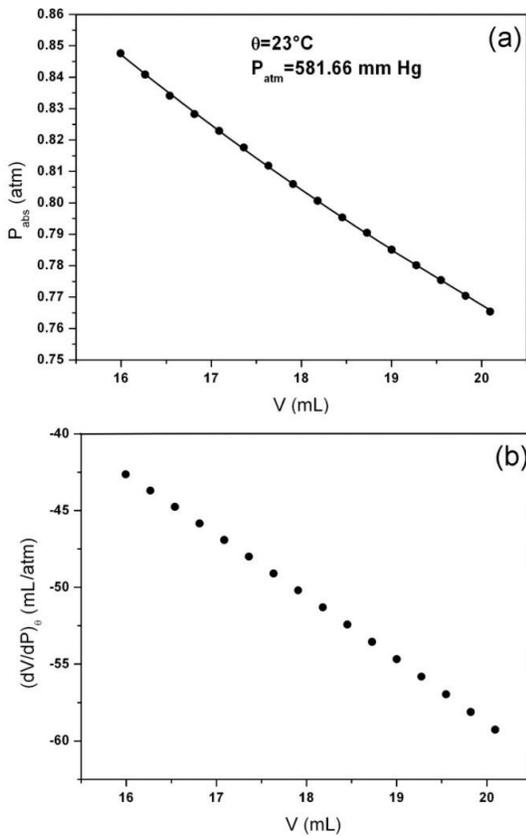


FIGURE 3. (a) Absolute pressure (atm) as a function of volume (mL), and (b) change of volume per unit pressure variation (mL/atm) as a function of volume (mL) for the atmospheric air isothermal compression process.

In order to obtain a quantitative relation between P and V , a fitting process was carefully performed and the resulting equation is

$$P = \frac{2.8909}{V^{0.4427}} \quad \text{or} \quad PV^{0.4427} = 2.8909. \quad (6)$$

Such expression does not correspond to the ideal gas model equation. The first derivative $(dP/dV)_\theta$ is a function of volume. The reciprocal expression for such a first derivative yields $(dV/dP)_\theta = -0.7814V^{1.4427}$, which is shown in Figure 3(b). From this, an illustrative physical behavior arises: at higher volume values, the gaseous fluid becomes comparatively more compressible. On the contrary, at lower volume values, the fluid is less compressible.

In order to further analyze the relationship existing between the $(dV/dP)_\theta$ coefficient and V or P values, its expression (i.e., $(dV/dP)_\theta = -0.7814V^{1.4427}$) was incorporated into the corresponding one for κ (the isothermal compressibility coefficient). The resulting equation for κ was respectively plotted as a function of volume and of the inverse of pressure experimental data.

In both cases, κ shows the same increasing linear behaviour towards ascending V or P^{-1} values. Performing a

linear fit yields: $\kappa = 0.002 + 2.257(1/P)$. A second analysis was made by fixing the zero-condition for the independent term; a satisfactory fitting is obtained (Fig. 4). The equation for the isothermal compressibility coefficient is:

$$\kappa = 2.2589 \left(\frac{1}{P} \right) \quad (7)$$

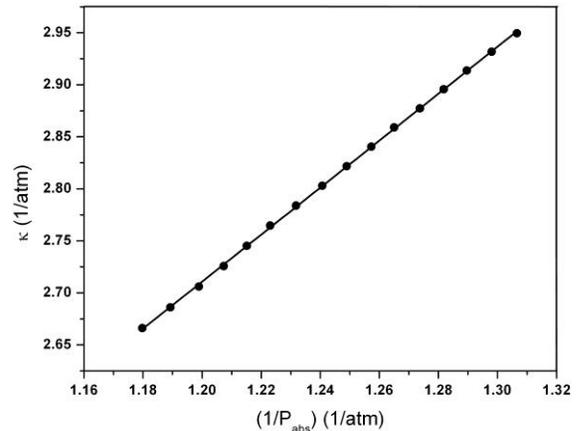


FIGURE 4. Isothermal compressibility coefficient (1/atm) as a function of the inverse of absolute pressure (1/atm) for the atmospheric air isothermal compression process.

In this equation, the slope is in turn $(1/a)$, in accord with $a=0.4427$ in the equation $PV^{0.4427} = 2.8909$. The above results let us quantitatively explore the κ behavior: for the experimental conditions studied, this coefficient ranges from ca. 2.65 atm^{-1} to 2.95 atm^{-1} upon increasing $(1/P)$.

Another pedagogic experience in this analysis is the slope value (ca. 2.26) of the equation commented above.

Being higher than the unit, it is in accordance with the non-ideal PVT character previously discussed for the gaseous fluid here studied.

B. Expansion

As referred in experimental, the lectures of relative vacuum (analogical gauge) – volume and relative vacuum (U-type indicator) – volume were collected. Under standard (homologated) conditions, they are noticeably similar. In the following paragraphs and figures, all they are considered. Figure 5a shows the experimental data.

From this experimental data, a non-linear relationship between the variables is observed. In order to obtain a quantitative relation between absolute pressure and volume, a fitting process was carefully performed. The resulting equation that satisfactorily describes the experimental response of the gaseous fluid in study (Figure 5a) is:

$$P = \frac{1.99869}{V^{0.4144}} \quad \text{or} \quad PV^{0.4144} = 1.99869 \quad (8)$$

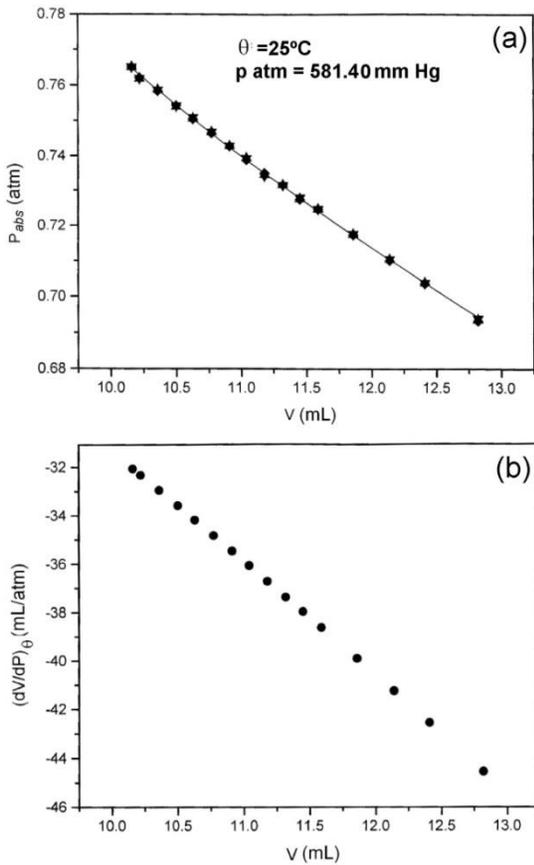


FIGURE 5. (a) Absolute pressure (atm) as a function of volume (ml) and b) volume change per unit pressure variation (ml/atm) as a function of volume (ml) for the atmospheric air isothermal expansion process

As can be seen, such expression ($PV^{0.4144} = \text{constant}$) does not correspond to the ideal gas model pVT equation. Further on, the first derivative $(dP/dV)_\theta$ of the fitted equation is in turn volume-dependent. The reciprocal expression for this first derivative yields the response coefficient $(dV/dP)_\theta = -1.2077V^{1.4144}$ (Figure 5b). From this, an illustrative physical behavior arises: at higher volume values, the gaseous fluid becomes comparatively more expansible (or also compressible). On the contrary, at lower volume values, such properties are decreased.

In the hope to analyze in a further way the relationship existing between the $(dV/dP)_\theta$ coefficient and V or P values for the expansion process, its expression (*i.e.*, $(dV/dP)_\theta = -1.2077V^{1.4144}$) was incorporated into the corresponding one for κ (the isothermal compressibility coefficient). The resulting equation for κ was respectively plotted vs. volume and $(\text{absolute pressure})^{-1}$ experimental values. In both cases, κ shows the same increasing linear behavior towards ascending V and P^{-1} values. Fitting a linear equation to data yields: $\kappa = 0.009 + 2.14(1/P)$. In a

further step, a second linear fitting process was performed, by establishing the zero-condition for the independent term. A good fitted equation results (Figure 6):

$$\kappa = 2.4139 \left(\frac{1}{P} \right) \quad (9)$$

In this, the slope is in turn $(1/a)$, in agreement with $a=0.4144$ in equation $PV^{0.4144} = 1.9987$. The above results let us quantitatively explore the κ behavior: within the experimental conditions covered, this coefficient ranges from ca. 3.15 atm^{-1} to 3.48 atm^{-1} upon the $(1/P)$ values increase.

Figure 6 shows the above commented results. Another pedagogic experience in this analysis is the slope value of the equation here commented. Being higher than unit, it is in accordance with the non-ideal character previously discussed for the gaseous fluid here studied.

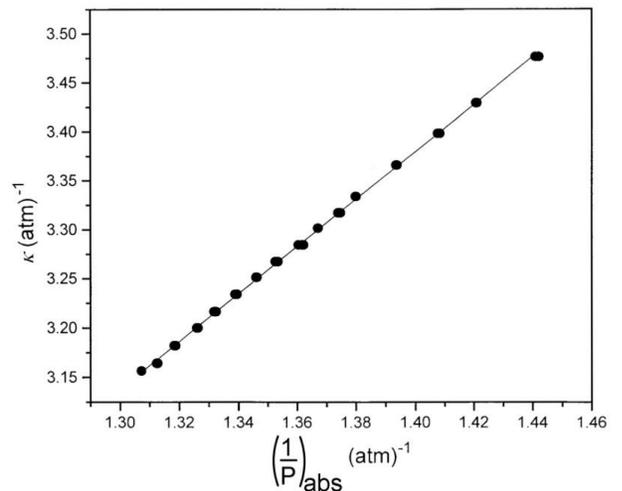


FIGURE 6. Isothermal compressibility coefficient (1/atm) as a function of the inverse of absolute pressure (1/atm) for the atmospheric air isothermal expansion process.

It must be pointed out that when both sets of results for the compression ($\theta = 23^\circ\text{C}$) and expansion ($\theta = 25^\circ\text{C}$) processes are compared, similar expressions for the several facets of the $(p-V)_\theta$ relationship in both processes are deduced.

For example $PV^{0.4427} = 2.8909$, $(dP/dV)_\theta = -1.2798V^{-1.4427}$ and $(dV/dP)_\theta = -0.7814V^{1.4427}$, for the compression process. $PV^{0.4144} = 1.9987$, $(dP/dV)_\theta = -0.828V^{-1.4144}$ and $(dV/dP)_\theta = -1.2077V^{1.4144}$ for the expansion process.

These differences found could be associated with the different conditions (temperature, gas mass and starting volume, for example) at which the respective studies were carried out. Nevertheless the above features, in both cases (moderate isothermal compression and moderate isothermal expansion processes) the atmospheric air shows $(P-V)_\theta$ relationships which are in turn different to those belonging to the idea gas- PVT model.

It must be pointed out that when the κ properties for both processes are compared, some interesting features arise.

When both series of κ - $(1/P)$ values are plotted in a common graph (Figure 7) a clear trend emerges. In such a graph, the lower $(1/P)$ values region belongs to the compression states of the gaseous fluid; for this region, κ also takes comparatively lower values. Upon ascending the $(1/P)$ values, the gaseous fluid is now being expanded, and κ then shows the comparatively higher values. If the small differences between the two linear behaviors are mainly associated with the temperature differences (25 °C for the expansion study; 23°C for the compression process) at which both processes were performed; then a gross linear trend which covers the 1.18 atm⁻¹ – 1.45 atm⁻¹ ($1/P_{abs}$) global range can be proposed. For such a range, κ can be suggested to increase from ca. 2.65 atm⁻¹ to 3.5 atm⁻¹. In this way, two closely related studies on the same type of atmospheric air yields κ estimates for a wider range of $(1/P_{abs})$ values (ca. 0.69 atm – 0.85 atm).

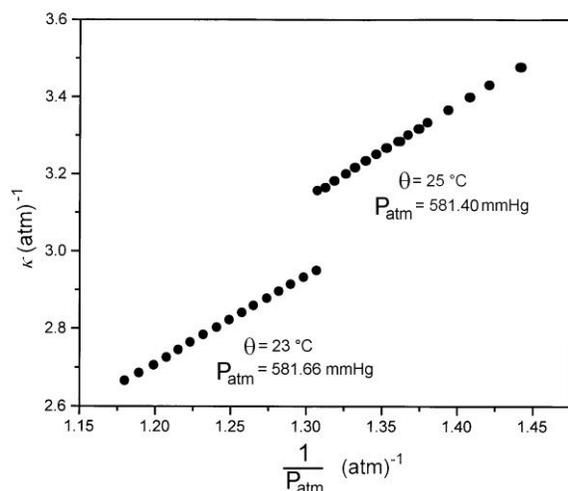


FIGURE 7. Isothermal compressibility coefficient (κ) as a function of P_{abs}^{-1} for the two processes performed on atmospheric air.

V. CONCLUSIONS

From the study here presented, the following conclusions can be drawn:

1. Employing materials and instruments available in an undergraduate laboratory, it is possible to obtain certain responses about the p - V behavior of a gaseous fluid by performing two experiments: a modest compression (at 23°C) and a modest expansion (at 25°C) isothermal processes.
2. The analysis of the experimental data yields expressions for the $(dV/dP)_\theta$ response coefficient of the air gas studied and belonging to the corresponding experimental conditions range explored. Both series show the volume dependence of the coefficient, and is similar for the compression and the expansion processes.

3. Further analysis yields a linear relationship between the isothermal compressibility coefficient κ , and $(1/P)$ for both processes. For the compression process, κ ranges from ca. 2.65 atm⁻¹ to 2.95 atm⁻¹. For the expansion process, κ ranges from ca. 3.15 atm⁻¹ to 3.48 atm⁻¹.

4. The several facets of the $(p-V)_\theta$ relationship explored, let us consider the non-ideal behaviour of the atmospheric air studied when it is involved in modest isothermal compression and expansion processes. Unfortunately, the experimental data (PV relation at constant T) is not enough to establish a phenomenological equation of state.

5. It is a special valuable experience for undergraduate students, as far as they convince themselves that atmospheric air does not “behave” as an ideal gas, and such equation cannot be used in an indiscriminate way for any gaseous system at any conditions. Deviations from the ideal behavior can be due to the presence of highly non-ideal components: CO₂ and water. Treating atmospheric air as an ideal gas mixture is only a gross approximation for such a complex system, and student should be aware of it.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are indebted to DGAPA-UNAM, for financial support through grant No. PE200212.

REFERENCES

- [1] Atkins, P. W., *Physical chemistry*, 6th ed., (Oxford University Press, NY, 1998).
- [2] Levine, I. N., *Physical chemistry*, 4th ed. (McGraw-Hill, NY, 1995).
- [3] Castellan, G. W., *Physical chemistry*, 3rd ed. (Addison-Wesley, USA, 1983).
- [4] McQuarrie, D. A.; Simon, J. D., *Physical chemistry, a molecular approach*, (University Science Books, USA, 1997).
- [5] Zemansky, M. W.; Dittman, R. H., *Heat and thermodynamics*, 6th ed. (McGraw-Hill, NY, 1981).
- [6] García-Colín Scherer, L. *Introducción a la termodinámica clásica*, 4th ed. (Editorial Trillas, México, 1990).
- [7] Biel-Gayé, J., *Termodinámica*, Vol 1 (Editorial Reverté, Barcelona, 1997).
- [8] Callen, H. B., *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, 2nd ed. (John Wiley and Sons Inc, USA, 1985).
- [9] Bauman, R. P., Cockerham, H. L., *Pressure of an ideal gas on a moving piston*, Am. J. Phys. **37**, 675 (1969).
- [10] Ott, J. B., Goates, J. R., Hall Jr., H. T., *Comparisons of equations of state in effectively describing PVT relations*, J. Chem. Educ. **48**, 515 (1971).
- [11] Cagle Jr., F. W. *A classification of equations of state*, J. Chem. Educ. **49**, 345 (1972).

Acevedo-Chávez, R. & Costas M. E.

- [12] Goussard, J. O., Roulet, B., *Free expansion for real gases*, Am. J. Phys. **61**, 845 (1993).
- [13] Gutiérrez, G., Yáñez, J. M., *Can an ideal gas feel the shape of its container?* Am. J. Phys. **65**, 739 (1997).
- [14] Zimba, J., *Cooling of an ideal gas by rapid expansion*, Am. J. Phys. **74**, 54 (2006).
- [15] Trizac, E., Pagonabarraga, I., *Equation of state for hard-sphere fluids with and without Kac tails*, Am. J. Phys. **76**, 777 (2008).
- [16] Amor, R. C., Esguerra, J. P. H., *Evolution of ideal gas mixtures confined in an insulated container by two identical pistons*, Am. J. Phys. **78**, 916 (2010).
- [17] Swendsen, R. H., *Using computation to teach the properties of the van der Waals fluid*, Am. J. Phys. **81**, 776 (2013).
- [18] Lehmann, J. K., *Determining the thermal expansion coefficient of gases*, J. Chem. Educ. **69**, 943 (1992).

- [19] Chapin, W. H., Maxson, R. N., *New apparatus for determining the coefficient of expansion of gases*, J. Chem. Educ. **2**, 490 (1925).
- [20] Breck, W. G., Holmes, F. W., *An experimental approach to the ideal gas law*, J. Chem. Educ., **44**, 293 (1967).
- [21] Lewis, D. L., *A simple Boyle's law experiment*, J. Chem. Educ., **74**, 209 (1997).
- [22] Talanquer, V., *Reclaiming the central role of equations of state in thermodynamics*. J. Chem. Educ. **83**, 127 (2006).
- [23] Acevedo-Chávez, R.; Costas, M. E., *Response coefficients in thermodynamic systems (I)*, Rev. Mexicana Fis. **E53**, 174 (2007).

Quantum Mechanics of the Solar System

EDVCATIO PHYSICORVM



L. Acedo

*Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar,
Universitat Politècnica de Valencia, Camino de Vera
s/n, 46022, Valencia, Spain University, Street 1 No. 100.*

E-mail: luiacrod@imm.upv.es

(Received 9 January 2014, accepted 16 June 2014)

Abstract

According to the correspondence principle, as formulated by Bohr, both in the old and the modern quantum theory, the classical limit should be recovered for large values of the quantum numbers in any quantum system. However, this classical limit of quantum theory is not so straightforward as in the interface of other generalizations of classical mechanics and other domains. In particular, relativistic kinematics and mechanics reduce to Newtonian equations by simple algebra in the case of bodies moving with small velocities compared to the speed of light in vacuum. In this paper we consider the correspondence limit to the two-body problem in gravitational physics, the limit in which both the principal and the angular quantum numbers, N , L are very large. In this limit, we compare with the classical elliptical orbits and we find that the macroscopic coherent quantum states correspond to the statistical average of every classical state compatible with conservation laws for the total energy and angular momentum. We also consider the perturbed Kepler problem with a central perturbation force proportional to the inverse of the cube of the distance to the central body. The exact solution for the quantum eigenstates shows that the first order perturbation to the energy eigenvalues are obtained classically as the temporal orbital average of the perturbation potential.

Keywords: Rydberg states, Kepler problem, Orbital perturbations.

Resumen

De acuerdo con el principio de correspondencia, tal como fue formulada por Bohr, tanto en la vieja y en la moderna teoría cuántica, el límite clásico se debe recuperar para valores grandes de los números cuánticos en cualquier sistema cuántico. Sin embargo, este límite clásico de la teoría cuántica no es tan sencillo como en la interfaz de otras generalizaciones de la mecánica clásica y otros dominios. En particular, la cinemática relativista y la mecánica se reducen a las ecuaciones de Newton por álgebra simple, en el caso de los cuerpos que se mueven con velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz en el vacío. En este artículo se considera el límite de la correspondencia con el problema de los dos cuerpos de la física gravitacional, el límite en el que tanto el número cuántico principal como los números cuánticos angulares, N , L son muy grandes. En este límite, se compara con las órbitas elípticas clásicas y se encontró que los estados cuánticos coherentes macroscópicos corresponden al promedio estadístico de cada estado clásico compatible con las leyes de conservación de la energía total y el momento angular. También se considera que el problema de la perturbación de Kepler con una fuerza de perturbación central proporcional a la inversa del cubo de la distancia al cuerpo central. La solución exacta para los estados cuánticos propios muestra que la perturbación de primer orden a los valores propios de energía es obtenida clásicamente como la media orbital temporal de la potencial perturbación.

Palabras clave: estados de Rydberg, problema de Kepler, perturbaciones orbitales.

PACS: 03.65Ge, 03.65.Ta, 45.20.-d

ISSN 1870-9095

1. INTRODUCTION

The discovery of new phenomena beyond the domain of validity of physical theories usually requires the formulation of new theories encompassing both the classical applications of the former theory and the novel ones. In a purely empirical way the new theory must reduce to the original by producing the same predictions in the restricted domain in which the old theory has proven right for a long time. This commonly, but not necessarily,

implies that, mathematically, these two different theories coincide in the smaller domain of the previous one.

However, this not means that the novel theory is conceptually equivalent because, despite their formal correspondence, both theories could base their predictions on very different standpoints. This evolution of physical theory has taken place many times in the history of science.

A well-known example is the case of special relativity and its reduction to classical mechanics in the limit of small velocities compared to the speed of light. In this limit,

Lorentz transformations become Galilean transformations and the total energy of a moving body reduce to the classical expression for the kinetic energy save for the rest energy term, the last one being a characteristic prediction of special relativity [1].

From a pedagogical point of view this is a very useful derivation because it allows us to gain confidence in the new theory by retrieving the well-known results of the previous theory subsumed into the most recent one. Hence, a correspondence principle appears in any scientific revolution or generalization between the modern theory and the previous one subsumed by it. The reasons for the existence of such a principle are clear: if the previous theory has been successful till the discovery of anomalies in another domain, it means that, in that domain at least, is formally correct. So, the new theory should reduce to it to avoid conflict with previous experiments.

In cases of radical conceptual departure from the classical theory, such as it has occurred with quantum mechanics, the application and interpretation of the correspondence principle is not an intuitively simple task.

Already for the old quantum theory and Bohr's model of the atom, the correspondence with the classical limit was proposed to be achieved for large values of the quantum numbers [2]. After the emergence of the modern Schrödinger's wave mechanics, and the equivalent abstract Heisenberg's matrix mechanics, Bohr's correspondence principle was adapted to them. However, the physical state in quantum mechanics is represented by a complex wave function interpreted in terms of the probability of finding the particle in a certain interval by means of Born's rule [3].

This is very different from the concepts of Newtonian mechanics in terms of particles following clearly-defined trajectories in space.

Another important step in the correspondence of quantum mechanics with classical physics was made by Ehrenfest in 1927 with the proof of the following theorem for a system with Hamiltonian $H = p^2/(2m) + V(x)$:

$$m \frac{d \langle x \rangle}{dt} = \langle p \rangle. \quad (1)$$

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} = - \left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle. \quad (2)$$

Where $\langle x \rangle$ and $\langle p \rangle$ are the expectation values for the position and the momentum, respectively. This equation provides a correspondence with Newton's second law with the classical force as the expectation value of the potential gradient. The classical limit is assumed nowadays to emerge as a consequence of quantum decoherence, a process in which the superposition states loss the coherence of their phase angles by the irreversible interaction with the environment [4]. Consequently, pure quantum states cannot be held in macroscopic systems because the thermal interactions with the environment make them to lose their coherence. Nevertheless, the demand of the quantum computing project requires that coherence in quantum states should be maintained as long as possible because quantum computations rely on the superposition properties of

quantum states. As early as 1999, Nakamura *et al.* obtained 1 μ s coherence times for the two-level states of superconducting electrodes joined with Josephson junctions to a reservoir [5].

Another field where quantum mechanics has been applied to macroscopic systems is quantum cosmology. In 1967, the so-called Wheeler-DeWitt equation was proposed in the context of canonical quantum gravity as a model for the wave function of the Universe as a whole [6]. So, macroscopic quantum states are interesting in themselves both as a practical tool with possible engineering applications (as in the case of quantum computing). Also from a fundamental point of view, the analysis of macroscopic quantum states also shed light on the conceptual problems of quantum mechanics as a replacement of classical deterministic mechanics.

The study of the classical limit of the hydrogen atom was performed by Brown in 1973, who recovered the classical circular orbits for large n [7]. Experimental work on Rydberg wave-packets was even performed in the nineties of the past century and many similarities with classical behaviour was found [8, 9].

In this paper we revisit the two-body problem (pure Kepler problem and a problem with perturbations) with the tools of Schrödinger's wave mechanics and we discuss their interpretation in connection with classical physics. This example could be of real pedagogical interest for students because it covers subjects ranging from classical and quantum mechanics and the theory of perturbations and goes beyond the hackneyed quantum harmonic oscillator used in most texts.

The paper is organized as follows: In Section 2 we discuss the hydrogen atom solution of Schrödinger's equation in the limit of large principal, n , and angular, l , quantum numbers. We show that circular orbits correspond to $l = n - 1$. For $l = n/2$ we discuss the statistical average correspondence among the available elliptical orbits, for fixed energy and angular momentum, and the quantum eigenstate. In Section 3 we analyze the effect of a perturbing potential $\delta V(r) = -\alpha/(2r^2)$, where $\delta V(r)$ is the perturbation for unit mass and α is a small constant. The relation among the solution of Schrödinger's equation for the eigenvalues of the energy and the classical theory of perturbations is also discussed. Finally, some remarks and conclusions are given in Section 4.

II. THE QUANTUM KEPLER'S PROBLEM

We consider the solution of Schrödinger's equation for the gravitational potential $V(r) = -G M m/r$, where M is the mass of the central body, m is the mass of the orbiting body (assuming $M \gg m$) and r is the distance among the bodies centers modelled as point-like or spherical. Mathematically speaking, the gravitational and electrostatic potential are the same. For this reason in Bohr and Sommerfeld models of the old quantum theory the hydrogen atom was described as a miniature solar system supplemented with quantization rules. In this paper we pursue the inverse analogy to describe a solar system as a macroscopic atom. Energy

eigenvalues of the two-body problem depend only on the principal quantum number, n , while the angular momentum eigenvalue is proportional to the angular quantum number, l :

$$E_n = -\frac{GMm}{2n^2 a_0} \quad (3)$$

$$J = l\hbar \quad (4)$$

Where a_0 is the Bohr's radius of the system given by:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{GMm^2} \quad (5)$$

If we consider the values of the masses for the Sun, $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg, and the Earth, $m = 5.972 \times 10^{24}$, we get from Eq. (5) that the Bohr radius is $a_0 = 9.27 \times 10^{-137}$ m, many orders of magnitude smaller than the Planck length.

As the mean distance of the orbiting particle to the force center is given by $r_n = n^2 a_0$. If we take r_n as the mean Earth-Sun distance, i. e., $r = 149.6 \times 10^6$ km we find $n \approx 4 \times 10^{73}$ for the principal quantum number. These values are extremely large but, as we will soon see, even for $n = 100$ the essential features of the classical limit are unveiled.

Another important relation for the orbital eccentricity, ε , is obtained from the classical relation of ε with the total energy and angular momentum of the planet [10] as follows:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2J^2 E / m}{(GMm)^2}} = \sqrt{1 - \frac{l^2}{n^2}} \quad (6)$$

Where we have used Eq. (3). Notice that Eq. (6) is the same result found in Sommerfeld's model of the atom. The eigenfunctions are derived exactly for the hydrogen's atom [11, 12] and they are usually expressed as the product of a radial part, $R_{n,l}(r)$ and an angular part, $F_{n,l,m}(\theta, \varphi)$, i. e., $\Psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r)F_{l,m}(\theta, \varphi)$ with:

$$R_{n,l}(r) = A_{n,l} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^l e^{-r/(na_0)} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right) \quad (7)$$

Where $L_p^q(x)$ are the Laguerre polynomials of order p , q [13] and the normalization coefficients are given by:

$$A_{n,l} = \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} \right]^{1/2} \quad (8)$$

The normalization condition for the radial function is:

$$\int_0^\infty |R_{n,l}(r)|^2 r^2 dr = 1 \quad (9)$$

The angular part is expressed in terms of the spherical harmonics for any central potential [11]:

$$F_{l,p}(\theta, \varphi) = Y_l^p(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-p)!}{4\pi(l+p)!}} P_l^p(\cos \theta) e^{ip\varphi} \quad (10)$$

Where the last identity expresses the relation of the spherical harmonics with the associated Legendre polynomials, $P_l^p(\cos \theta)$, we have used p instead of m for the magnetic quantum number to avoid confusion with the mass. According to Born's principle, the modulus $|Y_l^p(\theta, \varphi)|^2$ is proportional to the probability density for finding the particle in the solid angular interval $d\theta d\varphi$. As we are concerned with states analogous to macroscopic orbits we will restrict to the case with n, l large and a magnetic quantum number $p = l$. In Fig. 1 we show a plot of the angular factor of the probability distribution for $n = l = p = 20$. The distance to the origin is a measure of the probability density in the direction θ, φ where θ is the polar angle and φ is the azimuth. We notice that even for these relatively small values of the quantum numbers the confinement of the orbit to the plane perpendicular to the z axis is quite apparent. The reason for that confinement is clear from the identity:

$$Y_{l,l}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}} \sin^l \theta \quad (11)$$

Which implies that the angular factor in the probability function decays very fast except for $\theta = \pi/2$, i. e., for the plane perpendicular to the z axis. So, we have shown that for $l = p$ large the quantum state is restricted to a plane. In the following we will analyze the radial contribution to the probability function in order to elucidate the relation with classical orbits.

A. Case $l=n-1$ and circular orbits

This case has been recently studied by Keepports [14] but we describe it here in some detail for completeness.

We consider the radial probability distribution, $|rR_{n,l}(r)|^2$, in the case of maximum angular quantum number, $l = n - 1$. This correspond to the probability of finding the particle in the interval $r, r + dr$. Moreover, as discussed before we know that this probability will only be non-negligible in the plane $\theta = \pi/2$ as occurs in classical physics. From Eq. (7) and the properties of Laguerre polynomials [15] we find:

$$R_{n,n-1}(\rho) = \frac{1}{n^2(2n-1)!} \rho^{2n-2} e^{-2\rho/n} \quad (12)$$

Where $\rho = r/a_0$ is the distance to the origin measured by taking Bohr's radius as our unit. The average distance to the origin is then given by:

$$\langle \rho \rangle = \int_0^\infty \rho^3 R_{n,n-1}(\rho) d\rho = n(n+1/2) \quad (13)$$

And, similarly, the variance is found to be

$$\sigma = \sqrt{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2} = n\sqrt{\frac{n-1}{2} + \frac{1}{4}}$$

And consequently,

$$\sigma / \langle \rho \rangle = 1 / \sqrt{2n+1}$$

And the radial probability distribution becomes sharper and sharper as n increases.

In Figure 2 a density plot of $\rho^2 R_{n,l}^2(\rho)$ for $n=50$ and $l=49$ shows this behavior.

So, the quantum state becomes a circular orbit.

$$r^2 R_{n,n-1}(r)^2 \rightarrow \delta(r - n^2 a_0), \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Born's interpretation of the wave function indicates that the probability of finding the particle is uniform along the circular path. Classically we can interpret this result as a consequence of the uniform velocity with which the particle traverses its orbit. We can obtain the correspondent classical velocity from the quantum solution from the probability flux [11]:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im} [\psi^* \vec{\nabla} \psi]. \quad (15)$$

Where Im denotes the imaginary part. Consequently, the only contribution to Eq. (15) comes from the imaginary term in the definition of the spherical harmonic as given in Eq. (10) for $p=1$. But, $\partial \psi(n,l,1) / \partial \phi = i l \psi(n,l,1)$ and we have:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \frac{l}{r \sin \theta} \psi \psi^* \phi = \frac{\hbar l}{m n^2 a_0} \phi + O(n^{-1}). \quad (16)$$

Where we have used Eq. (13) and we have also taken into account that $\theta = \pi/2$ for non-negligible values of the distribution function. ϕ is the unit azimuthal vector in the plane $\theta = \pi/2$, i. e., this is a unit vector tangential to circular orbits. A velocity vector can now be obtained as the quotient of the probability flux and the probability density as follows:

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{\psi \psi^*} = \frac{\hbar l}{m n^2 a_0} \phi = \sqrt{\frac{GM}{a}} \phi. \quad (17)$$

Notice that the last step is deduced from Eq. (5) and the classical angular momentum per unit mass for the circular orbit given by $l \hbar / m = \sqrt{GMa}$.

So, we finally deduce the velocity for the particle which traverses the classical circular orbit. In this interpretation, the quantum probability corresponds to the probability of finding, at a random time, the particle at a given point of the orbit. This temporal interpretation of quantum states in

the limit of large quantum numbers is usually applied in the case of the harmonic oscillator [12]. In the next section, we will show that we can understand elliptical orbits in the same way.

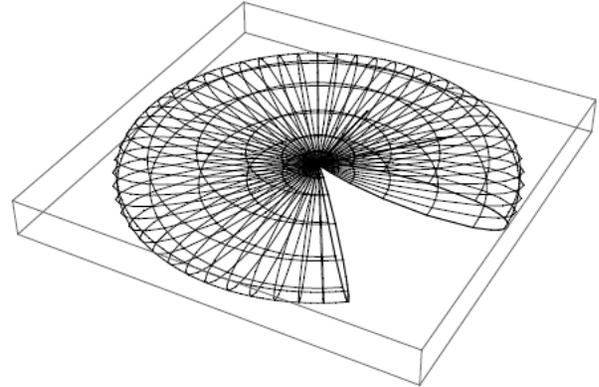


FIGURE 1. A slice of the three-dimensional plot for the square modulus of the spherical harmonic with $l = p = 20$. The distance of the surface to the origin is proportional to the probability density in that particular direction. The height of the parallelepiped is a ten per cent of the other two sides.

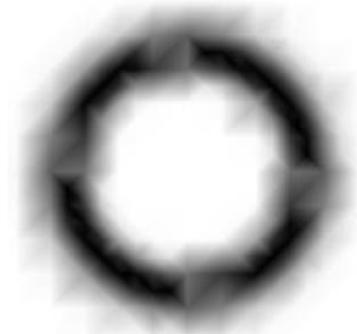


FIGURE 2. Density plot for the probability density with $n=50$, $l=p=49$.

B. Case $l < n-1$ and elliptical orbits

In this case we should find a relationship with classical elliptical orbits. In Fig. 3 we have plotted the probability $P(r) = r^2 R_{n,l}(r)^2$ for finding the particle between two close spheres of radii r and $r+d r$ in the case $n=50$, $l=n/2$. For these values, the corresponding eccentricity is $\varepsilon = \sqrt{3}/2$. The classical orbits are given by [16]:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}. \quad (18)$$

A classical interpretation of the asymptotic quantum state for large n , and $l < n - 1$ is obtained by performing a temporal average over all possible elliptic orbits compatible with conservation laws, i. e., all orbits with the same angular momentum and total energy. In Fig. 4 we plot ten orbits with eccentricity $\varepsilon = 0.8$ whose semi-major axes are displaced an angle $\pi/5$ with respect to those of their neighbouring orbits.

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho}{2\rho - \rho^2 - 1 + \varepsilon^2} \quad (23)$$

Where $\rho=r/a$ and the prefactor has been chosen in order to $P(r)$ to be normalized in the interval $0 \leq r < \infty$. To compare with the quantum case we use $n=1000$, $l=500$ and the scaled radius $\rho = r/(n^2 a_0)$, i. e., in parallel with the circular orbit studied in the previous section the semi-major axis of the orbit correspond to $a = n^2 a_0$. To smooth the oscillations of the quantum probability distribution we perform an average over uniform intervals of width 0.1. The classical orbital average probability in Eq. (23) is compared with the averaged quantum result from Eq. (7) in Fig. 5. Notice that the orbital eccentricity of the classical orbits is given by Eq. 6 as $\varepsilon = \sqrt{3}/2$ for $l=n/2$. The excluded classical regions are given by an inner circle whose radius is the perihelion distance to the central body, $\rho_{\min} = 1 - \varepsilon \approx 0.134$, while the maximum distance to the central body or aphelion is $\rho_{\max} = 1 + \varepsilon \approx 1.866$. We have shown that the probability distribution for a stationary quantum state of the hydrogen atom in the correspondence limit ($n, l \gg 1$) can be interpreted as a temporal average over all possible trajectories sharing the same energy and angular momentum and with an eccentricity given by Eq. (6).

In parallel with the circular orbit case, we can calculate the quantum probability flux from Eq. (15) and we obtain the result:

$$\vec{j} = \frac{J}{r} \psi \psi^* \phi \quad (24)$$

Where J is the angular momentum per unit mass. This can be interpreted in terms of a transverse velocity:

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{\psi \psi^*} = \frac{J}{r} \phi \quad (25)$$

This is a consequence of the orbital average over all elliptical orbits with the same energy and angular momentum. As displayed in Fig. 4, every point belongs to two elliptical orbits in such a way that the average of the radial motion is zero and only the transverse velocity appears after the average over orbits has been performed.

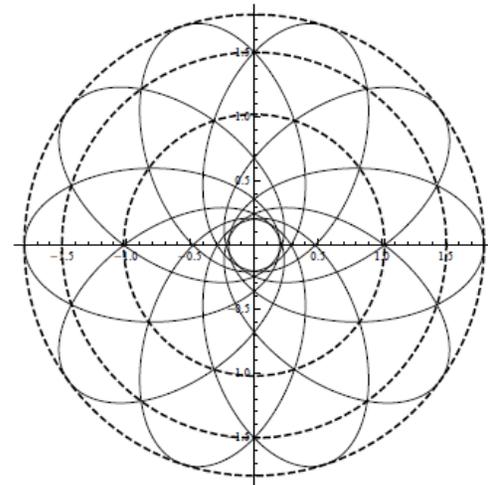


FIGURE 4. A set of ten elliptical orbits ($\varepsilon=0.8$) sharing the same plane and uniformly rotated.

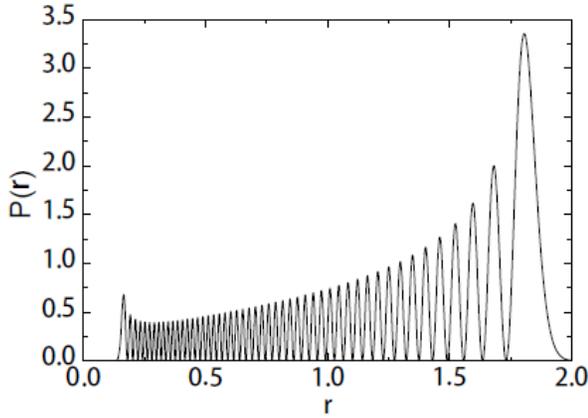


FIGURE 3. Radial probability density ($n=50$, $l=25$) for finding the orbiting particle.

We see from Fig. 4 that every point between the circles of radii between the perihelion, $r_{\min} = a(1 - \varepsilon)$, and the aphelion, $r_{\max} = a(1 + \varepsilon)$, belongs to the intersection of two rotated elliptical orbits. That point corresponds to opposite orbital angles or true anomalies: θ and $-\theta$. So, the probability of finding the particle at a randomly chosen instant t should be proportional to the time spent by the particle in the angular interval $\theta, \theta + d\theta$:

$$P(\theta)d\theta = \frac{d\theta}{T\omega(\theta)} = \frac{d\theta}{TJ} r^2 \quad (19)$$

Where we have taken into account the relation of the angular velocity with the angular momentum (per unit mass) as given by Kepler's second law $\omega(\theta) = J / r^2$. We should also consider the expression of the angular momentum (per unit mass) in terms of the orbital geometric parameters, i. e., the semi-major axis and the orbital eccentricity [16]:

$$J = \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)GM} \quad (20)$$

M being the mass of the central body, as usual. Kepler's third law is also given as:

$$T = 2\pi a^{3/2} \mu^{-1/2} \quad (21)$$

By substitution of Eqs. (18), (20) and (21) into Eq. (19) we find:

$$P(\theta)d\theta = \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad (22)$$

It is more convenient for comparison with the quantum probability distribution to perform a variable change from θ to r . So, we use Eq. (18) again to find:

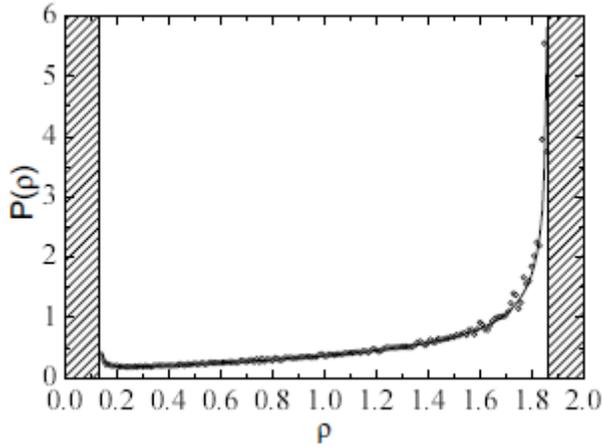


FIGURE 5. The classical probability distribution for elliptical orbits (solid line) versus the smoothed quantum prediction for $n=1000, l=500$ (circles). Dashed areas correspond to the excluded classical regions.

III. CORRESPONDENCE FOR CLASSICAL ORBIT PERTUBATIONS

In this section, we consider a radial perturbation of the classical Newtonian potential and its effect on quantum stationary states in the correspondence limit. As the perturbation theory in quantum mechanics cannot be applied to very large values of the quantum numbers we will propose a problem with exact solution. We consider the Kepler problem with a $1/r^3$ perturbation force term corresponding to the potential:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{\alpha m}{2r^2}. \quad (26)$$

Where α is a small quantity. The radial part of the wavefunction, $u(r)=r R(r)$, verifies the following equation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left\{ -\frac{GMm}{r} - \frac{\alpha m}{2r^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right\} u(r) = Eu(r) \quad (27)$$

It is usually convenient to rewrite this radial equation in terms of non-dimensional parameters. We define a non-dimensional distance to the origin, ρ , and a parameter, λ , as follows:

$$\rho = \sqrt{-\frac{8mE}{\hbar^2}} r. \quad (28)$$

$$\lambda = \frac{GMm}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{-2E}}. \quad (29)$$

This way we find that Eq. (27) can be casted into non-dimensional form as:

$$\rho \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left\{ \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)+\nu}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right\} u(\rho) = 0. \quad (30)$$

Where $\nu = \alpha m^2 / \hbar^2$. Notice that Eq. (30) has the same structure that the radial equation for the standard hydrogen atom problem. The only difference arising from the extra term ν in the denominator of the effective angular momentum potential. To solve this equation the standard approach resorts to the study of its behaviour in the limits of large and small ρ . For large ρ the terms inversely proportional to ρ and ρ^2 are negligible and we have $u(\rho) \propto e^{-\rho/2}$. For small values of ρ the ρ^{-2} term dominates the behaviour and an algebraic solution $u(\rho) = \rho^k$ is suggested. By direct substitution we find:

$$k(k-1) = l(l+1) + \nu. \quad (31)$$

Whose solution for k is:

$$k = \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 4\nu}}{2} \approx l + 1 + \frac{\nu}{2l+1}. \quad (32)$$

Where the approximation is obtained on the assumption that $\nu \ll 1$. The standard change for the radial equation is then, $u(\rho) = \rho^k f(\rho) e^{-\rho/2}$ and $f(\rho)$ satisfies the second-order differential equation:

$$\rho \frac{d^2 f}{d\rho^2} + (2k - \rho) \frac{df}{d\rho} + (\lambda - k) f(\rho) = 0. \quad (33)$$

Whose solution is obtained by series expansion:

$$f(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j. \quad (34)$$

By inserting Eq. (34) into Eq. (33) we deduce that the coefficients $a_j, j=0,1,2,\dots$ are obtained through the following recurrence relation:

$$a_{j+1} = \frac{k+j-\lambda}{(j+1)(j+2k)}, \quad j \rightarrow \infty \quad (35)$$

It is well-known that a_j should be zero for some j because otherwise the series in Eq. (35) describes the exponential $f(\rho) \propto e^\rho$ and the resulting eigenfunction $u(\rho) \propto \rho^k e^{\rho/2}$ is not normalizable. If $a_j = 0$ for some j the series in $f(\rho)$ is finite and we have a polynomial solution. This condition will be written as:

$$\lambda = k + n - (l + 1). \quad (36)$$

This condition implies that Eq. (33) is verified by the associated Laguerre polynomials $f(\rho) = L_{n-l-1}^{2k-1}(\rho)$. From the definition of λ in Eq. (28) we find the perturbed energy levels:

$$E_{n,l} = -\frac{(GM)^2 m^3}{2\hbar^2} \frac{1}{\lambda^2}. \quad (37)$$

Notice that in the unperturbed case, $\nu = 0$, $\lambda = n$ and we recover Bohr's energy levels. The perturbed potential in Eq. (26) breaks angular momentum degeneracy and the energy levels now depend also on l . For small perturbations $\nu \ll 1$ we can approximate this expression to find the ratio on the energy levels perturbations and Bohr levels as follows:

$$\frac{\Delta E_{n,l}}{E_n} = -\frac{\nu}{nl} + O(\nu^2). \quad (38)$$

A. Classical energy perturbation

Now we consider the effect of a classical perturbation given by the extra potential $\delta V(r) = -\alpha m / (2r^2)$ on the energy of Kepler's elliptical orbits $E = -GMm / (2a)$. The time average of the perturbing potential in the unperturbed Keplerian orbit is given by:

$$\langle \delta V \rangle = \frac{\alpha}{2T} \int_0^T \frac{dt}{r^2}. \quad (39)$$

Where T is the orbital period. This integral can be more readily calculated if we use the orbital equation and the equation of time in terms of the eccentric anomaly [15]:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \eta), \quad (40)$$

$$\frac{2\pi dt}{T} = (1 - \varepsilon \cos \eta) d\eta. \quad (41)$$

From Eqs. (39)-(41) we can perform the time integral over the eccentric anomaly:

$$\langle \delta V \rangle = \frac{\alpha m}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{1 - \varepsilon \cos \eta} = \frac{\alpha m}{2a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (42)$$

Where the semi-major axis is given by:

$$a = n^2 a_0 = n^2 \frac{\hbar^2}{GMm^2}. \quad (43)$$

And we have used the expression in Eq. (5) for the Bohr's radius, a_0 , of the gravitational system. From Eqs. (6), (42) and (43) we can calculate the quotient among the

perturbation and the energy of the original unperturbed orbit as follows:

$$\frac{\langle \delta V \rangle}{E} = -\frac{\alpha}{GMa\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = -\frac{\alpha m^2}{\hbar^2 nl} = -\frac{\nu}{nl}. \quad (44)$$

Which coincides with the quantum result in Eq. (38) to first order in ν .

IV. CONCLUSIONS

Bohr's correspondence principle has largely influenced the development of quantum mechanics and its interpretation [17]. Even on the early quantum theory, Bohr was already interested in explaining the connection of the novel quantum conditions from a classical point of view. It was shown that the angular momentum quantization $L = n\hbar$ was compatible with the emission and absorption of photons with a frequency given as an integer multiple of $1/T$, T being the orbital period for n large. This suggested a promising avenue to recover a result of classical electrodynamics, *i. e.*, a charged orbiting body radiates with frequencies in multiples of the orbiting frequency. This frequency interpretation of the correspondence principle appeared very early in the development of the theory. In another interpretation, the intensity of the classical radiation was related to quantum emission probabilities. A third interpretation stated that every allowed transition by the quantum selection rules corresponds to one harmonic component of the classical motion [18].

In many texts of quantum physics, however, the correspondence principle takes a broader perspective as the convergence of the classical and quantum predictions in the case of large quantum states, *i. e.*, those widely spread in space and corresponding to bodies of large mass. However, scarce dedication to this issue is given in textbooks, despite its pedagogical and conceptual interest and recent experimental developments on this subject [8, 9]. The one-dimensional harmonic oscillator is usually the only system studied for large quantum numbers.

In this paper we have analyzed the most important exactly solvable problem of Schrödinger's quantum mechanics, *i. e.*, the hydrogen atom, a single particle orbiting towards a center of mass attracted by Coulomb force. In the classical limit this problem should correspond to a Solar system problem and we expect to recover the characteristic orbital parameters not present in Born's probability density for small values of the quantum numbers. We have shown how for large values of the angular quantum number, l , the angular factor in Born's probability density restricts the state to a plane in agreement with the classical property of planar motion in Kepler's problem. Moreover, for large n the radial part is confined to a very precise radius and, consequently, the quantum state has a very narrow toroidal shape in correspondence with classical circular orbits. Classical orbital velocity can also be deduced as the quotient of the quantum flux and Born's

probability density.

A similar approach to the elliptical orbits lead to the conclusion that the quantum state in the macroscopic limit is the result of a time average over all orbits sharing the same invariants: energy and angular momentum. The quantum state resembles a flattened disk with an inner hole because the classical region $r < a(1 - \epsilon)$ becomes forbidden as the particle cannot be found at distances from the center smaller than the perihelion.

Finally, we have shown that perturbations in the eigenvalue of the energy can be computed as time orbital averages of the perturbation potential over the unperturbed orbit of the Newtonian potential. We find that the correspondence with quantum eigenstates in the Kepler's problem is achieved as an average over all possible classical orbits with the same energy and angular momentum vector. The quantum probability density coincides then with the probability to find the particle in a given position at a randomly chosen instant of time. We show that in Quantum Mechanics all possible configurations have the same status of reality and coexist to define the stationary states.

An interesting extension of this work would be the understanding of macroscopic quantum states in a classical gravitational field in General Relativity in order to disclose the correspondence principle for quantum fields in classical curved spacetime. Further work along this line is being carried out.

REFERENCES

- [1] French, A. P., *Special relativity*, (Norton & Company Inc., New York, 1968).
- [2] Nielsen, J. R., *The correspondence principle in Niels Bohr collected works*, (Elsevier, Amsterdam, 1976).
- [3] Dirac, P. A. M., *The principles of quantum mechanics*, (Oxford University Press, Oxford, 1958).
- [4] Schlosshauer, M., *Decoherence, The measurement problem and interpretations of quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267-1305 (2004). ArXiv: quant-ph/0312059v4.
- [5] Nakamura, Y., Pashkin, Y. A. and Tsai, J. S., *Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box*, Nature **398**, 786-88 (1999). ArXiv: cond-mat/9904003v1.
- [6] DeWitt, B. S., *Quantum theory of gravity I. The canonical theory*, Phys. Rev. **160**, 1113-1148 (1967).
- [7] Brown, L. S., *Classical limit of the hydrogen atom*, Am. J. Phys. **41**, 525-530 (1973).
- [8] Yeazell, J. A. and Stroud Jr., C. R., *Observation of fractional revivals in the evolution of a Rydberg atomic wave packet*, Phys. Rev. A **43**, 5153-5156 (1991).
- [9] Gaeta, Z. D., Noel, M. W. and Stroud Jr., C. R., *Excitation of the classical limit state of an atom*, Phys. Rev. Lett. **73**, 636-639 (1994).
- [10] Danby, J. M. A., *Fundamentals of celestial mechanics*, (Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia, 1962).
- [11] Burkhardt, C. E. and Leventhal, J. J., *Foundations of quantum physics*, (Springer Science Business Media, New York, 2008).
- [12] Eisberg, R. and Resnick, R., *Quantum physics of atoms, molecules, solid, nuclei and particles*, (John Wiley & Sons, New York, 1985).
- [13] Szego, G., *Orthogonal polynomials*, (American Mathematical Society, 4th Edition, 1939).
- [14] Keepports, D., *Quantum mechanical earth: where orbitals become orbits*, Eur. J. Phys. **33**, 1587-1598 (2012).
- [15] Abramowitz, M. and Stegun, I. (eds.), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables*, (Dover Publications, Inc., New York, 1965).
- [16] Burns, J. A., *Elementary derivation of the perturbation equations of celestial mechanics* **44**, 944-949 (1976).
- [17] Jammer, M., *The conceptual development of quantum mechanics*, (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [18] Bokulich, A., *Bohr's correspondence principle*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2010 Edition), Zalta, E. N., (ed.), <http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/bohr-correspondence/>.

Laser de rubi: uma abordagem baseada em unidades de ensino potencialmente significativas (UEPS)



Daniela Schittler¹, Marco Antonio Moreira²

¹*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, RS 527 – Estrada de Acesso Secundário, Tupanciretã, Distrito de São João do Barro Preto, CEP 98130-000 – Júlio de Castilhos, Rio Grande do Sul/RS.*

²*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Av. Bento Gonçalves, 9500, Campus do Vale CEP 91501-970 - Porto Alegre, Rio Grande do Sul/RS.*

E-mail: danischittler@jc.iffarroupilha.edu.br

(Recibido el 10 Febrero 2014; aceptado el 28 de Junio de 2014)

Resumen

Este artigo apresenta o estudo-piloto de uma Tese de doutorado em ensino de física, laser de rubi: uma abordagem baseada em Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). O projeto contempla uma real proposta de trabalho para a inserção de alguns tópicos de física moderna e contemporânea (FMC) no primeiro ano do ensino médio através de uma UEPS. Um dos objetivos do trabalho é introduzir tópicos de FMC desde o primeiro ano do ensino médio explorando limites clássicos. O estudo-piloto foi aplicado no segundo semestre de 2012, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - Câmpus Júlio de Castilhos - RS. Dez meses depois da execução do estudo-piloto a pesquisadora aplicou um questionário com o intuito de verificar indícios de que a UEPS tenha contribuído efetivamente com a aprendizagem significativa dos alunos envolvidos no estudo.

Palabras clave: Aprendizagem Significativa, Laser, Ensino de Física.

Abstract

This paper presents a pilot study of a Doctoral Thesis in Physics Teaching, Ruby Laser: An approach based on Potentially Meaningful Teaching Units (PMTU). The research design features a real working proposal for the inclusion of some topics of Modern and Contemporary Physics (MCP) in the first year of high school through a PMTU. One goal of our work is to introduce FMC topics since the first year of high school exploring classical limits. This pilot study was implemented in the second half of 2012, at the Federal Institute of Education, Science and Technology Farroupilha - Campus Júlio de Castilhos – RS, Brazil. Ten months after the implementation of the pilot study the researcher applied a questionnaire in order to look for evidences that the PMTU could have effectively contributed to meaningful learning of the students involved in the study.]

Keywords: Meaningful Learning, Laser, Physics Teaching.

PACS: 01.40.Gm, 01.40.gb, 01.40.ek

ISSN 1870-9095

I. INTRODUÇÃO

No século passado ocorreram grandes avanços tecnológicos, principalmente na escala microscópica. As crianças e os jovens de hoje parecem possuir, por natureza, habilidade e facilidade em compreender os novos dispositivos eletrônicos. A realidade de uma criança é nascer e ter contato quase que imediato com as novas tecnologias. A escola não pode continuar ignorando essa realidade, pois mesmo a Física do século XIX não é contemplada na sala de aula de modo a discutir tópicos de dispositivos da época. Diante deste contexto é indispensável inserir tópicos de Física Moderna e Contemporânea (FMC) no currículo do Ensino Médio, nos quais esses avanços tecnológicos estão fundamentados.

Com a inserção de conceitos quânticos, por exemplo, na Física do Ensino Médio as aulas estariam mais próximas da realidade do aluno e, dessa forma, poderiam ser mais interessantes e participativas. No entanto, detectamos dois problemas apresentados em estudos anteriores [1, 2, 3]: a) a maioria dos professores de Física do Ensino Médio não está preparada para discutir conceitos básicos de FMC; e b) os programas a serem cumpridos são extensos e passam a ser não compatíveis com a carga horária oferecida nas escolas públicas de Ensino Médio. Em contrapartida, estudantes de pós-graduação, por exemplo, realizam vários estudos para introduzir a FMC com novas metodologias e abordagens no Ensino Médio, elaboram textos de apoio aos professores, realizam cursos de extensão para alunos do curso de física licenciatura e para professores atuantes na área como

tentativa de começar uma mudança no programa e nas estratégias de ensino da disciplina de física no ensino médio.

Porém, temos muito a fazer. As pesquisas realizadas precisam chegar e permanecer nas escolas e não pertencer ao domínio de uma minoria de pesquisadores. Além disso, devemos tornar a pesquisa mais próxima e viável da realidade das escolas públicas brasileiras. Para isso, precisamos instigar o professor de Ensino Médio a tomar como problema dele a física moderna e contemporânea, reconhecer que esse conhecimento é uma necessidade do aluno e, ainda, apresentar uma real proposta de trabalho. O presente estudo pretende viabilizar a compreensão de um modelo semi-clássico e de um princípio fundamental da física clássica, que são o modelo do átomo de Bohr e o princípio da conservação do momento angular. Com o uso destes fundamentos físicos discutiremos o efeito laser e o laser de rubi no primeiro ano do ensino médio através de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS).

II. OBJETIVOS

O objetivo geral do trabalho é introduzir conceitos fundamentais de física clássica, moderna e contemporânea no primeiro ano do ensino médio através de uma UEPS explorando limites da física clássica.

O tema do estudo laser de rubi possui especificamente os objetivos de discutir: 1.) a inserção de um tópico de FMC no primeiro ano do ensino médio, tornando as aulas de física mais próximas à realidade do aluno; 2.) a inserção no ensino médio de um princípio fundamental da física clássica que é o princípio da conservação do momento angular; 3.) a inserção de um modelo semi-clássico da Física, que permite debater alguns aspectos da estrutura da matéria, que é o modelo do átomo de Bohr; 4.) o próprio efeito laser, níveis de energia, quantização da energia, inversão de população, emissão estimulada e o caso específico laser de rubi. Entende-se que o laser de rubi é uma radiação eletromagnética emitida na frequência da cor vermelha devido à presença de impurezas na proporção de 1% de cromo no óxido de alumínio Al_2O_3 e é nelas que ocorre a inversão de população que origina o laser [4]; 5.) com (1) e (2) por argumentação, o Efeito Laser e o dispositivo laser que aparece em muitos equipamentos modernos; 6.) onde o laser se faz presente: leitores de CD, substituir velas em motores de carros, sistema de escuta a laser FGLD-786, dispositivos anticoagulantes a laser; a Rússia estuda equipar com seus dispositivos a laser os aparatos voadores; canetas, aparelhos cirúrgicos, entre outros; 7.) a inserção de Tópicos de FMC no programa de Vestibular e de Provas Seriadas da Universidade Federal de Santa Maria a partir de 2013; 8.) a viabilidade do projeto por dispor de poucas horas/aula já que o programa do primeiro ano do ensino médio é extenso.

III. REFERENCIAL TEÓRICO

O trabalho de pesquisa está baseado principalmente na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel [5, 6].

Segundo Ausubel, existem algumas condições necessárias para a ocorrência de aprendizagem significativa: a existência de um material potencialmente significativo, isto é, um material didático capaz de facilitar a captação de significados, a disponibilidade de uma estrutura cognitiva adequada que permita a subsunção, a disposição do aluno para aprender e um professor que mostre satisfação em ensinar [1]. Nessa linha desenvolveu-se o conceito de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas [7] baseadas na teoria da aprendizagem de David Ausubel [5, 6], em visões clássicas e contemporâneas [8, 9, 10], nas teorias de educação de J. D. Novak [11] e de D. B. Gowin [12]; na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud [13, 14] e na teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird [15, 16].

A. Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS)

A Unidade de Ensino Potencialmente Significativa Laser de Rubi foi elaborada com base nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) que apresentam os seguintes passos [7]:

1. Criar/propor situação(ões) – discussão, questionário, mapa conceitual, situação-problema – que leve(m) o aluno a externalizar seu conhecimento prévio, aceite ou não-aceite no contexto da matéria de ensino, supostamente relevante para a aprendizagem significativa do tópico (objetivo) em pauta.
2. Propor situações-problema, em nível bem introdutório, levando em conta o conhecimento prévio do aluno, que preparem o terreno para a introdução do conhecimento (declarativo ou procedimental) que se pretende ensinar; estas situações-problema ainda que introdutórias devem envolver, desde já, o tópico a ser ensinado; são as situações que dão sentido aos novos conhecimentos, mas para isso o aluno deve percebê-las como problemas e deve ser capaz de modelá-las mentalmente; modelos mentais são funcionais para o aprendiz e resultam da percepção e de conhecimentos prévios (invariantes operatórios); estas situações-problema iniciais podem ser propostas através de simulações computacionais, demonstrações, vídeos, problemas do cotidiano, representações veiculadas pela mídia, problemas clássicos da matéria de ensino, mas sempre de modo acessível e problemático, isto é, não como exercício de aplicação rotineira de algum algoritmo.
3. Uma vez trabalhadas as situações iniciais, apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, levando em conta a diferenciação progressiva, isto é, começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino, mas logo exemplificando, abordando aspectos específicos; a estratégia de ensino pode ser, por exemplo, uma breve exposição seguida de atividade colaborativa em pequenos

grupos que, por sua vez, deve ser seguida de atividade de apresentação ou discussão em grande grupo.

4. Em continuidade, retomar os aspectos mais gerais, estruturantes (i.e., aquilo que efetivamente se pretende ensinar), do conteúdo da unidade de ensino, em nova apresentação (que pode ser através de uma breve exposição oral, de um recurso computacional, etc.), porém em nível mais alto de complexidade em relação à primeira apresentação; as situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade; dar novos exemplos, destacar semelhanças e diferenças relativamente às situações e exemplos já trabalhados, ou seja, promover a reconciliação integradora; após esta segunda apresentação, propor alguma outra atividade colaborativa que leve os alunos a interagir socialmente, negociando significados, tendo o professor como mediador; esta atividade pode ser a resolução de problemas, a construção de um mapa conceitual ou um diagrama V, um experimento de laboratório, um pequeno projeto, e deve necessariamente envolver negociação de significados e mediação do professor.

5. Concluindo a unidade, dar continuidade ao processo de diferenciação progressiva retomando as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém de uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa; isso deve ser feito através de nova apresentação dos significados que pode ser uma breve exposição oral, leitura de um texto, recurso computacional, áudio-visual, etc.; o importante não é a estratégia, em si, mas o modo de trabalhar o conteúdo da unidade; após esta terceira apresentação, novas situações-problema devem ser propostas e trabalhadas em nível mais alto de complexidade em relação às situações anteriores, essas situações devem ser resolvidas em atividades colaborativas e depois apresentadas e/ou discutidas em grande grupo, sempre com a mediação do professor.

6. A avaliação da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação anotando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo da mesma; além disso, deve haver uma avaliação somativa após o quinto passo, na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, que evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência; tais questões/situações deverão ser previamente validadas por especialistas; a avaliação do desempenho do aluno na UEPS deverá ser baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (registros do professor) como na avaliação somativa.

7. A UEPS somente será considerada exitosa se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa.

IV. CONTEXTO

No ano de 2012, executamos a primeira aplicação do projeto a qual denominamos de estudo-piloto. Implementamos esse estudo no Instituto Federal de

Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Câmpus Júlio de Castilhos-RS em duas turmas do curso técnico integrado em informática. As turmas denominadas Info-1A e Info-1B possuíam o total de trinta e dois alunos, sendo dezesseis de cada turma. As duas turmas foram divididas em oito grupos de quatro integrantes. Como forma de identificação, motivação, e preservação da identidade dos componentes, cada grupo foi identificado por uma cor:

1) Turma Info 1A: Grupo Azul, Grupo Amarelo, Grupo Roxo e Grupo Rosa e,

2) Turma Info 1B: Grupo Vermelho, Grupo Verde, Grupo Preto e Grupo Laranja. Este trabalho foi aplicado novamente no ano de 2013, em cinco turmas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Câmpus Júlio de Castilhos, duas turmas do curso técnico integrado em informática e três turmas do curso técnico integrado em agropecuária. Também no ano de 2013, após dez meses da conclusão do projeto-piloto alunos das turmas Info-1A e Info-1B responderam um questionário para buscar evidências de uma possível aprendizagem significativa. Tendo em vista o tempo decorrido, do total de 32 alunos de 2012, só foi possível localizar 15 alunos para reavaliar a UEPS e 5 grupos (Verde, Amarelo, Roxo, Rosa e Preto).

V. METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa do trabalho está fundamentada na pesquisa qualitativa (Moreira, 2010), considerada mais adequada diante do tema abordado (Laser de Rubi) e do contexto (meio escolar). Por pesquisa qualitativa entende-se aqui aquela que envolve a obtenção de registros descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar, interpretativamente, a perspectiva dos participantes.

A metodologia didática aplicada neste trabalho é baseada nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). A UEPS construída contempla o princípio da conservação do momento angular, o modelo do átomo de Bohr, a quantização da energia, o diagrama de Níveis de energia para o átomo de hidrogênio, a inversão de população, o efeito laser e laser de rubi. Esta UEPS construída com o tema laser possui os seguintes passos:

I) Tarefa inicial: os grupos são incentivados a elaborar um mapa livre¹ com o uso de fichas com as palavras – física – princípio da conservação do momento angular – quantização de energia – modelo do átomo de Bohr – inversão de população – diagramas de energia – laser – laser de rubi - inovações – cirurgias – canetas. Após realizar a tarefa cada grupo filma suas explicações individualmente para não interferir nas explicações do próximo grupo. A atividade envolve duas horas/aula.

¹Estamos aqui denominando Mapas Livres diagramas nos quais se pode associar livremente as palavras dadas com quaisquer outras segundo critérios de quem os faz.

II) Situações-problema iniciais: II.1) Os alunos respondem em seus grupos um questionário, para depois discutir com o grande grupo: (a) O que você já leu, ouviu, ou viu sobre Laser? (b) Esta aplicação da física envolve a física clássica ou a física moderna? (c) Qual das físicas citadas na pergunta anterior você estuda no ensino médio? (d) Qual das Físicas citadas na pergunta anterior você percebe implicações na sua vida? (e) Dê alguns exemplos de implicações da física no seu dia-a-dia.

II.2) Leitura coletiva do texto *os fundamentos da luz laser*, publicado na *Revista Física na Escola*, volume 2, número 2, ano 2001 [17]. Nessa atividade os grupos destacam as palavras do texto não compreendidas. A atividade envolve três horas/aula.

III) Aprofundando conhecimentos: III.1) Com os dados coletados na atividade do mapa livre, nas respostas do questionário e nas palavras destacadas durante a leitura coletiva do texto, os conceitos propostos na UEPS são trabalhados de forma ordenada e sistemática, através de filmes, slides, material disponível na internet, texto de apoio do Grupo de Ensino da Física – GEF da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM e aulas expositivas e dialogadas, sendo os alunos sempre estimulados a participar de todas as discussões.

III.2) Os grupos retomam o texto *Os fundamentos da luz laser* e, constroem um esquema ou um resumo para melhor entendê-lo. A etapa III se desenvolve em aproximadamente 6 horas/aula.

IV) Nova Situação-Problema: IV.1) Os alunos em grupo pesquisam uma aplicação do Laser e apresentam aos colegas. A pesquisa é realizada como tarefa de casa e a apresentação envolve uma hora/aula. IV.2) Os grupos constroem um mapa conceitual² da UEPS. Esta atividade ocupa 3 horas/aula.

V) Avaliação somativa individual: os alunos são avisados com antecedência e lhes será proposto as seguintes questões abertas: 1. No texto, *Os fundamentos da luz laser*, publicado na *Revista Física na Escola*, volume 2, número 2, ano 2001, encontramos a seguinte frase: “*Funcionando como fonte de luz de características únicas, o laser possui propriedades especiais que o tornam um excelente instrumento de uso científico e tecnológico.*” Quais são estas propriedades especiais que o texto se refere. 2. De forma sucinta descreva como se forma a **Luz Laser**. 3. Justifique o nome **Laser de Rubi**. 4. Com base nos trabalhos apresentados sobre as **aplicações da luz laser**, escolha um para descrever. 5. Avalie a sua aprendizagem e as aulas de Física desde a construção do mapa livre. A atividade é desenvolvida em uma hora/aula.

VI) Aula expositiva dialogada integradora final: a professora juntamente com os alunos retoma os conceitos através de um mapa conceitual. Salientando a importância do laser, sua utilização, seus benefícios e seus malefícios,

recordando as explicações de cada grupo. Essa atividade necessita de 1 hora/aula.

VII) Avaliação da aprendizagem da UEPS: A avaliação é baseada nas atividades realizadas: na comparação entre o mapa livre e o mapa conceitual, na apresentação de uma aplicação do laser, no material confeccionado para a apresentação e na avaliação somativa individual.

VIII) Avaliação da própria UEPS: a professora avalia a forma em que foi abordado o tema laser de rubi em função de seus resultados e da avaliação dos alunos, se necessário serão reformuladas algumas atividades. As atividades desenvolvidas na UEPS contemplam o total de dezesseis horas/aula.

VI. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Realizamos a análise dos resultados na sequência adotada pela UEPS. Na etapa I da UEPS os alunos em grupo construíram um mapa livre e filmaram suas explicações.

Com essa atividade detectamos os conhecimentos prévios dos grupos e transcrevemos os aspectos relevantes.

Durante a realização da atividade inferimos que todos os grupos sentiram dificuldade em construir os mapas livres por não saberem o significado da maioria das palavras contidas nas fichas. No entanto, no momento em que os alunos souberam que essa atividade não seria avaliada no sentido, de certo ou errado, à realizaram com tranquilidade e de forma muito participativa. A atividade de construção dos mapas livres foi proposta durante duas horas/aula conforme o previsto, porém para concluir a atividade prevista na etapa I, as filmagens foram realizadas no turno inverso, ou seja, no turno da tarde. Assim, pudemos perceber que a etapa I requer um maior espaço de tempo.

A filmagem foi uma ferramenta eficaz utilizada para detectarmos os conhecimentos prévios de cada grupo:

Destacamos as transcrições relevantes de cada grupo:

(1) Grupo Vermelho - O grupo editou todo o texto acrescentando conceitos encontrados na internet e, assim, o objetivo da atividade não foi alcançado.

(2) Grupo Amarelo – “[...] o Modelo do átomo de Bohr diz que temos a divisão do átomo em cargas positivas e negativas [...] as inovações, que podem nos auxiliar nas cirurgias a laser, que antigamente era o laser de rubi e inovou para um laser normal que é com um tubo de gás [...]”;

(3) Grupo Roxo – “[...] a física primeiramente por que ela engloba todas as fichas”. O grupo editou a filmagem, porém não alterou o conteúdo;

(4) Grupo Verde – “[...] e a inversão de população esta associada com a inversão de carga [...]”;

(5) Grupo Preto – “[...] começamos com a física por que tudo sai da Física [...] o Princípio da conservação do momento angular está logo abaixo da física por que é um princípio [...] Quantização de Energia vem do Modelo do Átomo de Bohr por que ele fala sobre como os elétrons ficam em volta do núcleo do átomo [...] o modelo do átomo de Bohr também fala sobre inversão de população por que aqui está se falando em inversão de população dos elétrons

²Segundo Moreira, de um modo geral, mapas conceituais, ou mapas de conceitos, são apenas diagramas indicando relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos, (Moreira, p.101, 2010). No entanto, diferentemente dos mapas livres as associações entre conceitos devem ser aquelas aceitas no contexto do conhecimento mapeado.

que giram ao redor do núcleo”;

(6) Grupo Laranja – “[...] no modelo do átomo de Bohr o átomo é maciço [...] Porque a inversão de população que exerce trabalho das forças e da energia”. Os alunos do Grupo Laranja estavam ausentes na aula em que foi realizada a atividade de construção e filmagem do mapa livre, por isso à realizou no turno inverso;

(7) Grupo Rosa – “[...] começamos com a palavra física por que ela engloba tudo o que vai se ouvir falar aqui [...] Por que o modelo do átomo de Bohr foi criado por Bohr e a quantização de energia é a quantidade de energia que cada elétron tem e os diagramas de energia é uma forma de representação da menor até a maior energia do elétron”; e
 (8) Grupo Azul – “[...] a gente não sabe nada [...] tudo iniciou da física [...] mas o que seria esta inversão de população? Seriam os elétrons que constituem o átomo...[...] e a inversão de população não é a que vocês estão pensando. É a de elétrons”. Com essa atividade percebemos que os alunos tentaram dar significados às palavras contidas nas fichas, conhecimentos prévios foram explicitados e serão utilizados na etapa III.

Na etapa II.1 os grupos responderam o questionário mencionado na metodologia e obtivemos as seguintes respostas:(a) forte influência das fichas distribuídas para a construção do mapa livre; (b) unanimidade na afirmação de que o laser é uma aplicação da física moderna; (c) a maioria dos grupos afirmam que no ensino médio estuda-se tanto a física clássica quanto a física moderna, porém, o grupo roxo afirma que estudamos a física clássica e o grupo verde afirma que estudamos a física moderna; (d) idem, resposta da pergunta (c); (e) Os exemplos dados por todos os grupos são exemplos da física clássica, ou seja, os alunos não conseguem se desprender dos conhecimentos obtidos até o momento em sala de aula. Na etapa II.2 foi realizada a leitura e o destaque das palavras não compreendidas no texto. As palavras obtidas com essa atividade foram: monocromaticidade, espectroscopia, analíticos, laser, colapsaria, ressonante, astronomia convencional, fóton e exaustão. Ao final dessa etapa, alguns alunos relataram estar gostando muito mais das aulas de física, pois cada dia eles tinham uma atividade diferente para realizar e com isso, eles se sentiam mais envolvidos e que estavam “aprendendo muito mais”.

Iniciamos o aprofundamento dos conhecimentos (etapa III.1) considerando os dados obtidos nas etapas anteriores. Por meio dos subsunçores coletados conseguimos envolver os alunos na formalização do conhecimento. Para obter maior aproveitamento do texto utilizado na etapa II.2, os alunos retomaram sua leitura (etapa III.2) e formaram um esquema ou resumo. Nos resumos observamos que os alunos destacam a definição de: laser, laser de rubi, inversão de população, astronomia convencional, modelo do átomo de Bohr, absorção estimulada, emissão estimulada, emissão espontânea e fóton. Podemos inferir que a maioria das palavras destacadas nos resumos coincidem com as palavras que eles destacaram na etapa II.2.

A quarta etapa da UEPS esteve composta de duas atividades. Na primeira, os grupos deveriam pesquisar e

apresentar à turma uma aplicação do laser. Com essa atividade obtivemos os temas: depilação a laser, canetas e apontadores a laser, aplicação de raio laser na oftalmologia, principais aplicações do laser, laser na medicina, estudos atuais, curiosidades e fatos históricos. Por meio dessa atividade, pudemos observar o envolvimento e a empolgação dos grupos nas atividades propostas. Na segunda, os grupos reconstruíram os mapas livres. Apresentamos os mapas livre e conceitual de cada grupo nas figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

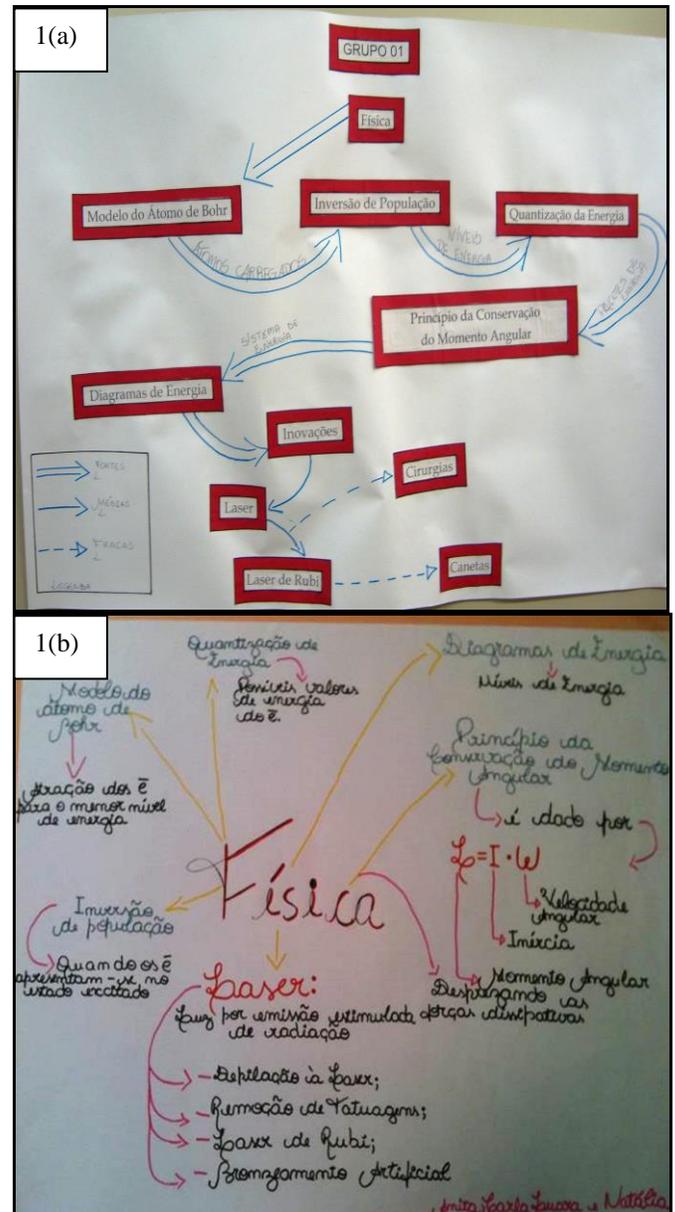


FIGURA 1. Grupo vermelho: (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

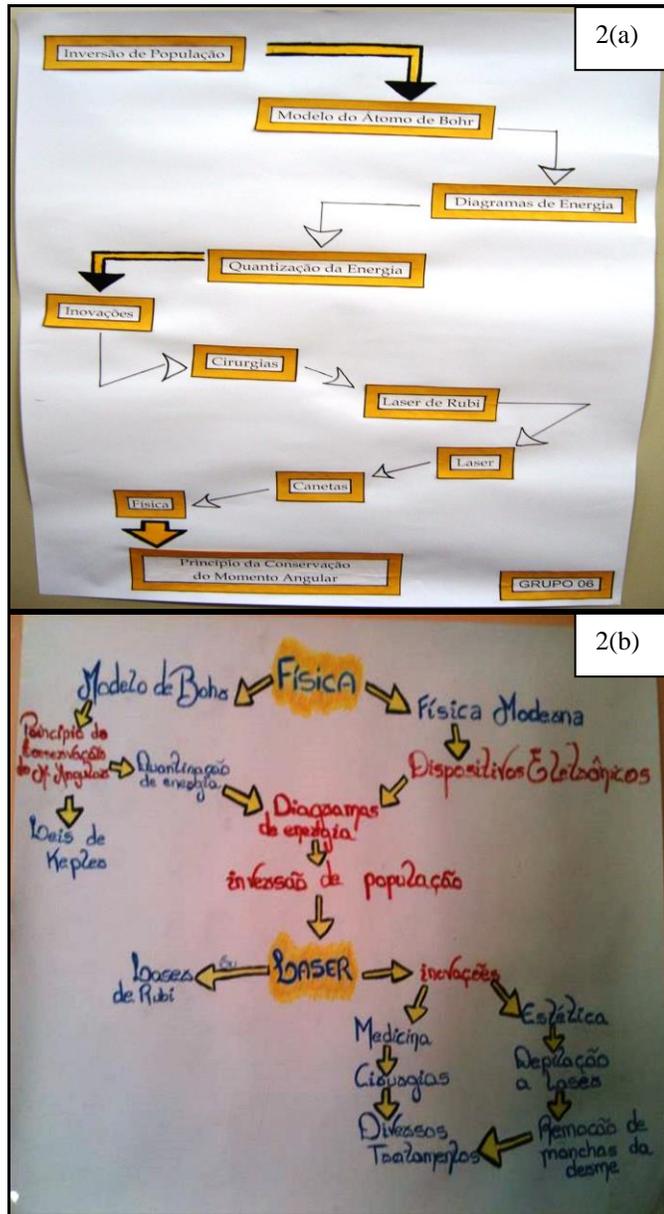


FIGURA 2. Grupo amarelo: (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

Analizamos e comparamos os mapas livres e mapas conceituais dos grupos e inferimos aspectos positivos e negativos. Os aspectos positivos apresentados pelo Grupo Vermelho são que o mapa livre em linha passa a ser um mapa conceitual mais interligado, foram acrescentados vários conectores, explicações a cada conceito, a equação do momento angular, destacaram o conceito “Física” e acrescentam como conceitos “Depilação à laser, remoção de tatuagem, laser de rubi e bronzamento artificial”, e como aspectos negativos, acrescentam explicações, a equação do momento angular e palavras que não são consideradas conceitos. O Grupo amarelo apresenta os aspectos positivos que o mapa livre deixa de ser em linha para apresentar mais ligações, acrescentam um conector e as palavras “Leis de Kepler, dispositivos eletrônicos, medicina, estética, diversos

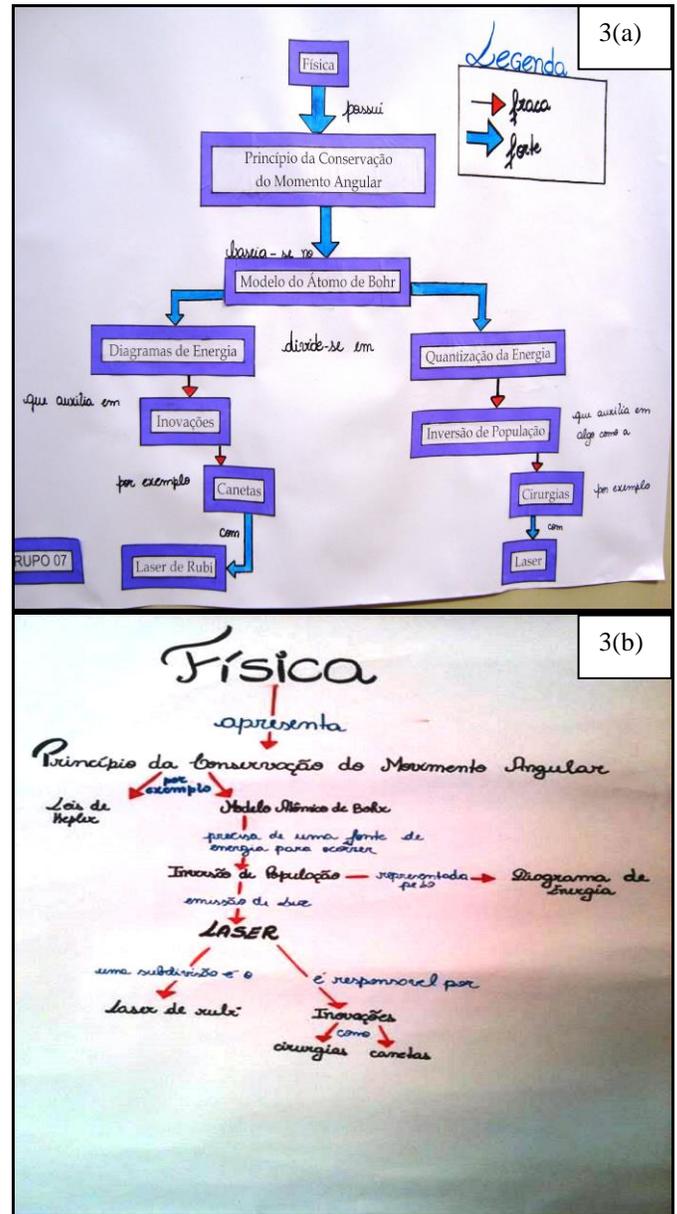


FIGURA 3. Grupo roxo: (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

...tratamentos, depilação à laser, remoção de manchas da derme, física moderna”, e os aspectos negativos seriam que a maioria das palavras acrescentadas não representam conceitos relevantes no contexto físico mapeado, e utilizam apenas um conector.

Os aspectos positivos do Grupo Roxo foram agregar um maior número de conectores e acrescentar ao mapa conceitual “Leis de Kepler”, e o aspecto negativo é que os conceitos poderiam ser mais interligados. O Grupo Verde possui como aspecto positivo o fato de acrescentar conectores em todas as ligações e as palavras “Absorção estimulada e oftalmologia”, e o aspecto negativo observado foi que os conceitos poderiam ser mais interligados.

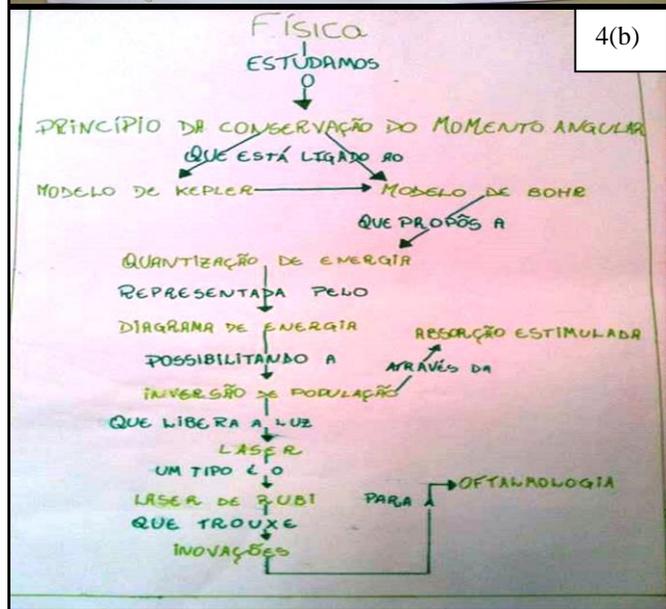
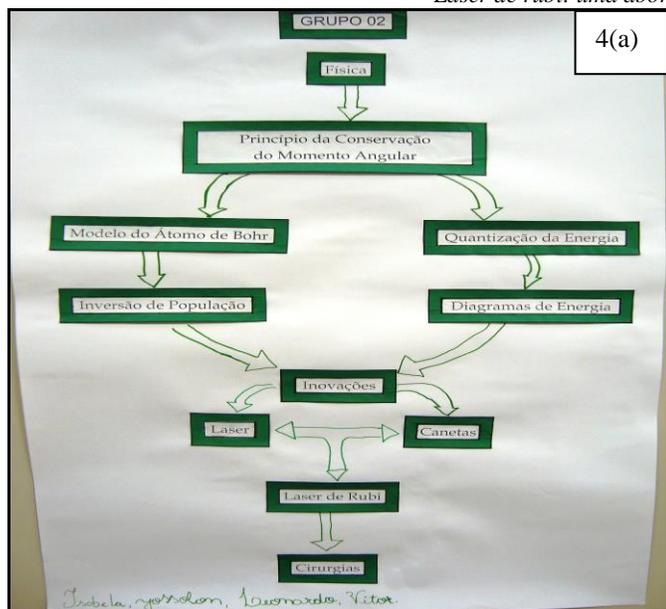


FIGURA 4. Grupo verde: (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

Os aspectos positivos do Grupo Preto são os conectores acrescentados no mapa conceitual e que nos dois mapas os “conceitos” são conectados por várias ligações, porém no mapa conceitual é mais evidente, as palavras destacadas são “Física, inovações e laser”.

O aspecto positivo do Grupo Laranja é que realizou a tarefa e, os aspectos negativos são que tanto o mapa livre quanto o mapa conceitual são em linha, não acrescentam conectores. Ao desenvolver a atividade da construção do mapa livre e conceitual o grupo não demonstrou motivação.

Detectamos dois motivos para a desmotivação: (1) as atividades realizadas isoladas da turma pelo fato da ausência dos alunos na aula, e (2) os alunos estarem reprovados em outras disciplinas. O Grupo Rosa destacou-se por construir tanto o mapa livre quanto o mapa conceitual com várias ramificações e acrescentaram as

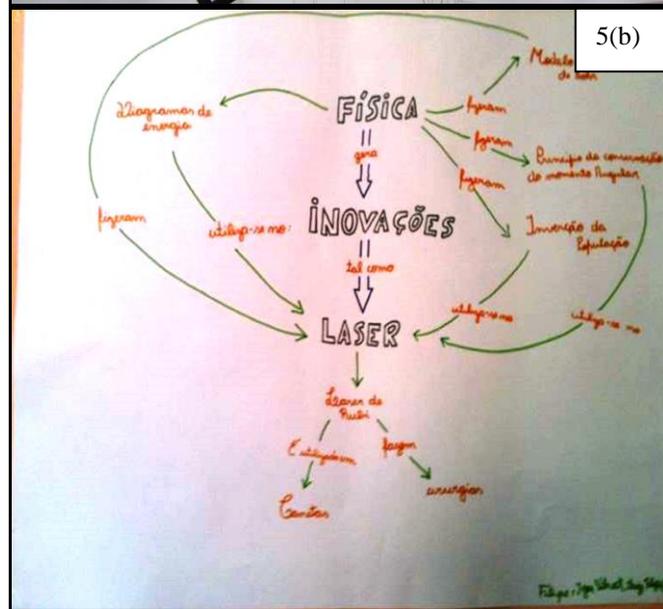
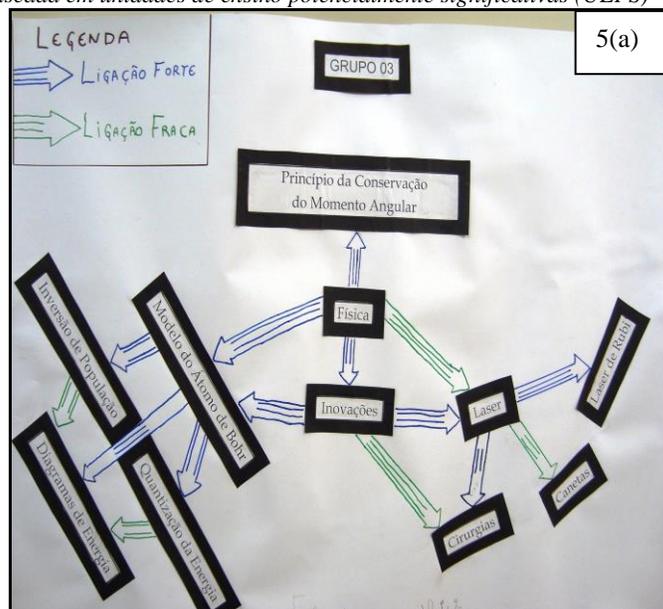


FIGURA 5. Grupo preto: (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

palavras “Óptica, feixe de luz, fóton, cientista e Bohr”, também destacaram as palavras “Física, princípio da conservação do momento angular”, e o aspecto negativo é que o grupo não acrescentou conectores. Os aspectos positivos do Grupo Azul são que o mapa conceitual tornou-se mais interligado, acrescentam vários conectores e as palavras “Absorção, emissão estimulada, emissão espontânea, cicatrização e afetar a visão”, e o aspecto negativo é que nem todas as palavras acrescentadas são consideradas conceitos no contexto discutido.

Podemos inferir que todos os grupos incluíram em seus mapas conceituais como aplicação ou inovação o tema do seu trabalho de pesquisa realizado na etapa IV-1, evidenciando assim, que a atividade foi realizada pelo grupo e provavelmente tornou-se significativa.

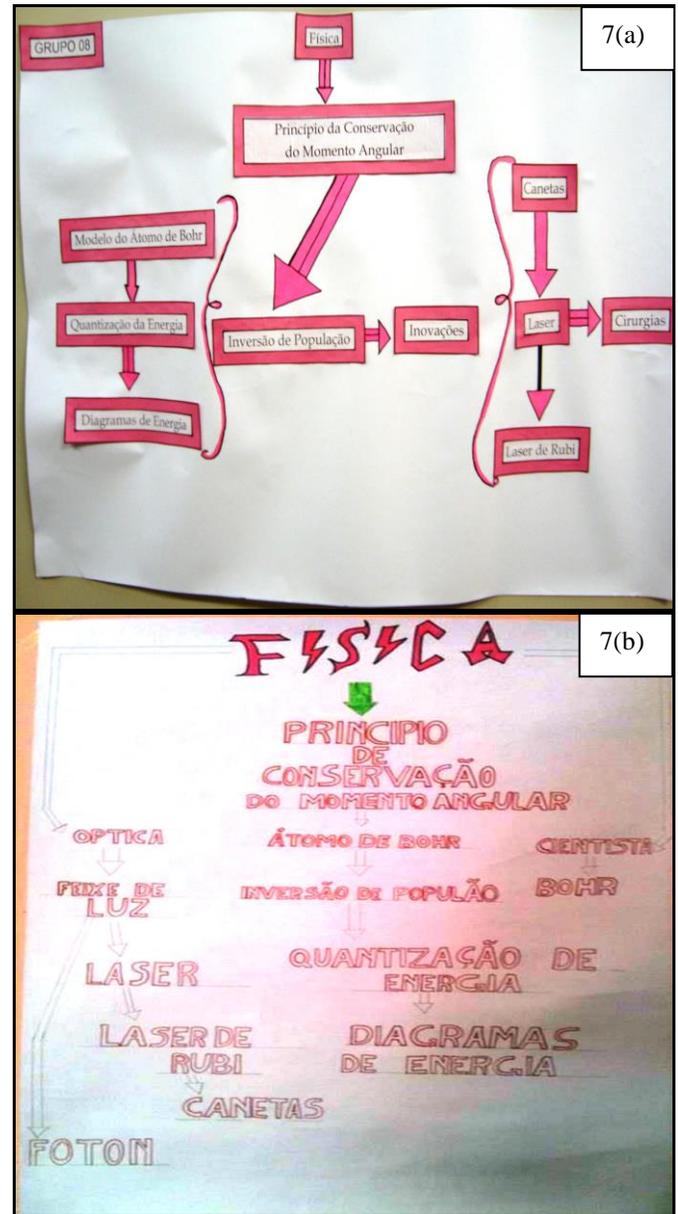
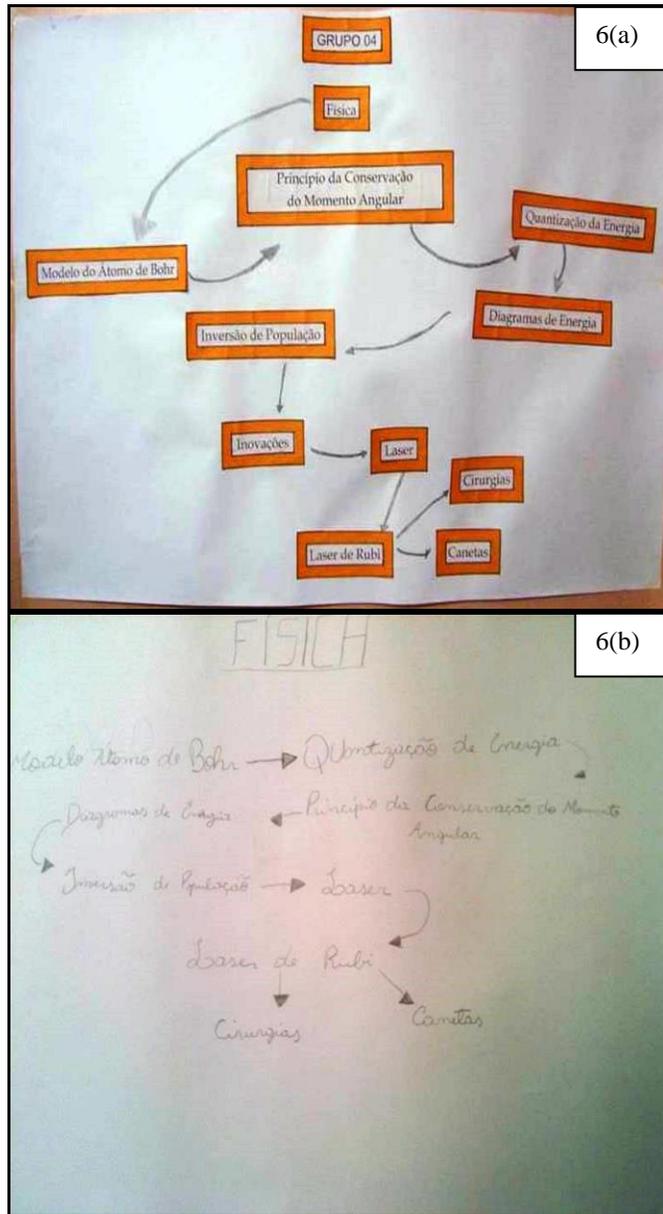


FIGURA 6. Grupo laranja: (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

FIGURA 7. Grupo rosa : (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

De acordo com a Teoria da Aprendizagem de Ausubel, a estrutura cognitiva do aprendiz é única e por isso todos os significados adquiridos também serão únicos. Assim, pensando na unicidade de cada aprendiz, realizamos a avaliação somativa individual foi realizada na etapa V da UEPS descrita na metodologia e contemplou cinco questões abertas. A resposta da questão 1 é considerada correta quando o aluno cita as 4 características da luz laser - *monocromaticidade, coerência, direcional e alta intensidade*. Obtivemos, 15 respostas que contemplam as 4 características; 4 respostas com 3 características; 6 respostas com 2 características; 2 respostas com 1 característica; 4 respostas consideradas erradas, como por exemplos, “...é um amplificador óptico e uma fonte de luz, também funciona como um espelho.... as cirurgias, as

...depilações a laser, também é uma tecnologia usada em armas e em festas”; um aluno não respondeu a questão.

Na questão 2, obtivemos 20 respostas consideradas corretas, exemplificamos por “... a absorção de um fóton (transição de um elétron de um nível mais baixo de energia de mais alta energia), quando isso faz com que a maioria dos elétrons deixe o seu estado fundamental e passe para um estado excitado, ou seja, inverte a população de elétrons. Após estar no estado excitado o elétron “quer” voltar ao estado fundamental e para isso ele precisa perder (emitir) um fóton, que pode ser a luz laser.”; 9 respostas consideradas parcialmente correta, por exemplo, “Os elétrons que absorvem fótons passando para um nível equilibrado com isso voltando para o nível anterior, o elétron perde fóton (libera), com isso emitindo luz.”; 2

respostas consideradas erradas, por exemplo, “Se forma através de um feixe de luz que atravessa uma placa de rubi, recebendo o tom avermelhado.”; e um aluno não respondeu a questão.

Também de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, uma boa evidência de aprendizagem significativa é quando o aluno consegue resolver uma nova situação problema com os novos conhecimentos adquiridos. Os alunos ao pesquisar e apresentar os trabalhos sobre aplicações da luz laser tiveram que resolver esta situação-problema com as informações estudadas em sala de aula. Da mesma forma, o processo de aprendizagem significativa não se encerra com a sua aquisição e sim faz parte de um processo mais amplo de assimilação que segue pela retenção ou obliteração (esquecimento com resíduo) da nova informação. Por isso, elaboramos a questão 4 para verificar se a nova situação-problema foi retida ou não na mente do aluno. Esta questão, todos os alunos responderam corretamente, ou seja, todos descreveram um trabalho apresentado sobre as aplicações do laser, e 28 alunos relataram o seu próprio trabalho.

Acreditamos que este resultado nos dá evidências de aprendizagem significativa. Um exemplo de resposta: “A depilação a laser, em que é feita por seções para a remoção de pêlos de maneira permanente, é eficaz em pêlos mais escuros pois o mesmo age na melanina do pêlo. Geralmente são necessárias de 5 a 8 seções e é indolor”.

Pudemos verificar que os alunos construíram seus trabalhos de tal maneira a optar por descrevê-los, evidenciando que o aluno ao se envolver de forma ativa no processo de construção da aprendizagem a mesma dá maiores evidências de ser significativa e de sua retenção.

A questão 5 foi elaborada para que a professora pudesse avaliar a sua prática em sala de aula. Destacamos algumas respostas, “Aprendi bem melhor com esse modo (mapas). Pois fica mais interativo. Gostei bastante. Nota 10”; “...eram desconhecidos os termos, depois estão totalmente ligados”; “Nota 10. Achei muito legal prender sobre este conteúdo ... e o mapa livre muito bom para ver nossos conhecimentos e depois saber de cada tema direitinho e montar novamente um mapa com os conhecimentos mais aprimorados. Assim, muito melhor e mais divertido de trabalhar”; “... achei mais interessante com alguma coisa mais perto do nosso conhecimento e entender sobre isso”.

“Esse método de fazer mapas ajudou muito na aprendizagem, pois é mais fácil aprender o conteúdo discutindo ideias de forma dinâmica do que a mesmice das provas...no começo era tudo confuso mas ao longo do tempo com as explicações tudo cada vez mais foi se ligando”. Assim, pudemos inferir que os alunos destacaram a metodologia didática envolvida na UEPS como um meio facilitador da aprendizagem, ou seja, a UEPS Laser de Rubi pode ser considerada um material potencialmente significativo. Porém, de acordo com Ausubel não basta ter um material potencialmente significativo, também é necessário a predisposição do aluno em aprender. Através das respostas dos alunos a questão 5, pudemos entender que o desenvolvimento da UEPS também pode ser considerada um agente motivador, tornando o aluno predisposto a aprender provavelmente de forma significativa o tema Laser de Rubi.

Na sexta etapa da UEPS – Aula expositiva dialogada integradora final, a professora retomou os conceitos

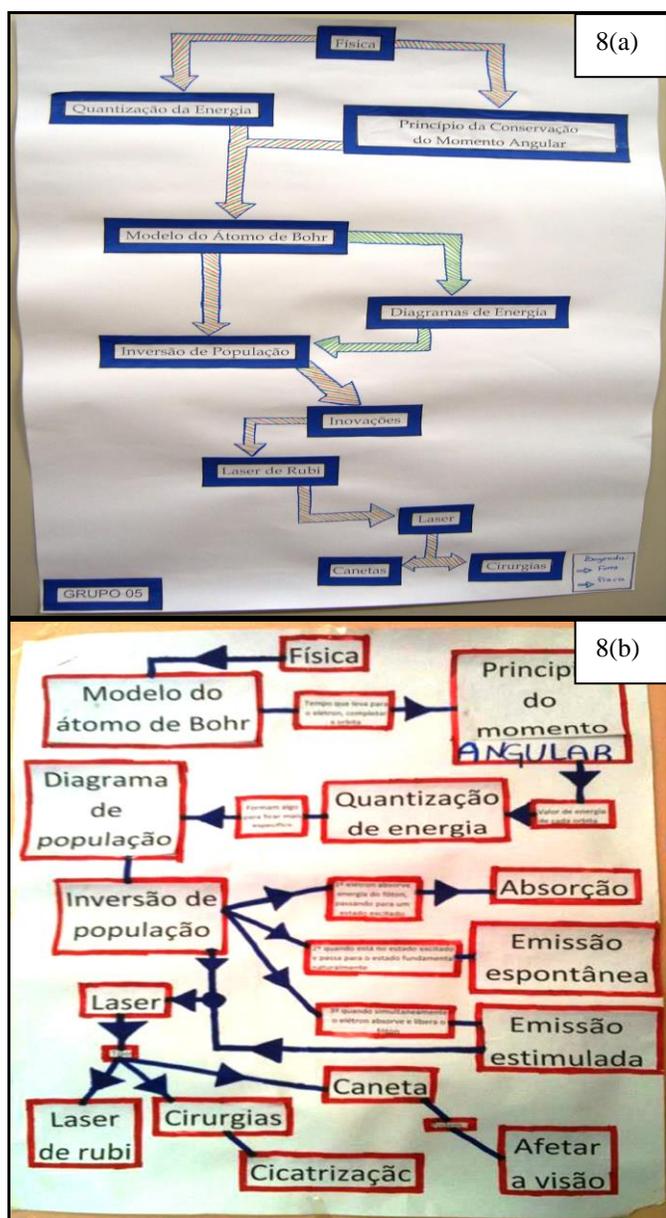


FIGURA 8. Grupo azul : (a) mapa livre e (b) mapa conceitual.

A questão 3, obtivemos 27 respostas consideradas corretas, por exemplo, “O rubi é formado por óxido de alumínio, sendo os íons de Al substituídos em até 1% de íons de cromo (onde ocorre a inversão de população e dá a coloração avermelhada ao rubi e ao laser de rubi.”; 2 respostas erradas, por exemplo, “Laser de Rubi: luz por emissão estimulada de radiação. É utilizada como “meio” para a emissão de energia”; e 3 alunos não responderam a pergunta.

discutidos na UEPS com o uso do mapa conceitual de um grupo, e assim, o processo de reconciliação integradora da UEPS concluindo a sua aplicação. Observamos que nessa atividade os alunos envolveram-se relatando como pensavam e como conseguiram “entender melhor” o conteúdo, acrescentaram explicações e ajudaram de forma participativa e motivadora.

A avaliação da aprendizagem da UEPS é realizada em sua sétima etapa. Comparamos o mapa livre e o mapa conceitual, a apresentação da aplicação do laser, a avaliação individual e a participação do aluno. Nessa etapa analisamos e avaliamos todas as atividades desenvolvidas na UEPS e concluímos que os alunos obtiveram um bom aproveitamento e um ótimo envolvimento. Os alunos sentiram seus conhecimentos valorizados com o retorno imediato de todas as atividades desenvolvidas por eles. Não temos evidências conclusivas de aprendizagem significativa, mas certamente conseguimos aumentar sua predisposição para aprender.

Na etapa VIII avaliamos as atividades propostas na UEPS. De acordo com a auto-avaliação dos alunos e com as anotações realizadas durante a aplicação da UEPS analisamos a proposta e concluímos que foi positiva. E mais, a aplicação da UEPS em 2013 será desenvolvida sem mudanças significativas.

Ainda de acordo com a Teoria da Aprendizagem de Ausubel, o processo de construção da aprendizagem significativa não acaba com a captação de novos significados. O novo conhecimento pode ser retido por algum tempo, obliterado ou esquecido totalmente. Com o intuito de verificar se ocorreu a retenção das novas informações adquiridas com a UEPS laser de rubi, aplicamos um questionário após dez meses do término da aplicação da UEPS. O questionário basicamente foi composto das mesmas questões abertas da etapa V da UEPS (Avaliação Somativa Individual). No entanto, para avaliar os resultados é necessário considerarmos que nessa etapa tivemos apenas 15 alunos, e esses eram integrantes de 5 grupos, conforme mencionado anteriormente. Para desenvolver essa atividade, a professora levou os mapas livre e conceitual confeccionados pelos grupos para a sala de aula e solicitou que os alunos sentassem em seus respectivos grupos para responder um questionário. Assim, nessa etapa do projeto a avaliação foi realizada em grupo, pois considerava fundamental a interação entre os alunos.

A resposta da questão 1 envolve quatro características da luz laser (*monocromaticidade, coerência, direcional e alta intensidade*), sendo que os grupos amarelo e roxo lembrou de todas as características, o grupo preto lembrou de três, o grupo verde de duas e, apenas o grupo rosa esqueceu que não lembrava da resposta. As respostas evidenciam que a maioria dos grupos recordou as características da luz laser e que a nova informação foi assimilada.

Na questão 2, obtivemos respostas corretas dos grupos verde, amarelo e roxo, por exemplo, “... precisa-se de uma fonte de energia para ocorrer a inversão de população assim ocorrendo a emissão do fóton (luz laser)”. O grupo rosa apresentou uma resposta incompleta mas que pode ser

considerada parcialmente correta, segue descrição, “...com a agitação dos elétrons e visualizada no diagrama de energia gera-se a luz laser”; e o grupo preto não respondeu a questão. Entendemos que os grupos em sua maioria estabeleceram consensos sobre a formação da luz laser.

A questão 3, os grupos roxo e preto responderam corretamente, por exemplo, “O rubi é o meio ativo para que a luz avermelhada se forme”, e os grupos verde, amarelo e rosa responderam parcialmente, por exemplo:

“Porque é usado um rubi na sua composição por ter coloração avermelhada e ter maior capacidade de inversão de população.” Os grupos através da negociação de significados com os colegas estabeleceram a relação entre o rubi (vermelho) e a cor do laser (vermelha) como sendo o meio ativo para sua produção.

A questão 4, foi reelaborada da seguinte forma: 4. O grupo lembra o tema do seu trabalho apresentado sobre as aplicações da luz laser? Descreva-o. Todos os grupos responderam a questão 4 corretamente. Inferimos que a atividade de pesquisar e apresentar sua pesquisa aos colegas, atividade esta em que os alunos envolvem-se de forma participativa e coletiva no processo de assimilação da nova informação geram maiores evidências de uma aprendizagem significativa.

Na questão 5, obtivemos as seguintes respostas: grupo verde – “...as aulas aumentaram a nossa convivência em grupo”; grupo amarelo – “...aprendemos o suficiente para passar de ano. As aulas foram bem legais e divertidas”; grupo roxo – “...foi possível aprender e pesquisar o conteúdo de uma forma simplificada e diferente.”; grupo rosa – “... com o passar do trabalho a aprendizagem surgia como resultado.”; e o grupo preto – “... o mapa foi uma tática que ajudou a lembrar agora sobre o laser.”.

Com as respostas obtidas deduzimos que os alunos gostam de trabalhar em grupo, que o professor use diferentes metodologias de ensino e sentem que a aprendizagem é facilitada e as aulas de Física se tornam “menos chatas”.

Acrescentamos a questão 6, que segue: *Escreva o que o grupo sentiu ao rever seus trabalhos. Que recordações vocês podem relatar?* As respostas obtidas foram semelhantes da questão 5, porém, o grupo preto acrescenta “...uma recordação pequena, que com o tempo foi aumentando, e um momento significativo para o grupo foi a construção do mapa.” Também, agregamos a questão 7: *Quando o grupo construiu seu mapa livre a ficha – “INVERSÃO DE POPULAÇÃO” gerou muita discussão. Vocês lembram o seu significado?* O grupo verde, roxo, rosa e preto respondem corretamente, por exemplo, “...De primeiro momento pensamos que se referia a uma população humana. Mas após as aulas, na construção do mapa conceitual descobrimos que se referia a uma inversão de população de elétrons de um nível de energia menor para outro nível de energia maior.”; e o grupo amarelo respondeu incorretamente, “... é que tem uma parte na formação do laser onde os elétrons são agitados e a parte positiva se inverte pra negativa e vice-versa.” Com os resultados obtidos, consideramos que a aprendizagem foi

seguida por uma maior retenção das novas informações, o que sugere que foi significativa.

VII. CONCLUSÃO

Com a UEPS proposta e aplicada no contexto de duas turmas do curso técnico integrado em informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Júlio de Castilhos-RS, concluímos que é possível introduzir conceitos fundamentais de física moderna e contemporânea no primeiro ano do ensino médio, explorando limites da física clássica com o uso de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Através dos resultados obtidos com o estudo-piloto da implementação da UEPS – Laser de Rubi e com o uso de um questionário após dez meses do término de sua implementação pudemos inferir que a maioria dos grupos apresentou evidências de uma provável aprendizagem significativa, e que a mesma proporcionou evidências de bom nível de retenção do conhecimento. Também, pudemos concluir que o uso da UEPS proporcionou aulas participativas, maior autonomia aos alunos e, inclusive, permitiu avaliar a prática docente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Direção Geral, Direção de ensino e a assessoria pedagógica do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha Câmpus Júlio de Castilhos por acreditar na contribuição no projeto proposto. De maneira carinhosa e especial, agradeço aos alunos das turmas Info-1A e Info-1B de 2012 que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] Soares, S., *Um curso de mecânica quântica para professores de física do ensino médio*, Dissertação (Mestrado profissionalizante). Programa de mestrado profissionalizante, Programa de pós-graduação em ensino de física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, (2009).
[2] Paulo, I. J. C., *A Aprendizagem significativa crítica de conceitos da mecânica quântica segundo a interpretação de Copenhagen e o Problema da diversidade de propostas de inserção da física moderna e contemporânea no ensino*

médio, Tese (Doutorado em Ciências) – Programa internacional de doctorado, Enseñanza de lās ciencias, departamento de didácticas específicas. Universidade de Burgos, Burgos, España, (2006).

[3] Pereira, A. P.; Ostermann, F., *Sobre o ensino de física moderna e contemporânea: uma revisão da produção acadêmica recente*, *Investigações em Ensino de Ciências* **14**, 393-420 (2009).

[4] Palandi, J., Figueiredo, D. B., Denardin, J. C. e Magnago, P. R., *Física Moderna – GEF-UFSM*, Grupo de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, (2010).

[5] Ausubel, D. P., *Educational psychology – a cognitive view*, (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968).

[6] Ausubel, D. P., *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000).

[7] Moreira, M. A., *Unidade de Enseñanza Potencialmente Significativas UEPS (Potentially Meaningful Teaching Units – PMTU)*, *Meaningful Learning Review* **1**, 43-63, (2011).

[8] Moreira, M. A., *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação na sala de aula*, (Editora da UnB, Brasília, 2006).

[9] Masini e Moreira, M. A., *Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos*, (Vetor, São Paulo, 2008).

[10] Valadares, E.C. e Moreira, M. A., *Aprendizagem Significativa: sua formação e implementação*, (Edições Almedina, Coimbra, 2009).

[11] Novak, J. D., *Aprender criar e utilizar o conhecimento*, (Plátano Edições Técnicas, Lisboa, 2000).

[12] Gowin, D. B., *Educating*, (Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1981).

[13] Vergnaud, G., *La théorie des champs conceptuels – Recherches em Didactique des Mathématiques* **10**, 133-170, (1990).

[14] Moreira, M. A., *La Teoria de los Campos Conceptuales de Vergnaud, La enseñanza de lās ciencias y La investigación em el área*, In: MOREIRA, M. A., (Instituto de Física da UFRGS, Porto Alegre, 2004), pp. 41-66.

[15] Johson-Laird, P. N., *Mental Models*, (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1983).

[16] Moreira, M. A., Veit, E., *Ensino Superior: bases teóricas e metodológicas*, (E.P.U., São Paulo, 2010).

[17] Bagnato, V. S., *Os fundamentos da luz laser*, *Física na Escola* **2**, 4-9, (2001).

Ideas alternativas acerca de la carga eléctrica, los materiales conductores y aislantes en estudiantes de la educación media



Aarón Segura^{1,2}, Duván López², Julián Pulecio²

¹Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional, Calle 72 No.11-86. Bogotá, D. C., Colombia.

²Grupo La Ciencia Como Actividad Cultural, Instituto San Juan de Dios, Calle 17 Sur No 7-15, Bogotá, D. C. Colombia.

E-mail: segurac7@gmail.com

(Recibido el 6 de Enero de 2014, aceptado el 18 de Junio de 2014)

Resumen

El presente trabajo señala el rendimiento del ambiente de aprendizaje escolar respecto a eventos eléctricos, se resalta que lo que se aprende en nuestras instituciones educativas son un conjunto de resultados, algoritmos, razonamientos y principios inmutables, que enfatizan la existencia objetiva de la naturaleza y sus leyes por encima de las formas en que los sujetos adquieren conocimiento. En este sentido, a través de la experiencia en aula se hace posible una enseñanza con sentido para los jóvenes. Al proporcionar evidencia de una búsqueda de la comprensión de lo que se estudia, se favorece la formación del conocimiento individual, se generan ambientes en los que se construyen relaciones con las explicaciones y en donde se la ciencia como actividad cultural es establecida.

Palabras Clave: Ideas alternativas sobre carga eléctrica, materiales conductores y aislantes, circuito eléctrico, enseñanza de las ciencias.

Abstract

This paper approaches tilda performed in school learning environment of electrical events, noting that what is learned in our educational institutions are a set of results, algorithms, reasoning and unchanging principles that emphasize the objective existence of nature and its laws over the ways of knowing subjects. In this sense, through a classroom experience aims to enable a meaningful education for young people, giving evidence of a search for understanding of what is studied, the formation of the individual knowledge is favored, generate environments for building a relationship with explanations and science as a cultural activity is established.

Keywords: Alternative ideas about electric charge, conductors and insulators, electrical circuit science education.

PACS: 01.40.gb, 01.30.la, 77.84.Bw, 72.15.Rn, 01.50.-I

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El interés humano de entender el universo e intentar dar explicación al mismo, determinan la búsqueda de un lenguaje, a partir del cual, la labor docente adquiera el propósito de generar condiciones para conocer en los estudiantes, permitiéndoles vivenciar la actividad de organizar los hechos, los acontecimientos, lo que sucede y lo que se observa en los fenómenos naturales de una manera simplificada e intuitiva [1].

Cuando hacemos referencia a la comprensión e interpretación de los fenómenos naturales, debemos tener en cuenta que para conocer, el hombre debe generar condiciones que agilicen el desarrollo de competencias, por lo cual se evidencia la actividad de organizar los hechos y los acontecimientos simplificando las teorías, de tal forma que en sólo unos cuantos conceptos y leyes fundamentales logre alterar y ampliar nuestra visión del mundo [1, 2].

Sin embargo, los planteamientos actuales que se realizan en la escuela en torno al aprendizaje de la física, (específicamente eventos eléctricos o electromagnéticos), dejan ver que lo que se aprende en nuestras instituciones escolares son un conjunto de resultados, algoritmos, raciocinios y principios inmodificables, etc. que privilegian la existencia objetiva de la naturaleza y sus leyes por encima de las formas de conocer de los sujetos [3, 4, 5]. Es decir, se continúa asumiendo el conocimiento en términos de información, ignorando el contexto, los valores y las actitudes de los individuos [4, 5, 6].

Es muy común escuchar a los estudiantes decir, “*para que estudiamos estas cosas*”, “*esto para que me sirve*”, “*no entiendo los ejercicios*”, “*yo vi eso el año pasado, pero no me acuerdo*” “*no me gusta esa clase*” etc. Tales expresiones dejan de manifiesto que lo que aprenden los estudiantes no tiene relación con lo que ellos quieren conocer y peor aún, lo que aprenden no les sirve para explicar las situaciones que se les presentan en su vida cotidiana [6].

Desde esta mirada de ciencia objetiva, las vivencias en el aula no se inquietan por la búsqueda de explicaciones sobre diversos eventos de nuestro entorno [6, 7], sino, se limitan al aprendizaje de contenidos descontextualizados que desvanecen la actividad de la ciencia, en particular de la física [6, 7].

En este sentido, se propone hacer posible una enseñanza con sentido para los jóvenes en la que se evidencie una búsqueda de la comprensión de lo que se estudia, favoreciendo la formación del individuo en el conocimiento, asumiendo la importancia del quehacer en el aula, generando ambientes propicios para la construcción de explicaciones y estableciendo una relación con la ciencia como actividad cultural.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección II se realiza un análisis sobre las ideas alternativas de los estudiantes, teniendo en cuenta las nuevas tendencias en la enseñanza de las ciencias. En la sección III, se describe la experiencia de aula realizada con los estudiantes del Instituto San Juan de Dios, caracterizando los objetivos y fases de la propuesta. En la sección IV, se describe las ideas alternativas de los estudiantes acerca de la carga eléctrica, finalmente en la sección V presentamos nuestras conclusiones.

II. A PROPOSITO DE LAS IDEAS ALTERNATIVAS EN LOS ESTUDIANTES

Las nuevas tendencias en la enseñanza de las ciencias, rescatan la importancia de las ideas alternativas del estudiante para la construcción de nuevos saberes [8, 9, 10], las cuales tienen su base en la percepción de los fenómenos físicos del entorno y en las relaciones de las abstracciones que de ellos se hacen, dando lugar a esquemas mentales más complejos [8, 9].

Tal afirmación, es producto del consenso existente en la actualidad entre diversos investigadores en didáctica de las ciencias, sobre la consideración de que la mente de un sujeto no es un vaso vacío, sino que por el contrario, las ideas alternativas que se manejan respecto a un fenómeno en particular, deben interactuar con la nueva información que se les presenta [3, 8, 9, 10].

Las ideas que se forma un estudiante guardan una estrecha relación con el conocimiento tanto cotidiano como académico [6]. En consecuencia, la representación mental que el estudiante hace del mundo físico, podría no estar acorde con las ideas expuestas por la ciencia y por ende, generar concepciones erróneas desde la visión científica [7, 10].

Por su parte, Limón y Carretero (1996), señalan que las ideas previas son construcciones personales que suelen estar guiadas por la percepción, la experiencia y el conocimiento cotidiano del alumno. Habiendo diferencias en la especificidad de cada una de ellas, grados de estabilidad, así como de coherencia y solidez, que las hacen constituir representaciones difusas o por el contrario formar parte de un modelo mental explicativo [11, 12].

Según Tamayo [17], las ideas previas se refieren a las nociones que los estudiantes poseen antes del aprendizaje formal de una determina cátedra. Por lo general, tales ideas tienen un origen individual y social, pues se construyen a lo largo de la vida del sujeto mediante la influencia del contexto en el cual se encuentra inmerso [13, 14, 15]. Asimismo, se caracterizan por ser respuestas rápidas, poco reflexivas y que transmiten mucha seguridad [14].

En el campo de la electricidad se han efectuado algunos trabajos sobre las ideas alternativas de los estudiantes, tal como lo reflejan Furió y Guisasola [4, 5], Limón, M. y Carretero, M. [11], Greca, I. y Moreira, M. [3]. Estos estudios muestran, que aún después de haber estado sometidos los estudiantes a un período instruccional, presentaban confusiones al tratar de establecer la causa del movimiento de las cargas eléctricas y su relación con algunas cantidades físicas, como diferencia de potencial, resistencia, corriente, entre otras.

Otros estudios [14, 15, 16], señalan que las teorías electro-magnéticas enseñadas en la escuela han sido catalogadas por los estudiantes como inteligibles, anti-intuitivas, difíciles, abstractas, etc. Aseguran que los estudiantes salen de éstos cursos en circunstancias muy análogas a las que tenían cuando llegaron. Una de las posibles razones, es que tal aprendizaje se reduce a la reproducción de fórmulas matemáticas o la repetición de algoritmos, y no a la comprensión de la fenomenología [1, 3, 17].

Usualmente, en la enseñanza de la física se utilizan términos como: corriente, electrón, protón, neutrón, energía, átomo etc. que aunque tienen un significado para el estudiante, no se corresponde con el significado que tienen en el campo de la física [18, 19, 20]. También se evidencia que a pesar de utilizar múltiples estrategias para comprender el concepto de carga eléctrica, los estudiantes continúan utilizando sus ideas alternativas para abordar las diversas situaciones en la clase [4, 5, 8, 15, 18]. Es decir, la mayoría de los estudiantes admite el aspecto dinámico de la corriente eléctrica, refiriéndose a ella con palabras como “*entrar*” “*salir*”, “*circular*” “*trasladar*” “*pasar*” etc. Sin embargo, no está claro para ellos, que lo que circula son los electrones que se encuentran en los materiales conductores [4, 5, 17]. Desde esta perspectiva, podemos afirmar que uno de los puntos cruciales para el entendimiento de los fenómenos eléctricos, es la comprensión de la carga eléctrica [4, 5, 17], pues ésta formulación es la base para abordar problemas tales como: Electrización por contacto o por fricción, carga por inducción, por electrólisis o por efecto termoeléctrico, potencial eléctrico, materiales conductores y/o aislantes, resistencia, voltaje, intensidad, entre otros [2, 3, 14, 15, 17]. Sin embargo, no se evidencia en la enseñanza de los fenómenos electrostáticos, una relación que conecte las ideas alternativas de los estudiantes con el formalismo de la carga eléctrica, por lo cual, el estudiante divisa éste concepto como algo erróneo, inconsistente y anti-intuitivo [11, 12, 13, 17]. Es decir, los alumnos terminan sus cursos de electrostática, sin lograr una apropiada comprensión y manejo de los principios fundamentales de ésta [19].

Carrascosa [13], plantea que las situaciones erróneas que comúnmente se presentan en los estudiantes de física, constituyen en algunos casos serios obstáculos para la adquisición del conocimiento, hecho conocido a lo largo de la historia y considerado como uno de los principales responsables de los intentos fallidos de los docentes y estudiantes, en el logro de la construcción de conceptos científicos [21].

Al respecto, la presente investigación tiene por objetivo determinar las ideas alternativas relacionadas con la carga eléctrica, materiales conductores y aislantes, estableciendo las consideraciones pertinentes que contribuyan a promover la construcción de conocimiento en los estudiantes.

III. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

A. Caracterizando la propuesta de aula

Teniendo en cuenta que las ideas alternativas no son pasajeras o accidentales, sino que constituyen una interpretación que utilizan los alumnos para brindar explicaciones, descripciones y predicciones de los fenómenos presentes en su entorno [8, 9, 10, 12, 14]. Describiremos la experiencia de aula realizada en un colegio al sur de Bogotá (Colombia), cuyo fin es caracterizar las explicaciones que emergen acerca de la carga eléctrica, a partir del estudio de los materiales conductores y aislantes.

La actividad descrita a continuación se llevó a cabo en el contexto de la clase de física con estudiantes de grado décimo del Instituto San Juan de Dios, específicamente en el laboratorio, lo cual es apreciable en el sentido de que tales actividades resultan significativas para los alumnos.

Los objetivos de la experiencia se relacionan a continuación:

- Caracterizar las explicaciones que emergen acerca de la carga eléctrica a partir del estudio de los materiales conductores y aislantes.
- Construir un circuito eléctrico sencillo a partir de un limón, batería, cables, leds, puntillas y monedas.
- Reducir la brecha entre lo que se enseña y lo que los estudiantes realmente aprenden en clase.

B. Fases de la propuesta de aula

Las actividades propuestas permiten analizar cuatro etapas, desde las cuales es posible comprender el proceso de construcción de conocimiento frente a los materiales conductores y aislantes.

El objetivo de establecer dichas etapas busca abstraer elementos característicos según el contexto y situaciones a partir de las formas de concebir y pensar cómo ocurre el traspaso de energía eléctrica de un cuerpo a otro (carga eléctrica), utilizando como excusa los materiales conductores y aislantes. En este proceso, se acude a las representaciones escritas y gráficas emergentes en las diferentes actividades

propuestas, a partir de las cuales se hace el análisis de la experiencia y conocimiento que tienen los estudiantes.

Las cuatro etapas propuestas se resumen en los siguientes términos:

TABLA I. Etapas de la experiencia de aula

ETAPAS DE LA PROPUESTA DE AULA	
1.	Exploración: Nociones alternativas sobre materiales conductores y aislantes
2.	Construcción y elaboración de un circuito eléctrico
3.	Diferenciando un material conductor de uno aislante
4.	Construyendo conocimiento

- Exploración:** Se realiza un rastreo de las ideas alternativas de los estudiantes alrededor de los materiales conductores y aislantes.
- Construcción y elaboración del circuito eléctrico:** Se analizan las descripciones que los estudiantes forjan en determinadas situaciones que ocurren en el circuito eléctrico al modificar sus elementos iniciales por materiales no conductores (icopor, palillos, silicona, etc.).
- Diferenciación del término (conductor-aislante) desde la fenomenología:** Se identifican los elementos que permiten determinar cuándo un material es conductor de energía y cuando no lo es, a partir de los conocimientos experienciales y conceptuales de los estudiantes.
- Construyendo conocimiento:** En esta fase se visita la biblioteca del colegio para consultar desde diferentes fuentes (libros, red, revistas, etc.) los elementos que caracterizan un material conductor y uno aislante. Se pretende que los estudiantes analicen las contribuciones de los científicos en relación a éstos términos (carga eléctrica, material conductor y aislante) y construyan una explicación conjunta a partir de lo aprendido desde la experiencia en el laboratorio.

C. Análisis de la experiencia de aula

La primera etapa de la propuesta de aula acerca de las ideas alternativas que presentan los estudiantes alrededor de los materiales conductores y aislantes, permite establecer que tales términos son asociados a partir de su vivir cotidiano y contexto social. Un ejemplo de ello, se ilustra en la Tabla II.

En esta etapa, el docente planteó los siguientes elementos de controversia:

- ¿Qué ideas te sugiere la palabra conductor de energía? dibuja.
- ¿Qué ideas te sugiere la palabra aislante? Dibuja

TABLA II. Ideas alternativas de los estudiantes acerca de los materiales conductores y aislantes.

MATERIALES CONDUCTORES	MATERIALES AISLANTES
1. "Quiere decir que pasa la corriente"	1. "Son los que no se pegan"
2. "Es cuando entra energía a un cuerpo"	2. "Es el que no está unido a la energía"
3. "Es por donde sube la energía"	3. "Son los que están separados o lejos de la energía"
4. "Es donde hay cargas eléctricas"	4. "Son los que están solos o aislados"
5. "Es por donde circula la energía"	5. "Un poste que está lejos de una casa"
6. "Son los que trasladan electrones"	6. "No traspasan corriente"
7. "Son los cables de la luz"	7. "Es un material no conductor que, por lo tanto, no deja pasar la electricidad."

Al realizar el análisis de las palabras que los estudiantes plantean en relación a los materiales conductores y aislantes, se destaca la caracterización de verbos, adjetivos, y sustantivos que muestran la clase de objetos, acciones y/o actividades sobre las cuales tienen conocimiento.

Las palabras más frecuentes son: "pasar" "entrar" "unir" "subir" "circular" "trasladar", "separar" "pegar" entre otros. Lo que permite identificar que los estudiantes relacionan los materiales conductores y aislantes con acciones cotidianas, y algunas de ellas asociadas directamente con su entorno.

De la misma manera al observar los bosquejos, encontramos que asocian sus ideas alternativas con los elementos de su entorno.

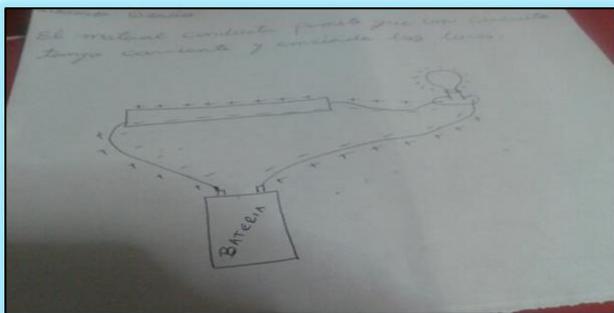


FIGURA 1. Se muestra el bosquejo realizado por un estudiante de grado décimo acerca del término conductor de energía. Nótese, que se hace expresa una serie de líneas (caminos) que indican la manera como se mueven las cargas en un material conductor.

En la segunda etapa, el propósito es caracterizar cuándo existe para el estudiante un flujo de energía continuo. Es decir, nos interesa que el alumno describa la función del limón, la moneda, las puntillas, el cable, la batería y los leds en el circuito eléctrico.

En esta etapa, el docente planteó los siguientes elementos de controversia:

- a) ¿Qué ocurre al conectar los elementos del circuito?
- b) ¿Cómo ocurre el flujo en el circuito? Explícalo.
- c) ¿Qué ideas te sugiere la palabra aislante? Dibuja.

Al realizar un análisis frente a los elementos de controversia, cabe mencionar que la mayoría de los estudiantes asimila el término energía eléctrica para explicar el funcionamiento de los leds en el circuito. (Véase Tabla III).

TABLA III. Ideas alternativas acerca de la energía.

IDEAS ALTERNATIVAS DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DEL TÉRMINO ENERGÍA
"Al conectar los elementos del circuito se encienden los bombillitos porque les llega energía".
"Al conectar todos los elementos la energía de la pila le llega a los leds, entonces prenden".
"La energía que sale de la pila hace que enciendan los leds".
"Siempre se debe conectar la pata negativa del led al borne negativo de la pila y la pata larga al borne positivo para que haya energía".
"La pata corta del led funciona como energía negativa (cátodo) y la pata larga como energía positiva (ánodo)".

Asimismo, admiten el aspecto dinámico de la corriente eléctrica, refiriéndose a ella con palabras como: "Ingresar" "salir", "circular" "transitar" "trasladar" "pasar" etc. Sin embargo, no está claro para ellos que lo que circula son los electrones que se encuentran en los materiales conductores.

TABLA IV. Ideas alternativas sobre flujo de energía.

IDEAS ALTERNATIVAS ACERCA DEL FLUJO DE ENERGÍA CONTÍNUO
"La energía fluye por medio de los cables".
"La energía circula por todos los materiales del circuito".
"La energía es producida por la pila, transita por los cables, la moneda, la puntilla, el limón y finalmente ingresa a los leds".

Es interesante observar como los estudiantes intuyen el flujo continuo de la corriente a través del circuito eléctrico. Para ellos, la corriente presenta una dirección que no cambia de sentido con el tiempo. Es decir, las cargas eléctricas circulan siempre en la misma dirección.

TABLA V. Ideas alternativas sobre flujo de energía.

IDEAS ALTERNATIVAS ACERCA DEL FLUJO DE ENERGÍA CONTINUO
<i>"La energía fluye de forma continua por medio de los cables"</i>
<i>"La energía es seguida"</i>
<i>"La energía pasa consecutivamente por todos los materiales del circuito"</i>
<i>"La energía sale de la pila pasa por las puntillas, por el limón y la moneda"</i>
<i>"La energía de la pila se traslada al resto de elementos y llega a los leds"</i>

Otra rasgo importante es que para los estudiantes el principal elemento del circuito es la pila, ya que se refieren a la existencia de una fuente de corriente que es suministra por ésta.

TABLA VI. Ideas alternativas sobre la fuente de energía.

IDEAS ALTERNATIVAS ACERCA DE LA PILA
<i>"La energía sale de la pila pasa por las puntillas, por el limón y la moneda".</i>
<i>"La energía fluye por la pila. Si la quito no hay energía en el circuito".</i>
<i>"La pila es el principal elemento del circuito, porque da energía".</i>
<i>"La pila es la que hace prender los leds, pero se desgasta muy rápido"</i>
<i>"Cuando conectamos un led directo a la pila se quemó, porque le traspaso mucha energía"</i>

De la misma forma, establecen que la energía que suministra la pila se gasta a lo largo del circuito, o en otras palabras, la intensidad va disminuyendo a medida que atraviesa los distintos elementos del circuito.

TABLA VII. Ideas alternativas sobre intensidad.

IDEAS ALTERNATIVAS SOBRE GASTO DE ENERGÍA
<i>"El led prende más cuando colocamos la pila de 9v. Al colocar una pila de 3v, solo produce un puntico de luz."</i>

"La energía que sale de la pila al pasar por las puntillas, por el limón y la moneda va disminuyendo".

"Cuando conectamos dos (2) led al cable, la energía de la pila disminuye porque ahora encienden muy poquito".

"Cuando conecto un led directo a la pila enciende con mucho brillo, pero cuando conecto dos led, disminuye el brillo o prenden muy poquito".

"Si se va desgastando la pila, disminuye la energía en los leds".

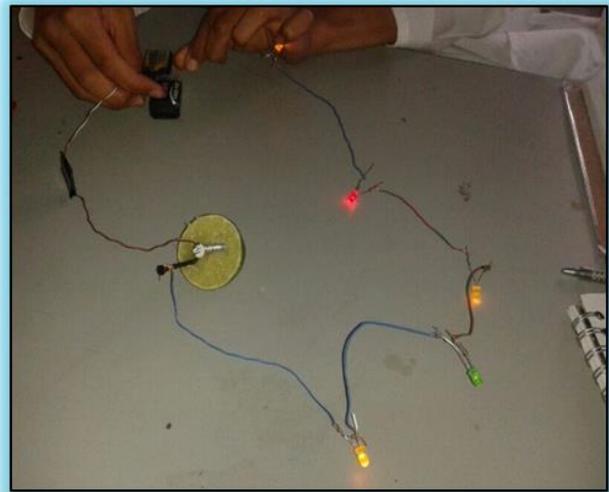


FIGURA 2. Se ilustra el montaje experimental hecho por un grupo de estudiantes. Subráyese, que se logra montar un circuito eléctrico en serie utilizando materiales conductores de la vida cotidiana: Un limón, una puntilla, un tornillo, cables, una pila y leds.

La etapa tres es una de las más importantes, ya que permite al estudiante diferenciar un material conductor de uno aislante a través de la experiencia.

En esta etapa el experimentar es fundamental, por ello se propone al estudiante lo siguiente:

- Corte los cables del circuito y describa sus observaciones
- Una los cables que cortó con cinta y cambie la puntilla por una barra de silicona, luego por palillos y realice sus observaciones.
- Reemplace la pila por un pedazo de madera y luego por icopor. Realice sus observaciones.
- ¿Qué ocurre cuando cambio algunos materiales en el circuito eléctrico?
- ¿Con cuáles materiales el circuito no encendió?
- ¿Qué elementos permiten determinar si un material es conductor de energía?

Al analizar los escritos de los estudiantes acerca de los elementos de controversia propuestos, se evidencia que cuando se cortaron los cables del circuito y se cambiaron los materiales conductores (tornillo, puntilla, moneda) por materiales aislantes (palillos, icopor, madera, silicona), "el

flujo de corriente deja de existir, porque la corriente no tiene un camino por donde pasar”.

TABLA VIII. Experimentando con el circuito.

AL CORTAR LOS CABLES DEL CIRCUITO	AL CAMBIAR LOS MATERIALES CONDUCTORES POR AISLANTES
“Al cortar los cables del circuito no hay energía porque no tiene por donde pasar”	“Cuando colocamos la silicona no prende el circuito porque no llega la energía”
“Al cortar los cables no prenden los leds porque se interrumpe la energía”	“Con los palillos tampoco pasa la corriente, el circuito no funciona”
“El cable es el que lleva la corriente, pues al cortarlo ya no se puede transportar”	“Con la madera no funciona el circuito, los leds no prenden, porque la madera no conduce energía”
“Los cables funcionan como un camino, si no hay camino la corriente no puede pasar”	“El icopor no hace nada, no conduce corriente”
“Los cables son necesarios para que circule la energía”	“Se puede decir que no pasa corriente en el circuito cuando se conectan los palillos, silicona, madera o icopor, pues los leds no prenden”

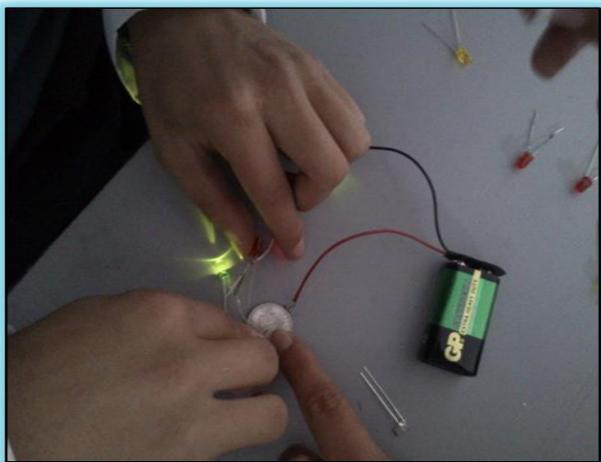


FIGURA 3. Se muestra la experimentación de los estudiantes con cada uno de los materiales del circuito, en éste caso la moneda. Finalmente, en la cuarta etapa (en la biblioteca) cuando acercamos al estudiante a las diferentes fuentes con el fin de construir colectivamente una significación sobre la carga eléctrica, materiales conductores y aislantes. Se evidencia en las respuestas de su cuaderno que terminan aceptando los productos de labor científica, olvidando lo construido o ganado en la práctica.

TABLA IX. Construcción de conocimiento de los estudiantes.

CONSTRUCCIONES EN LA BIBLIOTECA	
MATERIALES CONDUCTORES	MATERIALES AISLANTES
“Son materiales cuya resistencia al paso de la electricidad es muy baja”	“Es un material que resiste el paso de la corriente y no la deja fluir libremente”.
“Un conductor eléctrico es un material que ofrece poca resistencia al movimiento de carga eléctrica”	“Es un elemento que impide el desplazamiento de corriente continuo a lo largo del conductor”
“Los mejores conductores eléctricos son los metales como el cobre, el oro, el hierro y el aluminio”	“Es el material que impide el paso continuo de corriente por un cuerpo”
“Son los que permiten el transporte de energía eléctrica”	Es un material de conductividad prácticamente nula o muy baja, que idealmente no permite el paso de la corriente.

IV. ACERCA DE LA CARGA ELÉCTRICA

Luego de analizar la anterior experiencia, se puede establecer que las ideas alternativas sobre la carga eléctrica se definen teniendo en cuenta tres (3) indicadores: Su naturaleza, sus propiedades y el comportamiento eléctrico de la materia.

- a) **Con relación a su naturaleza:** Se señala la existencia de dos tipos de carga (positiva y negativa), y el comportamiento que de su interacción se deriva, es decir; cargas del mismo signo se repelen y de igual signo se atraen.
- b) **Con relación a las propiedades de la carga eléctrica:** Se desconoce la conservación y a la invariancia de la misma.
- c) **Con relación al comportamiento eléctrico de la materia:** Corresponde a la capacidad de las sustancias para conducir energía y a las formas de electrización de los cuerpos.

Nótese, que existe en el estudiante al menos una noción alternativa sobre la naturaleza de la carga, puesto que manifiestan en sus respuestas algún elemento asociado con las cargas negativas y positivas. Sin embargo, como consecuencia del desconocimiento del comportamiento eléctrico de las sustancias, no puede identificarse una clara definición de los materiales conductores o aislantes.

En síntesis, puede decirse que el concepto de carga eléctrica aun cuando es reconocido por la mayoría de los estudiantes, no refiere una concepción acorde con la ciencia y presenta nociones erróneas.

V. CONCLUSIÓN

- a) Esta experiencia de aula nos permite deducir que las ideas alternativas que los estudiantes poseen sobre la carga eléctrica, los materiales conductores y aislantes

- están relacionadas directamente con elementos de su experiencia cotidiana, lo cual se demuestra en el tipo de acciones que representan para explicarse su mundo.
- b) Las frases y los bosquejos que los estudiantes realizan sobre materiales conductores y aislantes, permiten caracterizar sus concepciones frente a estos materiales. De las frases, se reconoce una preferencia a enunciar acciones cotidianas, mientras que en los dibujos, se hace expresa una serie de líneas que indican la manera (su dirección, su camino) como se mueven las cargas en un material conductor.
- c) Asociando el conocimiento que tienen los estudiantes sobre materiales conductores y aislantes, se infiere que la fuente de conocimiento es la experiencia, la cual le permite construir acciones cotidianas relacionadas con su contexto. En resumen, todas las actividades desarrolladas se pueden describir desde una idea transversal que permite comprender los materiales conductores como un flujo continuo de energía y los aislantes como obstaculizadores de energía.

AGRADECIMIENTOS

Especial agradecimiento al Instituto San Juan de Dios (Bogotá-Colombia), por abrirnos sus instalaciones y apoyarnos constantemente con el proyecto: *La ciencia como actividad cultural: "Construyendo conocimiento desde el contexto cotidiano"*

REFERENCIAS

- [1] Segura, A., Nieto, V., Segura, E., *Una contextualización adecuada sobre la enseñanza de las ciencias naturales en la educación secundaria*. Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 1-6 (2013).
- [2] Segura, A., Nieto, V., Segura, E., *Un Proceso de Enseñanza-Aprendizaje Sobre Fenómenos Duales en la Educación Media*. Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 482-486 (2012).
- [3] Greca, I. y Moreira, M., *Modelos mentales y aprendizaje de la física en electricidad y magnetismo*. Enseñanza de las Ciencias **16**, 289-303 (1998).
- [4] Furió, C. y Guisasola, J., *¿Puede ayudar la historia de la ciencia a entender por qué los estudiantes no comprenden los conceptos de carga y potencial eléctrico?* Revista Española de Física **7**, 46-50 (1993).
- [5] Furió, C. y Guisasola, J., *Concepciones alternativas y dificultades de aprendizaje en electrostática. Selección de cuestiones elaboradas para su detección y tratamiento*. Enseñanza de las Ciencias **17**, 441-452 (1999).
- [6] Flores, F. y Gallegos, L., *Construcción de conceptos físicos en estudiantes. La influencia del contexto*, Perfiles Educativos **XXI**, 90-103 (1999).

- [7] Pozo, J., *Teorías cognitivas del aprendizaje* 6ª edición, (Ediciones Morata, S.L., Madrid, España, 1999).
- [8] Cubero, R., *Concepciones alternativas, preconceptos, errores conceptuales... ¿distinta terminología y un mismo significado?*, Investigación en la Escuela **23**, 33-42 (1994).
- [9] De posada, J. M., El estudio didáctico de las ideas previas. En Palacios, P. y Cañal de León, *Didáctica de las Ciencias Experimentales. Teoría y Práctica de la Enseñanza de las Ciencias* (Alcoy, Marfil, 2000).
- [10] Chamizo, J. A., Sosa, P. y Zepeda, S., *Análisis de las ideas previas de la química*, Enseñanza de las Ciencias. Número extra, VII Congreso. 4-5 (2005).
- [11] Limón, M. y Carretero, M., *Las ideas previas de los alumnos: ¿qué aporta este enfoque a la enseñanza de las ciencias?*, en M. Carretero (Comp). Construir y enseñar las ciencias experimentales, (Aique, Buenos Aires, Argentina, 1996), pp. 19-45.
- [12] Campanario, J. y Otero, J., *Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: Las pautas del pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias*, Enseñanza de las Ciencias **18**, 155-169 (2000).
- [13] Carrascosa, J., *El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (Parte I). Análisis sobre las causas que la originan y/o mantienen*, Revista Eureka sobre Enseñanza y divulgación de las Ciencias **2**, 183-208 (2005).
- [14] Martín, J. y Solbes, J., *Diseño y evaluación de una propuesta para la enseñanza del concepto de campo en Física*, Investigación Didáctica **19**, 393-403 (2001).
- [15] Abragam, A., *Errores conceptuales en circuitos eléctricos*, Mundo Científico **12**, 952-965 (1992).
- [16] Moreira, M., *Aprendizaje significativo: teoría y práctica*. (2 edición), (Editorial Machado Libros, S. A., Madrid, España, 2003).
- [17] Nava, M. & Arrieta, X., *Ideas previas sobre carga, fuerza y campo eléctrico en estudiantes universitarios. Consideraciones para superación*, Revista TELOS **10**, 308-323 (2008).
- [18] Pozo, J. I., *La historia se repite: Las concepciones espontáneas sobre el movimiento y la gravedad*, Infancia y Aprendizaje **38**, 69-87 (1987).
- [19] Ostermann, F. y Moreira, M., *Física contemporánea en la escuela secundaria: Una experiencia en el aula involucrando formación de profesores*, Enseñanza de las Ciencias **18**, 391-404 (2000).
- [20] Mora, C. y Herrera, D., *Una revisión sobre ideas previas del concepto de fuerza*, Latin American Journal of Physics Education **3**, 72-86 (2009).
- [21] Pesa, M. y Cudmani, L. C., *Sistematización de los resultados alcanzados en investigaciones sobre concepciones alternativas*, Memorias de la X Reunión Nacional de Educación en la Física, Mar de Plata, (1997).

Experimentos sencillos en magnetismo con materiales de bajo costo: desarrollo de modelos y terminología a partir de las observaciones



Shitu, Jorge^{1,2}

¹Departamento de Ciencias Exactas, Naturales e Ingeniería, Sede Andina, Universidad Nacional de Río Negro Mitre N° 631 San Carlos de Bariloche (8400), Río Negro, Argentina.

²Extensión Áulica de la Universidad Tecnológica Nacional, Sede Administrativa: Moreno 69, 5° piso, San Carlos de Bariloche (8400), Río Negro, Argentina.

E-mail: jshitu@unrn.edu.ar

(Recibido el 27 de Febrero de 2014, aceptado el 18 de Junio de 2014)

Resumen

Se presenta en este trabajo una propuesta didáctica para enseñar varios conceptos básicos del magnetismo, tales como *campo magnético*, *intensidad de campo magnético*, *magnetización inducida* e *interacciones magnéticas*. La propuesta está orientada fundamentalmente a cursos universitarios de nivel introductorio, aunque varias de las actividades que se proponen pueden ser usadas para la enseñanza en el nivel medio. Se propone una construcción modelada de fenómenos magnéticos básicos, partiendo de experiencias sencillas y evitando expresamente el uso previo a la realización de las experiencias de cualquier nomenclatura existente en libros de texto, con el objetivo de mostrar el aspecto empírico de la ciencia, y teniendo en cuenta las ideas previas de los estudiantes. Se discute el uso de modelos didácticos para la enseñanza de las ciencias en el aula.

Palabras clave: Magnetismo. Interacciones magnéticas, campo magnético, modelos didácticos, ideas previas, construcción de terminología científica.

Abstract

A didactic proposal to teach several basic concepts of magnetism, such as magnetic field, magnetic field strength, induced magnetization and magnetic interactions is presented. The proposal is aimed primarily at introductory level college courses on the subject, although several of the activities proposed can be used for teaching at the secondary level. We propose a model building basic magnetic phenomena, starting from simple experiments and specifically avoiding the use prior to the completion of the experiences of any existing nomenclature in text books, aiming to show the empirical aspect of science, and taking into account students' previous ideas. We discuss the use of instructional models for teaching science in the classroom.

Key Words: Magnetism, magnetic interactions, magnetic field, didactic models, preconceptions, construction of scientific terminology.

PACS: 01.40.gb, 01.40.gf, 01.40.Ha

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Muchos de los cursos tradicionales universitarios de Física cuya temática incluye la enseñanza de los fenómenos magnéticos, en general, tienen una fuerte carencia en la construcción de modelos ligados a fenómenos y conceptos básicos tales como los de campo magnético, la interacción entre imanes permanentes, y los fenómenos de magnetización inducida.

En general, la enseñanza se limita por un lado, a la proposición verbal de los contenidos que suelen encontrarse en los libros tradicionalmente escogidos como referencia en estos cursos, tanto los de nivel introductorio como los más avanzados, y en segundo lugar se hace énfasis en una presentación que, si bien describe con mayor o menor

claridad según el caso los aspectos fenomenológicos de estos conceptos, está fuertemente anclada en formalismos lógico-matemáticos (ver, por ejemplo, [1, 2, 3, 4, 5]).

Sin embargo, es notable que el mismo Maxwell no diera tanta importancia a este enfoque en sus construcciones iniciales:

“...deliberadamente no estudió «la matemática de los alemanes», como él expresa, antes de entender las explicaciones de los fenómenos dados por Faraday, y verificó que «muchos de los métodos más fértiles de investigación descubiertos por los matemáticos podrían ser mejor expresados en ideas de Faraday» (Maxwell, 1873), quien no escribió ni una sola fórmula” [6].

Shitu, Jorge

En función de lo que he observado, reflexionado y experimentado a lo largo de varios años de enseñanza en estos temas, tanto en cursos de nivel básico en diversas carreras de Ciencias e Ingeniería, Profesorados de Física y de Química, así como en la enseñanza de la Física en nivel medio, para que los alumnos lleguen a un conocimiento conceptual sustentable en el tiempo, más allá del formalismo matemático y eviten la repetición automática de explicaciones de ciertos comportamientos de los sistemas magnéticos para explicar los fenómenos que se observan, y a la vez, poder aplicarlos a situaciones no discutidas en el aula, es necesaria una enseñanza basada en la construcción de modelos sencillos, desarrollada sobre la base de la fenomenología experimental.

En este contexto, y de acuerdo a esta experiencia de trabajo en este campo, propongo en el presente artículo una propuesta didáctica de enseñanza basada en lo expuesto en el último párrafo.

II. LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS CIENTÍFICOS DESDE CERO: LA IMPORTANCIA DE LLEGAR A DARLE NOMBRE A LOS FENÓMENOS A PARTIR DE LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS BASÁNDOSE EN EXPERIENCIAS CONCRETAS

En el libro *“La ciencia en el aula”* de Gellon *et al.* [7], los autores proponen que el trabajo en el aula debería centrarse en la construcción de modelos y conceptos partiendo de la base de que las ideas que la ciencia construye están ligadas de una manera muy profunda con la forma en la que la ciencia produce conocimientos. Para ello, señalan, hay aspectos claves vinculados con la construcción del conocimiento científico que deben ser tenidos especialmente en cuenta, a saber, los aspectos *empírico, metodológico, abstracto, social y contraintuitivo*.

En particular, son de pertinencia para este trabajo algunas reflexiones en relación al primero de los aspectos mencionados:

“Como el camino está trazado, es fácil olvidar en el aula los orígenes empíricos de las ideas científicas, y quedarse con el resultado final, sin tener en cuenta cómo esas ideas se conectan con evidencias en el mundo de los fenómenos. Esto se da en extremo si se utiliza una forma declarativa de enseñanza de las ciencias, en la que el docente (o el libro de textos) les cuenta a los alumnos como “es” la realidad. En este caso, la fuente fundamental del saber no es la observación o el experimento, sino la palabra consagrada en el libro de texto o en la autoridad del docente”.

“Presentar en clase abundantes experiencias que pongan a los estudiantes en contacto con la realidad a explicar es un buen comienzo para llevar el aspecto empírico de la ciencia al aula. Pero hay que prestar atención al uso de prácticas verbales que puedan interferir insidiosamente con este buen comienzo”.

“Con frecuencia, los estudiantes creen que nombrar un fenómeno es entenderlo, que comprender radica en nombrar algo o referirse a terminología sofisticada”.

“Al ceñirnos lo más estrictamente a la secuencia fenómeno-idea-terminología, estamos siguiendo la secuencia lógica que sigue la investigación científica”.

“Si quisiéramos respetar el aspecto empírico de la ciencia al máximo posible, deberíamos desarrollar actividades en que las ideas se construyan desde “cero”.

En un programa de este tipo, los estudiantes empiezan usando sus sentidos y su experiencia cotidiana, dejando conscientemente de lado conceptos y términos científicos aprendidos previamente....”.

III. LOS MODELOS MENTALES Y SU INFLUENCIA EN EL APRENDIZAJE DE LA FÍSICA DEL MAGNETISMO

Es bien conocida la importancia de los modelos en los procesos de aprendizaje de los fenómenos, leyes y teorías físicas. En el marco de esta propuesta didáctica, dentro de la extensa cantidad de artículos publicados sobre tema, me parecen relevantes los trabajos de Greca [6], Morrison [8], Galagovsky [9] y Justí [10].

En el primero de esos artículos, los autores basan su trabajo en la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird [11], que clasifica los modelos mentales en tres grandes categorías: (a) las representaciones proposicionales (definidas como representaciones mentales que pueden ser expresadas verbalmente); (b) los modelos mentales (análogos estructurales de una situación del mundo real o imaginario); (c) las imágenes mentales («perspectivas» particulares de un modelo mental).

Además, los autores del artículo plantean que la construcción de un modelo es el *“...resultado de la percepción, interacción social o experiencia interna”*. A su vez, basándose en la propuesta de Johnson-Laird, mencionan que, en ausencia de un profesor, las personas construyen modelos de los fenómenos físicos a partir de tres principios: (1) todos los eventos tienen causa; (2) las causas preceden a los eventos y (3) la acción sobre un objeto es la principal causa para cualquier cambio que ocurra en él.

Respecto al trabajo de Galavosky y Adúriz-Bravo [9], hacen una comparación muy interesante entre los modelos científicos escolares y los eruditos, en el marco de los conceptos de ciencia escolar y ciencia erudita. Visualizan la enseñanza de las ciencias como un proceso de aproximación progresivo a las construcciones de la ciencia erudita, y para ello, presentan una aproximación de carácter selectivo, que consiste en un relevamiento de los conceptos estructurantes de la ciencia, y su adaptación a la máxima profundidad posible de acuerdo al nivel de escolaridad, lo que daría lugar a un proceso de alfabetización científica.

Esta elección tiene como consecuencia concebir a la ciencia escolar, ya no como una versión simplificada de la ciencia erudita, sino más bien como una entidad con identidad y herramientas propias, cuyo objetivo es acercar

paulatinamente al alumno a formas más elevadas de representaciones científicas. Dentro de esta caracterización, plantean la diferencia entre modelos científicos eruditos y escolares, y proponen lo que constituye el aporte novedoso de su trabajo, que denominan Modelo Didáctico Analógico (MDA)

Justi [10] propone un modelo de enseñanza de las ciencias basado en actividades de construcción de modelos, partiendo de una descripción del tipo de formación en ciencias que requieren los alumnos de nuestros tiempos a fin de poder enfrentar los desafíos que les depara el mundo en que vivimos, caracterizado por la complejidad, los cambios rápidos, la evolución permanente de la ciencia y la

tecnología, y las implicancias en la sociedad y el medio ambiente.

Como señala la autora del artículo, los libros de textos tratan poco y nada la construcción de modelos, pese a que es posible, a partir de las investigaciones en didáctica, epistemología, y la reflexión sobre la praxis científica moderna poder describir algunos elementos que ayuden a los estudiantes a aprender a proponer y construir modelos. Al respecto, es muy ilustrativo el gráfico de flujo que se presenta en la Figura 1 de ese artículo, que grafica el modelo de construcción de modelos que propone la autora del trabajo.

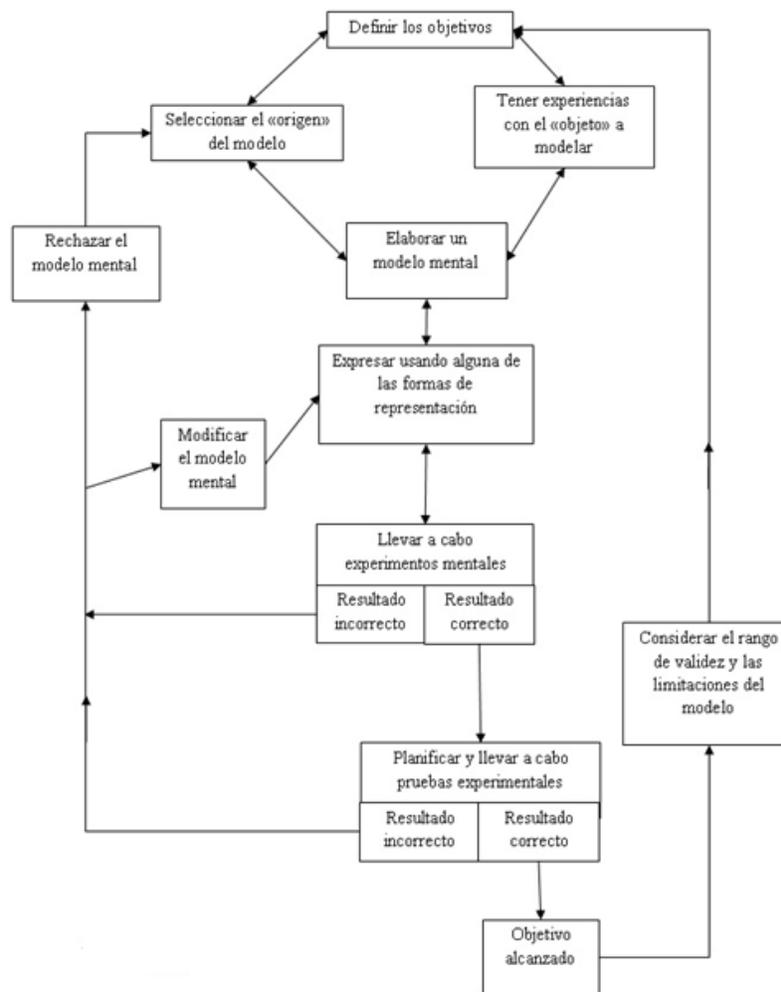


FIGURA 1. Gráfico de flujo del modelo de enseñanza de las ciencias basado en actividades de construcción de modelos.

V. LAS CONCEPCIONES ALTERNATIVAS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE ALGUNOS DE LOS FENÓMENOS MAGNÉTICOS

Al contrario de lo que sucede con otras áreas de la Física, no existe una gran cantidad de trabajos de investigación que muestren las concepciones alternativas de los estudiantes

sobre el magnetismo, sus causas y las interacciones entre imanes permanentes.

Tal vez, la mejor recopilación de los resultados conocidos en esta área de investigación se encuentre en el trabajo de Guisasola *et al.* [12], resumido en la tabla I.

De los trabajos citados allí, me parece interesante rescatar algunas de las conclusiones de Meneses [13] y

Guisasola *et al.* [14] por la pertinencia que tienen para la propuesta de trabajo que desarrollaré más adelante.

De la primera de estas dos referencias, destacamos lo siguiente:

“Existe una gran confusión entre campo eléctrico y campo magnético. Los alumnos expresan, en general, que un imán crea a su alrededor un campo magnético. Sin embargo al predecir sus efectos indican los debidos a la existencia de un campo eléctrico y no magnético. Asimismo, al explicar la atracción del hierro por un imán, consideran que existe una inducción eléctrica en lugar de magnética. En consecuencia, se desconoce el fenómeno de inducción magnética”.

“Al explicar los efectos de un imán sobre cuerpos cargados o viceversa casi nunca mencionan el estado de reposo o movimiento de las cargas”.

“Se cree que las interacciones visibles se producen entre imanes y toda sustancia metálica. Desconocen, en su mayoría, la existencia de sustancias diamagnéticas, paramagnéticas y ferromagnéticas y su interacción (aunque sea débilmente) con un imán”.

.....“Para explicar la interacción entre imanes y metales, los alumnos dan varias explicaciones:

a) Asocian al metal la doble polaridad del imán sin dar detalles.

b) Creen que el imán tiene en sí mismo una fuerza capaz de atraer cuerpos («efecto mágico»).

c) Estiman que hay un paso (transferencia) de carga del imán al hierro, produciéndose la interacción al estar los dos cargados.

d) Consideran (como ya se ha dicho) que se produce una redistribución de cargas en el hierro (orientación de los dipolos eléctricos), en lugar de la orientación de los dipolos magnéticos que son totalmente desconocidos”.

“Hay un cierto conocimiento de experiencias sobre fenómenos electromagnéticos. Los más conocidos son: el experimento de Oersted (15%), las experiencias sencillas de inducción eléctrica, mover un imán en las proximidades de un circuito (25%) y el electroimán (20%).

“Un porcentaje elevado (30%) no menciona (desconoce) experiencias o fenómenos que se relacionen con estos hechos”.

“La mayoría de los alumnos conocen que la Tierra es un gran imán, pero desconocen que cerca del polo norte geográfico se encuentra el sur magnético y que cerca del polo sur geográfico se encuentra el norte magnético. Para explicar que una aguja magnética se orienta hacia el norte geográfico dan las siguientes razones:

a) Existe un potente imán en el norte geográfico capaz de atraer la aguja metálica de la brújula, aunque se encuentre muy lejos.

b) Debajo de la aguja de la brújula existe un imán que es orientado por el imán Tierra”.

“Al explicar cómo está constituido un electroimán, indican que se trata de un imán cargado al que se le ha enrollado un conductor por el que circula una corriente”.

“Se constata un desconocimiento casi total del efecto que produce un imán sobre una corriente. Sin embargo, el efecto contrario es relativamente conocido”.

De la segunda referencia, remarco lo siguiente:

Un alto porcentaje de respuestas pertenecientes a la categoría aludida considera la interacción magnética como una fuerza central de igual dirección y sentido que la eléctrica. Todos estos resultados sugieren que los estudiantes no identifican correctamente las fuentes del campo magnético y que además muchos de ellos tienen dificultades para distinguir la interacción eléctrica de la magnética.

La imantación se produce porque algo pasa de «un agente» a «un paciente».....

En definitiva, los resultados de esta cuestión parecen indicar que los estudiantes entienden que el imán es fuente del campo magnético en función de la propia naturaleza de imán, o bien que los cuerpos que interactúan lo hacen debido a la diferente carga electrostática que tienen.....

En función de los resultados de este trabajo, los autores del trabajo plantean diversos modelos.

Modelo A: «Magnetismo como atracción». Según este modelo, el magnetismo es visto como una atracción en una región alrededor del imán y se debe a una propiedad intrínseca de los imanes; es decir, los imanes atraen a algunos materiales a causa de su propia naturaleza y no parece necesaria ninguna explicación añadida.

Modelo B: «Magnetismo como una nube». En este modelo, el imán estaría rodeado por una región limitada dentro de la cual se actuaría sobre otros cuerpos; los fenómenos magnéticos son explicados en términos de la acción de esta región y no de la acción del imán sobre los objetos. Este tipo de concepción parece que proviene de hacer una analogía entre la acción magnética y la gravitatoria.

Modelo C: «Magnetismo como electricidad». Este modelo incluye un mecanismo para explicar la interacción magnética que está basada en la idea de interacción eléctrica. En ese sentido, la atracción magnética, por ejemplo, es vista como la atracción entre cargas de diferente signo, no existiendo una conexión entre atracción y la noción de campo magnético. Los polos de un imán son vistos como regiones que tienen exceso o déficit de cargas eléctricas (concretamente cargas positivas, el polo Norte, y negativas, el polo Sur).

Modelo D: «Magnetismo como polarización eléctrica». Este modelo es una sofisticación del anterior (encontrado entre los estudiantes de alto nivel y también entre alguno de los profesores e ingenieros). El imán polarizaría los objetos cercanos en el sentido eléctrico del término y luego interactuaría con ellos de forma electrostática.

Modelo E: «Modelo de campo». En este caso, que aparece fundamentalmente entre profesores e ingenieros, se reconocería que los «electrones giratorios» del imán crearían campos magnéticos muy pequeños que al sumarse darían lugar a un campo magnético importante a nivel macroscópico, que actuaría a través de la fuerza magnética sobre las cargas en movimiento.

Si bien la propuesta didáctica que presento trabaja sobre algunas de estas ideas previas, el objetivo de la misma no es el de abordarlas, aunque deben tenerse muy en cuenta a la hora de trabajar con nuestros alumnos. De hecho, en los trabajos de Guisasola *et al* (2005), Meneses (2005) y Greca

(1998) se pueden encontrar una serie de actividades destinadas a este fin, que aconsejo fuertemente usar en forma conjunta con las actividades que presento en este trabajo.

En una primera aproximación al tema, me parece importante que se elijan actividades que permitan a los alumnos construir las siguientes nociones básicas:

- La fuente del magnetismo es la existencia de corrientes de algún tipo.
- A nivel microscópico, estas corrientes tienen que ver con el movimiento de los electrones en los átomos.
- En cuanto a lo que se refiere a los efectos magnéticos, podemos imaginarnos al movimiento de los electrones como el que tienen en una pequeña bobina por la que circula corriente. Teniendo en cuenta que si tengo dos o más bobinas centradas en el mismo eje, el campo magnético total será la suma de los campos magnéticos producidos individualmente por cada bobina, una configuración tal como la de dos bobinas iguales, con corrientes circulando en sentidos diferentes, centradas sobre el mismo eje axial producirán un campo magnético total nulo, ya que sus campos magnéticos individuales se compensan.
- El modelo de la bobina como representación del movimiento de los electrones en un átomo se basa en las relaciones entre el modelo semi-clásico de movimiento circular orbital y de spin de los electrones, que habitualmente se encuentra en los libros de texto que suelen usarse en cursos introductorios al tema.
- En un primer modelo muy simple, debido a esos movimientos de carga, cada átomo se puede transformar en un pequeño imán (un dipolo magnético). Cada dipolo tiene en sí mismo dos polos definidos, imposibles de separar en virtud del modelo que se propone.

En función del tiempo disponible, de la organización de los contenidos de la materia y de los objetivos que se espera alcanzar en la misma, estas primeras ideas básicas pueden complejizarse y ampliarse de acuerdo a lo que el docente considere. Sin embargo, un alumno que llegue a aprobar un curso universitario básico de electro-magnetismo debería tener construido, al menos, un modelo de magnetismo que esté cimentado sobre este conjunto de supuestos básicos.

V. PROPUESTA DIDÁCTICA

En relación a la propuesta didáctica de mi trabajo, de la lectura a primera vista de algunas de las actividades que se proponen en la misma podría deducirse que son más adecuadas a la enseñanza de la física a nivel medio que a nivel universitario, y de hecho, los resultados obtenidos en el trabajo cotidiano con mis alumnos indican que pueden ser usadas en dicho ámbito.

Pero si contextualizamos esta propuesta en el ámbito de la educación universitaria, la experiencia de los alumnos universitarios en su formación previa en la construcción de modelos para explicar los fenómenos físicos suele ser tan pobre (Meneses [13]), que las actividades que se proponen en este trabajo resultan totalmente relevantes a la hora de

sentar las bases para un proceso de aprendizaje significativo.

En otras palabras, un conjunto de actividades como el que se propone en este trabajo, cimienta las bases para un aprendizaje profundo en términos fenomenológicos de varios conceptos magnéticos básicos, y se transforma en un andamiaje para una posterior conceptualización más rigurosa y abstracta de los mismos, necesaria en los procesos de enseñanza de nivel universitario.

Asimismo, la resolución de problemas dentro del formalismo matemático propio de cursos de este nivel, tendrá un nivel de riqueza conceptual que no se alcanzaría en cursos tradicionales, basados en el esquema habitual de clases teóricas, resolución de problemas matemáticos a partir de esas teorías, el estudio de los libros de texto mencionados anteriormente, y la realización de experiencias que apuntan fundamentalmente a la comprobación de leyes enunciadas por los docentes o los libros de texto.

A. Interacciones entre imanes permanentes

La idea de estos experimentos sencillos consiste en probar experimentalmente afirmaciones que los alumnos repiten por haberla leído en los libros o revistas, o bien por haberlas escuchado en documentales de ciencia, revistas de divulgación, etc.

Elementos necesarios:

- Imanes.
- Objetos de diferentes metales (de diferentes características magnéticas: ferromagnéticos, paramagnéticos, diamagnéticos).
- Soporte universal.
- Brazo universal.
- Ovillo de hilo.

¿Cómo podemos ayudar a nuestros alumnos a construir fenomenológicamente la idea de que cuando el polo norte de un imán se enfrenta al polo sur del otro, ambos se atraen? ¿Y qué cuando lo hacen enfrentando sus polos sur (o bien sus polos norte) se repelen? La siguiente es una serie de actividades diseñada con ese propósito.

En primer lugar, propongo que realicen algunas actividades exploratorias, con el objetivo de identificar que existen regiones en los imanes donde sus propiedades de

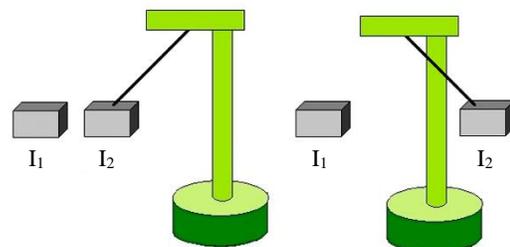


FIGURA 3. Esquema correspondiente al montaje de la experiencia A3.

atracción y/o repulsión se manifiestan con mayor intensidad. Conocemos estas regiones como *polos magnéticos*. Una vez identificadas estas regiones, procedemos de la siguiente manera:

Actividad 1 (A1): ¿Qué sucede cuando uno acerca un imán I_1 a un objeto metálico M que cuelga de un hilo, suspendido en el aire (Figura 2) ?

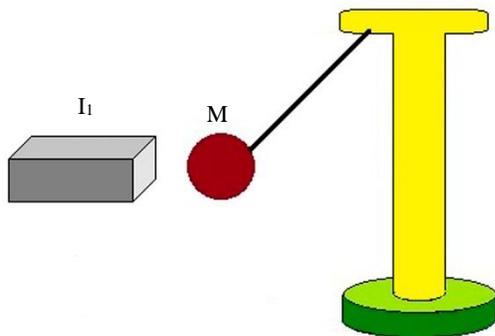


FIGURA 2. Esquema correspondiente al montaje de la actividad A1

Comentarios y sugerencias: En general, los alumnos esperan que un imán atraiga a los metales. Por lo que observar que un metal no es atraído por el imán (materiales no magnéticos), y mucho más, si es repelido (material diamagnético), los sorprenderá mucho.

De manera que es conveniente contar con objetos metálicos de sustancias tanto ferromagnéticas, diamagnéticas o paramagnéticas.

De todas maneras, les aclararemos a nuestros estudiantes que nos centraremos en estas primeras actividades con los objetos que son fuertemente atraídos por los imanes (o sea, los materiales ferromagnéticos), pero que discutiremos sucintamente que sucede con los otros materiales más adelante¹. El imán puede atraer, o no al objeto, inclusive puede llegar a repelerlo (podemos anticipar en este punto que posteriormente veremos con otras experiencias si afirmar las cosas de esta manera es correcto, o si en realidad el fenómeno es un poco más complejo).

Actividad 2 (A2): Si uno toma otro imán I_2 , y repite la prueba anterior, ¿podría haber diferencias con lo observado anteriormente? ¿Cuáles?

Comentarios y sugerencias: en líneas generales, se verificará que se repite lo observado en (A1), pero la intensidad de la interacción dependerá del imán

Actividad 3 (A3): Si se cuelga el imán I_1 de un hilo, y se le acerca I_2 , (Figura 3) ¿qué crees que sucederá ?

Comentarios y sugerencias: Dependiendo de cómo se los acerque, ambos imanes experimentarán una atracción o repulsión, según el caso.

Actividad 4 (A4): ¿Y si invierto los imanes (cuelgo I_2 del hilo y acerco I_1)? ¿Qué sucederá?

Actividad 5 (A5): Si repetimos las actividades anteriores con los objetos sin colgar de ningún soporte, y apoyados sobre una superficie horizontal, ¿Será lo mismo? ¿Porqué sí o porque no?

Comentarios y sugerencias: En este caso, la atracción o repulsión observada en las experiencias anteriores será menor que la observada en aquellas, debido a las fuerzas de roce. Inclusive, puede suceder que en determinadas circunstancias, los objetos que se movieron en las experiencias anteriores, no lo hagan en esta. Se invitará a los alumnos a discutir porque sucede esto, y se les pedirá que diseñen una experiencia en la que los objetos apoyados sobre la mesa se muevan.

No es difícil conseguir que los imanes no se muevan cuando, apoyados sobre una superficie horizontal, se los deja en libertad. Si colocamos ambos imanes muy cerca el uno del otro, se moverán (ya sea atrayéndose o repeliéndose). Pero basta con alejarlos uno del otro para que, a partir de una cierta distancia entre ambos, dejen de moverse cuando se los libera. Una alternativa es la hacer las experiencias sobre dos superficies lisas, una seca y la otra con una capa de aceite (haciéndola sobre esta última, después de haberse preguntado porque no se movían los objetos que antes sí lo hacían)

En principio, se supone que lo que se observa en las actividades anteriores forma parte del conocimiento general de los alumnos, pero los ítems que siguen deben ser llevados a cabo con más cuidado, prestando atención en especial a no ponerle nombre a los fenómenos y sus causas antes de realizar las experiencias, sino en sentido inverso.

Actividad 6 (A6): Es oportuno en este punto trabajar en grupos y darles a leer a cualquier referencia bibliográfica donde simplemente se enuncie la consabida frase “Polos iguales se repelen, polos iguales se atraen”.

Comentarios y sugerencias: La idea es plantearle al grupo el siguiente desafío: ¿Cómo podemos probar la veracidad de esa frase? ¿Cómo sé que no es al revés? ¿Qué experimento puedo diseñar para comprobarlo?

En mi experiencia, a veces los alumnos llegan a encontrar la forma de demostrar la validez de la afirmación a partir de experiencias como las que se describen en los párrafos de abajo. En otras ocasiones, dependiendo de las características del grupo, el docente tendrá que intervenir en mayor o menor medida para guiar la actividad, teniendo en claro la idea de no dar respuestas directas, sino ayudar a encontrarlas.

Para desarrollar una de las alternativas que podemos usar para demostrar la veracidad o no de la frase puesta a prueba, podemos servirnos de un tercer imán de referencia (I_R), en el que tendremos que identificar las dos regiones donde se concentra la interacción magnética. Marquemos una de esas

¹ Por razones de brevedad, no se incluyen en este trabajo este tipo de propuestas, que quedarán para un artículo posterior.

regiones con un símbolo (por ejemplo, una cruz) y la otra con otro diferente (un punto).

Tomando cada uno de los dos imanes I_1 e I_2 , busquemos cuál de los dos polos de estos imanes es repelido (o atraído) por uno de los polos de I_R (para fijar ideas, el marcado con un punto). Identifiquemos estos polos con letras, para fijar ideas, A en el caso de que sea atraído y B si es repelido

Podemos verificar que cuando acercamos I_1 e I_2 con su polo B al polo de I_R marcado con un punto, sufren la interacción opuesta que la que sufren los polos marcados por A.

Finalmente, ¿qué sucede si acercamos I_1 e I_2 con polos rotulados por letras iguales? ¿qué sucede si enfrentamos I_1 e I_2 enfrentados por polos rotulados por letras distintas?

La conclusión a la que debería arribar el grupo es que imanes enfrentados por polos opuestos se atraen y si se los enfrenta por polos iguales, se repelen. Pero nótese que todavía no hemos hablado de polos norte o sur. Recién ahora es conveniente introducir esa discusión.

Identificación de los polos del imán como Norte o Sur

Actividad 7 (A7): Explica el funcionamiento de una brújula.

Comentarios y sugerencias: Es importante alentar a los estudiantes a que expliquen cuál es la razón por la que una brújula queda siempre orientada en una determinada dirección. Si los estudiantes contestan “porque queda orientada por la acción del campo magnético de la Tierra” se les pedirá que expliquen con más claridad que quiere decir esa frase, y que es eso que llaman campo magnético de la Tierra, que tiene la propiedad de hacer mover la aguja de la brújula y que la misma quede orientada en una determinada dirección.

Actividad 8 (A8): ¿Qué sucede si acercamos la brújula a un clip o un clavo liviano de acero o hierro? ¿Y si la ubicamos cerca de limaduras de hierro? ¿Cómo explicas lo que ocurre?

Comentarios y sugerencias: Se observa que la brújula atrae o mueve estos objetos, al igual que lo hace un imán. El objetivo de esta experiencia es mostrar que la brújula es un pequeño imán.

En este punto, es interesante realizar un recorrido histórico acerca de la historia de los imanes y su uso en la construcción de brújulas, para que quede claro que en el fondo, una brújula no es otra cosa que un imán montado sobre un mecanismo con poco rozamiento, de manera que pueda reaccionar fácilmente cuando se lo coloca en una región donde existe un campo magnético, orientándose en la dirección de las líneas de campo.

Actividad 9 (A9): ¿Qué sucede con la brújula si la ubicamos en diferentes posiciones cerca de un imán? ¿Por

qué? ¿Tiene algo que ver con alguna de las actividades anteriores?

Comentarios y sugerencias: Aprovecharemos esta experiencia para introducir el concepto de *línea de campo magnético*. La brújula se orienta siguiendo las líneas del campo magnético del imán, porque justamente ella en sí mismo es un imán (un dipolo magnético).

Actividad 10 (A10): Cuando alejas una brújula de la influencia del campo magnético de cualquier imán, ¿qué sucede con ella? ¿esto depende de la brújula que uses, o es algo común a todas las brújulas? ¿cómo interpretas este hecho? Discute esto en función de lo que viste que sucedía cuando colocabas un imán a una cierta distancia de otro.

Comentarios y sugerencias: Todas las brújulas que podamos usar quedan orientadas aproximadamente en la dirección Norte-Sur. Esto significa que la tierra posee un campo magnético, que determina la dirección en la que queda alineada la brújula².

Actividad 11 (A11): Pensando en el último experimento, ¿se te ocurre alguna razón por la que los polos de la brújula puedan haber sido llamados norte o sur?

Comentarios y sugerencias: La razón es que el polo de la brújula que quedó apuntando aproximadamente hacia el norte geográfico se denominó norte y el opuesto, por la misma razón, sur.

Actividad 12 (A12): Combinando las actividades que hemos hecho, ¿Qué te está indicando lo discutido en el punto anterior acerca de la ubicación de los polos magnéticos de la Tierra?

Comentarios y sugerencias: Qué el Polo Norte geográfico se encuentra relativamente cerca del Polo Sur magnético (ya que este el polo que atrae al polo norte de la brújula) y viceversa.

Actividad 13 (A13): Las actividades que acabamos de hacer, ¿nos permiten identificar los polos norte y sur de un imán? ¿De qué manera?

Comentarios y sugerencias: Con la ayuda de una brújula, y recordando que polos iguales se repelen y polos distintos se atraen, se toma uno de los imanes de las primeras actividades (I_1 , I_2 ó I_R) y se identifican sus polos norte y sur.

B. Las interacciones a distancia y el concepto de campo: interacciones entre imanes y objetos de materiales magnetizables.

Cuando se intenta explicar sin una construcción fenomenológica la idea de que la razón por la que un imán atrae a un objeto de hierro, simplemente afirmando que el imán magnetiza el hierro y que por lo tanto, lo que está sucediendo es que se produce a partir de ese fenómeno una atracción entre imanes, es posible que nuestros alumnos

² Es importante que el campo magnético de las brújulas con las que se trabaja no sea muy intenso, de manera que se minimice lo más que se pueda la influencia de campos magnéticos inducidos por este campo magnético

en objetos ferromagnéticos cercanos a la zona donde se realizan las experiencias propuestas.

digan que sí con la cabeza, y hasta puedan repetir la explicación, incluso aplicándola a otros fenómenos.

Bastante más complejo es que añadamos a esta explicación primaria la razón física de la magnetización del objeto en términos de dominios magnéticos, o comparando el movimiento de los electrones en los átomos con el de pequeñas corrientes que producen campos magnéticos. En cursos universitarios, hasta podemos hablar de torques actuando sobre el momento orbital de los electrones, el spin, las órbitas de los electrones, etc., etc.

Desde el punto de vista del convencimiento profundo y de la generación de nuevos modelos sobre el fenómeno que se está estudiando, estas explicaciones pueden aportar bastante poco a nuestros estudiantes. Es posible que las puedan repetir mecánicamente, y hasta que estén convencidos de que las entienden, pero en cuanto uno pregunta cómo se muestra experimentalmente que lo que está sucediendo es una interacción entre imanes, uno permanente y el otro inducido, es muy probable que lo que la respuesta que se obtenga sea el silencio.

Las razones de este silencio pueden ser variadas. De hecho, puede ocurrir que algunos alumnos hayan construido un cierto nivel de conocimiento del tema (incluso que lo entiendan bastante bien), pero simplemente no se les ocurre como demostrar experimentalmente esos conocimientos o como elaborar una hipótesis, un modelo, y diseñar experimentos para comprobarlos. Es muy probable que se este tipo de situaciones sea habitual en aquellos alumnos (e incluso profesionales) que hayan recibido una formación en estos temas en cursos tradicionales. Pero, como bien se reflexiona en el artículo de Meneses Villagrà y Caballero Sahelices [13]:

*“Consideramos muy preocupante que un alumno, ya universitario, sea incapaz de realizar un posible diseño sobre cualquier cuestión que se le proponga. **Este hecho pone en evidencia la escasa importancia que se atribuye a este aspecto clave en toda investigación científica.** No se pretende que describan correctamente lo que ocurre en los experimentos sino que confeccionen diseños sencillos y susceptibles de ser realizados en el aula o laboratorio.*

Uno de nuestros objetivos de la asignatura consiste precisamente en potenciar una verdadera aplicación de la metodología científica, en donde aspectos claves y escasamente tenidos en cuenta como la emisión de hipótesis, planificación de diseños experimentales, confección de informes, etc. sean considerados en su justa medida”.

Si bien este aspecto de la formación en ciencias puede resultar particularmente difícil para nuestros alumnos, es sumamente importante generar situaciones áulicas como las que propongo en este trabajo, donde los estudiantes aprendan a desarrollar esta metodología propia de la actividad científica. El aprendizaje de estas habilidades requiere de una participación muy activa de los docentes, procurando en sus alumnos un aprendizaje espiralado de las mismas, en las que seguramente los docentes tendrán un papel más protagonista al principio del curso, pero sabiendo que deberán conducir un proceso de enseñanza-aprendizaje

que permita a los estudiantes ir logrando paulatinamente un mayor grado de autonomía en el proceso.

Es muy importante que el docente reflexione sobre este tipo de cuestiones y que se pregunte permanentemente cómo evitar caer en la tentación y el facilismo de dar las respuestas correctas, evitando a los estudiantes el necesario proceso de construir conocimiento por ellos mismos. Si bien una de las formas en las que aprendemos física es mirando las cosas que hacen los expertos, es necesario en todo momento buscar los elementos que puedan inducir procesos autónomos de construcción del conocimiento.

Además de lo señalado, me parece de suma importancia recurrir a la historia de la ciencia como fuente de estudio en el proceso de desarrollo del aspecto empírico de la ciencia. Por mencionar solamente uno de los recursos bibliográficos altamente recomendables, podemos señalar los excelentes libros de Hecht [16] y Cassidy *et al* [17]. Asimismo, hoy en día existe una enorme cantidad de recursos muy valiosos para la actividad docente desarrollados por una gran cantidad de colegas, que se pueden encontrar en Internet, en particular, en Youtube.

A continuación, propongo una serie de actividades dirigida a modelar el fenómeno de la atracción entre imanes y objetos magnetizables, a partir de experiencias sencillas.

Actividad 14 (A14): ¿Qué sucede si, habiendo colocado un imán en la cercanía de una brújula, colocas otro imán también en la misma región, en diferentes ubicaciones?

Discute con tus compañeros que se observará en la experiencia, justificando tus respuestas. Una vez hecho esto, comprueba experimentalmente la validez de las diferentes respuestas que se propusieron.

Comentarios y sugerencias: Para desarrollar esta actividad, propongo la siguiente metodología de trabajo:

- Cada alumno deberá escribir sus respuestas en papel para la primera pregunta que se propone sin consultar a nadie.
- Una vez hecho esto, se forman grupos, donde cada integrante del grupo expondrá a sus compañeros sus respuestas, se debatirán los argumentos de cada uno, y el grupo tratará de llegar a alguna respuesta en común, tratando de modelar lo mejor posible el fenómeno sin haber hecho el experimento, a partir de los conocimientos previos de los estudiantes. Si no sucediera esto, se aceptarán todas las respuestas que hayan quedado en pie luego del debate. El docente debe quedar al margen de esta etapa de discusión, y los alumnos tienen que llegar a un modelo usando únicamente sus ideas sobre el tema, sin usar ninguna fuente bibliográfica, ni tener acceso a internet.
- Se hará una puesta en común de todos los grupos coordinada por el docente. Se evaluarán las fortalezas y debilidades de todos los modelos y resultados propuestos para la experiencia. Cada grupo deberá anotar todo lo que se derive de esta discusión.
- Una vez finalizado el punto (c), el docente repartirá a cada grupo textos seleccionados sobre el campo magnético de los imanes permanentes, con figuras que muestren las líneas de campo. Cada grupo leerá el material, y a partir de esta lectura, analizará los modelos propuestos en el punto

anterior, y deberá elegir cuál es el mejor modelo que se ha propuesto, justificando la respuesta.

(e) Solamente después de haber terminado con los puntos anteriores, los alumnos realizarán la experiencia para comprobar sus hipótesis. A la luz de la experiencia, comprobarán la validez de la misma, y si lo que observan es diferente de lo esperado, deberán volver a reevaluar el o los modelos propuestos, para obtener uno que describa mejor lo que se observa en la experiencia.

(f) Se hará una puesta en común, coordinada por el docente, donde cada grupo expondrá sus conclusiones, y las someterá a la opinión del resto de los participantes. El docente solamente intervendrá para orientar la discusión.

(g) Cuando se haya terminado con el punto (f), si no se hubiera arribado a la predicción y modelo correcto, el docente mostrará la solución correcta al problema: *la brújula es un imán, que se orienta en todos los casos en la dirección definida por la suma del campo magnético total en cada uno de los puntos donde se coloca. Este campo magnético es la suma de los campos magnéticos de cada imán en el punto dado.*

Para las siguientes actividades, sugerimos trabajar con la misma metodología que en la Actividad 14.

Actividad 15 (A15): Si en lugar de un segundo imán colocas un clavo de hierro en los mismos puntos de la actividad anterior, sin tocar la brújula ¿qué crees que sucederá?

Comentarios y sugerencias: *El clavo de hierro se magnetiza, por estar ubicado en el campo magnético del imán, transformándose el mismo en un imán, por lo que deberían repetirse las conclusiones de la actividad A14.*

Actividad 16 (A16): Si se retira el imán de las cercanías de la brújula, pero se deja el clavo en cada una de las posiciones de las dos actividades anteriores, ¿qué sucederá?

Comentarios y sugerencias: *La brújula se orienta en la dirección del campo magnético terrestre, porque ante la ausencia de campo magnético externo, el clavo se desmagnetiza³.*

Actividad 17 (A17): ¿Y si el clavo fuera de acero?

Comentarios y sugerencias: Para realizar esta actividad, se deberá recurrir a un clavo de un acero tal que, una vez magnetizado, retenga parte de esa magnetización en ausencia de un campo magnético externo⁴. Al retener algo del magnetismo inducido, la brújula se orientará en la dirección del campo magnético total, dado por la suma del campo magnético terrestre y el campo magnético del clavo.

C. Una actividad con sentido doble: diferenciar intensidad de campo y fuerzas magnéticas y comprobar

³ Si bien uno podría argumentar que el campo magnético terrestre podría magnetizar el clavo, la intensidad de dicho campo es pequeña y no produce efectos mensurables a efectos de las actividades que se proponen en este trabajo.

la validez de la tercera ley de Newton aplicada a fenómenos magnéticos.

Cuando un imán atrae a un objeto de un material magnetizable, es habitual que los estudiantes expliquen este fenómeno en los términos que han sido descriptos en la sección dedicada a las ideas previas sobre estos fenómenos. En particular, es habitual que, dependiendo del grado de desarrollo que tengan acerca de la naturaleza de las interacciones magnéticas.

- Piensen que el imán atrae al objeto, pero no al revés.
- La fuerza con la que el imán atrae al objeto, es mayor que la fuerza con la que el objeto atrae al imán.
- Confundan la intensidad de la fuerza magnética con la intensidad de campo magnético.

La siguiente es una serie de actividades pensadas para poner en tela de juicio estas concepciones alternativas y ayudar a construir otras más cercanas a las teorías aceptadas por la comunidad científica. Se puede trabajar con la metodología descrita en la sección anterior o directamente en grupos, con la asistencia del docente como orientador de las actividades. En cualquiera de los casos, es fundamental que los alumnos respondan a las preguntas antes de hacer las actividades, justificando en todos los casos las respuestas, en función de (de los) modelo(s) a los que hayan arribado en las actividades anteriores.

Para las dos siguientes actividades, se necesitan los siguientes materiales:

- un grupo de imanes (en lo posible, potentes, por ejemplo, como los de óxidos de tierras raras).
- Un bloque de madera de forma prismática rectangular.
- Un clavo de acero o hierro.
- Una tabla de madera lisa.

Actividad 18 (A18): Si uno coloca un imán y un clavo cerca el uno del otro, apoyados sobre la tabla y los deja en libertad ¿qué sucederá?

Comentarios y sugerencias: Es importante que en esta etapa del trabajo la masa del clavo sea bastante menor que la del imán, en vistas a que comparen los resultados cualitativos de esta actividad con las observaciones que hagan en la actividad siguiente.

⁴ Por ejemplo, consultar “*Materiales Magnéticos*”, de Juan C. Fernández, Apuntes de cátedra, Curso regular de Electromagnetismo B. Ingeniería en Electrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires.

Disponibles en <http://materias.fi.uba.ar/6209/download/4-Materiales%20Magneticos.pdf>

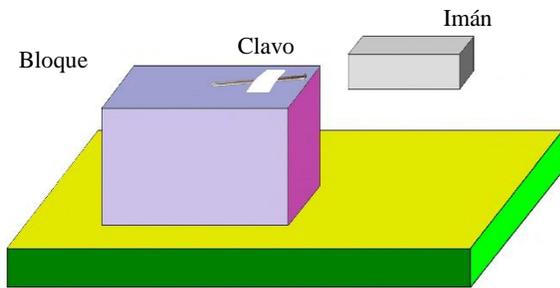


FIGURA 4. Esquema correspondiente al montaje de la experiencia A19.

Actividad 19 (A19): Si ahora sujeto el clavo sobre la parte superior de un bloque de madera, acerco el imán al conjunto bloque-clavo, colocándolo a la misma distancia a la que estaba en la Actividad 18, y vuelvo a dejarlos en libertad (Figura 4) ¿Qué crees que sucederá? En particular, ¿ocurrirá lo mismo que en la experiencia anterior o crees que se observarán cosas diferentes?

Justifica tus respuestas teniendo en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo.

Comentarios y sugerencias: Esta experiencia es bastante compleja, y conviene dedicarle bastante tiempo. Las fuerzas de atracción de origen magnético serán iguales en este caso, pero la fuerza de roce que actúa entre la mesa y el bloque es claramente mayor que la que había entre el clavo y la mesa, pero a su vez, la masa también es diferente. Por lo tanto, no es una experiencia que se pueda comparar directamente con la anterior. El motivo de ponerla en este lugar de la secuencia es justamente mostrar a los alumnos el cuidado que hay que tener al diseñar experiencias científicas para llegar a conclusiones válidas.

Un aspecto importante en esta experiencia, es mostrar a los estudiantes la importancia del control de variables en las experiencias científicas, para sacar conclusiones válidas. Por un lado, el aumento de la masa del sistema clavo-bloque produce modificaciones respecto a lo que se observa en la actividad 18, produciendo una disminución en la aceleración del sistema, pero también aumenta la fuerza de roce (se puede medir con un dinamómetro, por ejemplo), hecho que opera en la misma dirección que el aumento de masa. Por lo tanto, no tenemos forma de saber cuanto influye cada factor en la disminución de la aceleración.

Independientemente de esto, se observa un efecto importante: si la masa del bloque es lo suficientemente importante, se moverán tanto el imán como el sistema clavo-bloque, poniendo en tela de juicio la idea de que es el imán el que atrae al clavo, mostrando que en realidad ambos se atraen entre sí. No obstante esto, dependiendo de las variables en juego, lo que se observa puede inducir a los alumnos a seguir creyendo que el imán atrae al objeto con una fuerza mayor que la fuerza con la que el objeto atrae al imán.

En este momento, es oportuno recordar la tercera ley de Newton y preguntarles si creen que se cumplirá en este

caso o no, y por qué. Luego de escuchar las argumentaciones sin intervenir, sugiero proponerles la actividad 20 y a continuación, la 21. Para llevarlas a cabo, se necesitan los siguientes elementos:

- Un grupo de imanes (en lo posible, potentes, como los de óxidos de tierras raras);
- Dos bloques iguales de madera, de forma prismática rectangular, con al menos una de sus superficies bien pulidas;
- Plastilina,
- Un clavo de acero o hierro;
- Una tabla de madera lisa,
- Una balanza electrónica de precisión 0,1 mg.

Actividad 20 (A20): “Bueno...hemos escuchado diferentes ideas. Supongan que acordamos en que efectivamente se cumple en este caso la tercera ley de Newton, y tienen que proponer una experiencia para convencer a alguien de que, efectivamente, tenemos razón. ¿Qué experiencia propondrían?”

Comentarios y sugerencias: Sin recurrir a instrumentos de medición que nos permitan determinar tiempos, velocidades y aceleraciones, uno puede recurrir a la segunda ley de Newton para diseñar una experiencia que nos permita comprobar en este caso el cumplimiento de la tercera. Como lo que determina la aceleración de cada cuerpo es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre ellos y sus masas, tenemos que asegurarnos de que ambas cosas sean iguales en todo momento de su recorrido, y de esta manera, se moverán exactamente igual, chocando en el punto medio del segmento que une los puntos de partida.

Así, tomando como hipótesis que es válida la tercera ley de Newton, la fuerza magnética que ejerce el imán sobre el clavo es en todo punto del recorrido, la misma que la que ejerce el clavo sobre el imán. Debemos asegurarnos que la fuerza de roce sea la misma para ambos objetos.

Para ello, debemos montar imán y clavo sobre bloques iguales en forma y dimensiones, del mismo material, y que tengan una superficie igual de pulida. Si hay diferencia de masa entre el imán el clavo, se agrega plastilina en el bloque que corresponda para igualar las masas, ya que la fuerza de roce depende de la normal, y está, a su vez, depende de las masas. Este hecho, además, nos garantiza que las masas son iguales.

Una vez hecho esto, se hace la experiencia, que debe resultar en el resultado esperado. La conclusión es que *imán y clavo se atraen con la misma fuerza, independientemente del hecho de que es el imán el que induce la magnetización en el clavo.*

Actividad 21: ¿Qué sucedería si agrego más masa al sistema bloque-clavo?

Comentarios y sugerencias: Nuevamente, se discute lo que puede llegar a ocurrir en la experiencia, donde cada resultado predicho deberá ser justificado. Al hacer la experiencia, el sistema Bloque-Imán y el sistema Bloque-Clavo chocarán en un punto más cercano al punto de partida de este último.

VI. CONCLUSIONES

Una de las características más importante que deben poseer procesos de enseñanza-aprendizaje de Física de carácter constructivista de nivel universitario, es el de ser congruentes con el aspecto empírico de la ciencia, brindando a los estudiantes que toman cursos de nivel introductorio la posibilidad de construir el conocimiento en un campo como el del magnetismo, a partir de experiencias sencillas, que permitan la construcción de modelos con anclaje fuertemente fenomenológico, donde se llegue a definir la terminología apropiada para describir y explicar los fenómenos físicos a partir de las experiencias, y no al revés.

Propuestas didácticas como la que se ha presentado en este trabajo son una de tantas las posibles alternativas para desarrollar este tipo de procesos formativos, tan necesarios para una sólida formación científica de base en los estudiantes universitarios.

Es muy importante que los docentes que tengan a cargo cursos introductorios de física a nivel universitario (no solamente en el campo del magnetismo, sino en cualquier campo de la física) se comprometan con el desarrollo de propuestas de este tipo, aunque naturalmente, las mismas requieren de un gran compromiso de los docentes.

Sin embargo, el nivel que han alcanzado hoy en día los aportes de la investigación en la didáctica de las ciencias naturales, en particular en lo que hace al conocimiento de las concepciones alternativas de los alumnos, así como el estudio de la enseñanza por modelos (por mencionar los dos campos de la didáctica de las ciencias que me parecieron más significativos para construir esta propuesta), y el conocimiento de la historia de la Física, brinda elementos muy valiosos que sin duda alguna son de inestimable ayuda para la tarea docente en los tiempos que corren, y las exigencias que nos plantean como formadores.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Omar G. Benvenuto, por la lectura cuidadosa del trabajo y sus sugerencias para mejorarlo.

A mis alumnos, sin cuyo aporte este trabajo hubiera sido imposible. En particular, a los alumnos de los Profesorados de Física y de Química, que han cursado durante los años 2010 y 2011 el Taller de Práctica Docente en la Enseñanza de las Ciencias Experimentales, materia que está a mi cargo en la Universidad Nacional de Río Negro (en la que se implementaron la mayoría de las propuestas que presento en este trabajo), por desafiarme a mejorar continuamente mi práctica docente.

REFERENCIAS

- [1] Alonso, M. y Finn, E.J., *Física: Volumen II. Campos y Ondas*. (Addison Wesley Iberoamericana, México, 1987).
- [2] Halliday, D., Resnick, R. y Krane, K.S., *Física 2*. (Compañía Editorial Continental, México, 1996).
- [3] Sears, F.W., Semansky, M.W., Young, H.D.; y Freedman, R., *Física universitaria con física moderna*. (Addison Wesley Iberoamericana, México, 2005).
- [4] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*. (John Wiley & Sons, New York, 1998).
- [5] Panofsky, W. y Phillips, M., *Classical electricity and magnetism*. 2da. Edición. (Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1962).
- [6] Greca, I. M. y Moreira, M. A., *Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo*, Enseñanza de las Ciencias **16**, 289-303 (1998).
- [7] Gellon, G.; Rosenvasser Feher, E.; Furman, M. y Golombek, D., *La ciencia en el aula. Lo que nos dice la ciencia sobre cómo enseñarla. Capítulo 1: El aspecto empírico de la ciencia*. (Paidós, Buenos Aires, 2005).
- [8] Morrison, M. y Morgan, M. S., *Models as mediating instruments*, en *Models as mediators*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [9] Galagovsky, L. y Adúriz-Bravo, A., *Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales. El concepto de modelo didáctico analógico*, Enseñanza de las ciencias **19**, 231-242 (2001).
- [10] Justi, R., *La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos*, Enseñanza de las Ciencias **24**, 173-184 (2006).
- [11] Johnson-Laird, P., *Mental models*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).
- [12] Guisasola, J., Almudí, J.M. y Zubimendi, J.L., *Dificultades de aprendizaje de los estudiantes universitarios en la teoría del campo magnético y elección de los objetivos de enseñanza*, Enseñanza de las Ciencias **21**, 79-94 (2003).
- [13] Meneses Villagrà, J. A. y Caballero Sahelices, M. C., *Secuencia de enseñanza sobre el electromagnetismo*, Enseñanza de las Ciencias **13**, 36-45 (1995).
- [14] Guisasola, J., Almudí, J.M. y Ceberio, M., *Concepciones alternativas sobre el campo magnético estacionario. Selección de cuestiones realizadas para su detección*. Enseñanza de las Ciencias **21**, 281-293, (2003).
- [15] Guisasola, J., Almudí, J. M.; Zubimendi, J. L. y Zuka, K., *Campo Magnético: diseño y evaluación de estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje como investigación orientada*, Enseñanza de las Ciencias **25**, 303-320 (2005).
- [16] Hecht, E., *Física en Perspectiva*. (Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., México, 1987).
- [17] Cassidy, D., Holton, G. and Rutherford, J., *Understanding physics*. (Springer Verlag, Nueva York, 2002).

Una alternativa de comunicación educativa, empleando nuevas técnicas en el proceso enseñanza-aprendizaje en las asignaturas de Física y Matemática en la enseñanza semipresencial de la carrera de Informática



**J. F. Valiente-Márquez¹, T. R Ruiz-González², J. J. Llovera-González³,
M. T Hernández –Valmaña³**

¹Instituto de Información Científica y Tecnológica, IDICT, Capitolio Nacional.

¹Centro Universitario Municipal, CUM 10 de Octubre del Departamento de Física, ISPJAE, calle 114 No.11901 entre 119 y 127, CP 10400, La Habana, Cuba.

²Centro Universitario Municipal, CUM 10 de Octubre, ISPJAE, calle 114 No.11901 entre 119 y 127, CP 10400, La Habana, Cuba

³Departamento de Física, ISPJAE, calle 114 No.11901 entre 119 y 127, CP 10400 La Habana, Cuba.

E-mail: valiente@idict.cu

(Recibido el 24 Febrero 2014, aceptado el 30 de Junio de 2014)

Resumen

Se presenta una experiencia relacionada con la enseñanza de la física en un proceso docente semipresencial. Se sugiere hacer un reajuste de los objetivos y del contenido de un tema de la asignatura física basándonos en conceptos de la didáctica en la educación superior, en este caso usando dos técnicas fundamentales que son: 1) La comunicación educativa en su expresión más amplia. 2) La reestructuración del contenido por invariantes utilizando el Transformador Lógico Didáctico de reestructuración, con el objetivo de hacerle más comunicativa y amena las clases al estudiante y por ende implicarlo a motivarse por el estudio de las Matemáticas y la Física, como asignaturas básicas de la carrera de ingeniería informática.

Palabras clave: Enseñanza semipresencial, Comunicación educativa, Transformador Lógico Didáctico.

Abstract

An experience in physics teaching in a partially presential educational process is presented, and we suggest making a readjustment of the objectives of the contents of a theme of the subject physics, we are basing on the educational concepts in the upper education, and in this case we use two fundamental techniques, here you are: 1) The educative communication in its most wide expression. 2) The Logical and Didactical Transformer, with the objective of making more communicative and pleasant the class to the student and, of course, to involve them to motivate them to the Mathematics and Physics study, as like as the basic subjects of the informatic engineering carrier.

Keywords: Semipresential teaching, Educative communication, Didactic logic Transformer.

PACS: 01.40.gb, 01.40.gf, 01.40.Ha

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Es bien conocida la gran importancia del estudio de las ciencias exactas, en particular la física y la matemática, como asignaturas básicas en la formación académica de los estudiantes en las carreras de ciencias naturales e ingeniería, sobre todo porque las mismas crean y desarrollan en lo cognitivo el pensamiento lógico y una secuencia de procedimientos mentales necesarios para el enfrentamiento y obtención de una posible solución a un problema concreto de la vida cotidiana y por ende su aprendizaje debe estar orientado a desarrollar en el estudiante capacidades y habilidades de manera que no aprecie a la Física y a la Matemática aisladas

sino como herramientas que se complementan ante determinado problema a resolver.

El modelo semipresencial tiene un reto importante.

Para continuar avanzando en el perfeccionamiento de la labor educativa en todas nuestras universidades. Ello implica hacer un buen uso de los recursos didácticos.

El aspecto central de la vida universitaria, el objetivo supremo por el que se trabaja, lo constituye la formación de una cultura general integral [1].

Para la enseñanza de la física resulta interesante preguntarse cuáles son las representaciones internas que los alumnos tienen. Tanto las que corresponden a los conceptos «intuitivos» como las que construyen a partir de los conceptos

enseñados en el aula para poder entender cuál es el proceso de construcción y el cambio de esas representaciones [2].

Para el mismo juega un papel fundamental la comunicación educativa como uno de los elementos importantes en este proceso. Ello implica hacer un buen uso de los recursos didácticos.

En este proceso se hace importante la comunicación educativa en este caso se emplea mucho en los laboratorios virtuales es decir, estamos en presencia de una revolución sociocultural con base en la ciencia y la tecnología y de una relación muy estrecha entre ambas. Esto hace que la informática, así como los métodos y formas de trabajo de la ciencia y la tecnología hayan pasado a formar parte de la vida de las personas y por ende a que sus fundamentos sean interiorizadas por ellos. Esto exige que las asignaturas que lo permitan introduzcan informática y aproximen sus métodos de estudio a la forma como se trabaja en las ciencias [3].

La manera del docente a impartir clase es importante en el enfoque liberador porque determina en gran medida que el conocimiento, la aptitud del alumno que debe aprender libere su mente a través de las nuevas maneras de enseñanza aplicadas a técnicas de comunicación [4].

Hay algunas condiciones específicas que permiten hablar ya de comunicación educativa principalmente o como elemento desencadenante: el avance tecnológico aplicado a los instrumentos de comunicación. Se podría decir que un avance tecnológico muy importante fue la escritura aplicada a piedras y sobre todo a papiro (en cualesquiera de sus formas) por más rudimentario que parezca. Sin embargo, esta tecnología no era de uso masivo, es decir, no se producía ni exhibía para el conjunto del grupo social en cuestión, sino que era producida para una cierta élite con conocimientos y funciones sociales especializadas, como por ejemplo los sacerdotes, chamanes, brujos, sabios, etc. Es decir, era para aquellos sobre quienes recaía la función de mantener (producir y/o reproducir) las tradiciones, costumbres y explicaciones que daban sentido a la vida comunitaria [4].

En el proceso de enculturización de un individuo (en una relación intragrupal) o grupo (en una relación intergrupal) se pone en relación: lo que pasa (sucesos), los fines y las creencias que los grupos sociales quieren preservar. Cuando a un grupo (por ejemplo escolar) no sólo se le dice lo que ha pasado en el entorno y cómo está éste último, sino que además se le proporcionan ciertos parámetros para que los pueda interpretar o intervenir, y ese grupo (escolar) los interioriza y los adopta como suyos, se puede decir que ha sido enculturizado.

En el sistema comunicación, la interacción es el elemento que coordina el comportamiento dirigido a lograr los fines, pero es expresión de las relaciones sociales, es con relación al sujeto. En la actividad vital del hombre éste realiza además de un intercambio de acciones objetales, un intercambio de acciones comunicativas [6].

La comunicación es una palabra de origen latino (*communicare*) que quiere decir compartir o hacer común.

Se considera una categoría polisemántica en tanto su utilización no es exclusiva de una ciencia social en particular, teniendo connotaciones propias de la ciencia social de que se

trate, donde los autores se refieren a ella desde el punto de vista filosófico.

La condición humana está asociada indisolublemente a la comunicación como forma de relación entre los hombres, aquí se refiere al vínculo importante entre los hombres en su actividad creativa y hace referencias sobre estudios realizados en las dos últimas décadas [7].

En la comunicación pone a la exposición oral al estudiante, es decir, el mismo tiene que verbalizar y justificar su solución, a la vez que permite poner en evidencia los conocimientos previos con sus aciertos y errores. En la discusión plenaria de las soluciones presentadas por los estudiantes, se da importancia a la función del profesor de tender un puente cognitivo entre lo que el alumno ya sabe y a lo que necesita saber antes de aprender significativamente la tarea en cuestión. En esta función cobran gran importancia las explicaciones del profesor, permitiendo que los estudiantes refuercen todos los lazos y relaciones conceptuales tendidos, entre los conocimientos anteriores y el material de aprendizaje [8].

El trabajo en los pequeños grupos se asienta en los principios del aprendizaje cooperativo, que afirma que el estudiante aprende mejor, no sólo conceptos sino habilidades y valores sociales (ayuda mutua, tolerancia, disposición al diálogo), cuando lo hace cooperando con los compañeros de clase.

Se sigue trabajando el contenido desde otras perspectivas, como el análisis de situaciones simuladas en PC; que están destinadas a profundizar los temas, a incentivar y propiciar el estudio independiente y el autoaprendizaje permanente. En todo momento, para las actividades de estudio independiente u otras tareas de aprendizaje que el estudiante requiera, están pautadas horas de consulta con los docentes de la cátedra, que actúan de orientadores para el aprendizaje [8]. Consideramos este método muy útil y es por eso que lo he citado.

A. La comunicación didáctica

En la comunicación educativa juega un papel fundamental como recurso las TIC, aunque no abundaremos mucho en ella, es por esto que algunos autores se refieren a ella y plantean que una guía para asistir a los educadores de docentes, administradores y aquellos responsables de trazar las políticas educativas, a incorporar el uso de las TIC en la formación docente. Los recursos que aquí se presentan fueron desarrollados por un grupo internacional de expertos con amplia experiencia en la integración de las TIC a la formación docente [9].

Estas tecnologías de la información y la comunicación han provocado un cambio cultural y social en las formas tradicionales de comunicarnos entre los seres humanos, y en los canales para transmitir el conocimiento. Las redes telemáticas, la televisión satelital, Internet y la realidad virtual modifican los procesos de comunicación y de adquisición del saber creando canales de difusión que ofrecen nuevas posibilidades para una democratización del acceso a la formación. Así, hablamos del pasaje de una sociedad de la información a una sociedad del conocimiento [10].

Antes de ello, veamos cuáles son las CARACTERÍSTICAS DISTINTIVAS de la comunicación didáctica, y que no están en otros tipos de comunicación:

- 1) Está institucionalizada: la escuela como institución define cómo es la comunicación, como deben hacerse las interacciones e intercambios, etc.
- 2) Es intencional: Esta característica se expresa y concretiza mediante el currículum, porque este define la línea de influencia en la acción de enseñar del profesor, los materiales didácticos y las condiciones ambientales. Como tal expresa intenciones explícitas pero también intenciones implícitas. Hay intenciones académicas al enseñar ciertos contenidos, pero también se enseñan formas de disciplina y organización de la vida en el aula, etc., y, en general, intenciones por transmitir determinadas ideologías.
- 3) Es forzada u obligada: no presupone una participación espontánea y voluntaria, pero incluye siempre algún grado de imposición.
- 4) Es grupal: con lo cual la comunicación no es lineal (de docente a alumno) sino que muchos se comunican con muchos (alumnos entre sí, alumnos con docentes, etc.). Y esto es muy importante para el propio desarrollo cognitivo del que aprende y porque no también del educando.

B. Elementos de la comunicación didáctica

La fuente de información: Las dos principales son el currículum y el profesor. El currículum provee información al profesor, y éste a los alumnos. A su vez, en la determinación del currículum interviene la comunidad social. Y por ende no dejar de mencionar la actualidad que deben tener algunos temas que son tratados en los sistemas curriculares.

El profesor no informa tal cual lo que prescribe el currículum, tiene un cierto margen de libertad para dotar de significados concretos a los contenidos curriculares, más bien abiertos y abstractos. Los mensajes didácticos: En la orquestación de la vida del aula, el profesor pone en juego además del conocimiento académico, mensajes acerca de las actividades a realizar por los alumnos y mensajes sobre las formas adecuadas de participación en el momento oportuno. Para estos dos últimos se usan vías analógicas y metacomunicacionales.

El destinatario: Es el alumno, quien, al aprender, interactúa con el profesor negociando significados. Cada alumno interviene en este proceso según su historia personal, por lo que cada uno traerá cosas diferentes a la lección.

El contexto: Está el contexto interno del aula y el contexto institucional, que engloba al primero y lo condiciona. Las clases, el contexto interno son ambientes comunicativos diferenciados, o sea, tienen reglas propias acerca de cómo y cuándo participar. Las aulas se pueden definir como ambientes donde profesores y alumnos desarrollan significados compartidos para las actividades, con lo cual los procesos de enseñanza-aprendizaje son evolutivos. Este contexto interno está influido por el institucional al imponerle una forma de organizar el espacio, el tiempo, las relaciones personales, un currículum y muchos de los mensajes. La institución escolar es a su vez, un subsistema dentro del sistema social.

C. Los niveles de la comunicación didáctica

- 1) El nivel intrapersonal: Nivel donde ocurre el procesamiento interno de los significados por parte de los sujetos. Aquí las señales se transforman en unidades significativas y son elaboradas cognitivamente generando luego respuestas (conductas).
- 2) El nivel interpersonal: Se define por los intercambios que realizan los individuos y por las relaciones mutuas que establecen. Debe lograrse aquí una sintonía entre sujetos que no se han elegido entre sí. En este nivel aparecen los niveles de contenido y de relaciones (simétricas o complementarias).
- 3) El nivel organizacional: La comunicación se produce en el contexto de una institución más amplia que define el lugar de cada uno y lo que de él se espera para el mantenimiento de la organización. Esta es a su vez fuente de significados.

D. Dimensiones formales en la comunicación didáctica

- 1) La sintaxis: Es la organización sintáctica de los signos dentro del mensaje, y es portadora de significados, sobre todo los vinculados con la definición de las relaciones entre los sujetos. La sintaxis permite ciertos mensajes y otros no, y además se le pueden atribuir significados diferentes. La sintaxis suele ser una vía de inculcación ideológica, por su intervención no evidente.
- 2) La semántica: Se refiere a los significados propiamente dichos, entendidos como la relación de los signos con las cosas a que se refieren. Hay significados explícitos pero también implícitos.
- 3) La pragmática: Se ocupa de la forma en que la comunicación afecta el pensamiento y la conducta de las personas. La comunicación didáctica es intencional y se propone influir sobre los alumnos, generando nuevos significados en ellos. El profesor también modifica sus esquemas de pensamiento y su conducta, es decir, también es afectado por la dimensión pragmática.

E. La comunicación en el aula

El docente en su acción comunicativa ordinaria recurre al lenguaje como herramienta básica de la comunicación y a otros recursos didácticos. De ahí que se afirme que el acto de comunicar es resultante equivalente a transmitir y, como toda actividad de transmisión, se da un contenido (mensaje) y una intención. Por lo que se infiere que la comunicación educativa es un tipo de comunicación humana que persigue logros educativos.

Según la perspectiva constructivista, la comunicación educativa constituye el proceso mediante el cual se estructura la personalidad del educando; lográndose a través de las informaciones que este recibe y reelaborándolas en interacción con el medioambiente y con los propios conceptos construidos. Dicho esto, se tiene que el proceso de aprendizaje no es reducible a un esquema mecánico de comunicación, por cuanto el educando como receptor no es un ente pasivo, sino que es un ser que reelabora los mensajes según sus propios esquemas cognitivos.

La misma cuenta con el lenguaje escolar (lenguajes de los contenidos estos son los oficiales, normativos curriculares, el lenguaje magistral (que es la relación pedagógica que se establece con los alumnos), el de los alumnos (es espontáneo e informal, en la enseñanza tradicional crea dificultades, ya que la construcción del conocimiento no se realiza entre ambos) y el lenguaje de los textos (lenguaje contenido en la bibliografía).

Para una buena comunicación es necesario conocer las vías y recursos para hacer más efectiva la información que se trasmite y de esta manera lograr una mejor comprensión e interacción entre los participantes de la actividad [11].

En la enseñanza y aprendizaje esta comunicación debe ser creadora, lo cual podemos decir que el enfoque histórico cultural juega un papel fundamental, al igual que los medios de comunicación para su complemento.

Para el mismo es necesario tener los tres aspectos de las habilidades comunicativas, que son el dominio de determinados conocimientos teóricos del proceso de comunicación, la aplicación de los conocimientos aprendidos a situaciones reales y el análisis del proceso de comunicación propia, desarrollo de la auto observación y autoconciencia de las propias interacciones con otros y uso del lenguaje verbal y no verbal.

Como es sabido aquí intervienen los componentes del proceso comunicativo que es el emisor, el mensaje y el receptor, cada uno con sus propias características, es decir el emisor (debe tener prestigio, confiabilidad, debe conocer las características del receptor, el mensaje debe tratarse de buscarse aspectos comunes entre el emisor y el receptor y tener en cuenta la personalidad de este último y el receptor (que no es un ente pasivo, sino que intercambia con el emisor, aquí los mensajes pasan por un filtro, donde se aceptan o no).

Para ser más efectiva la labor del maestro como comunicador este debe presentar el material de forma asequible, claro y emocional, seleccionar lo esencial del mismo, propiciar el intercambio en el grupo estudiantil, saber detectar las reacciones de los alumnos y organizar la actividad con los alumnos. Además de tener cualidades de la personalidad como sociabilidad, espontaneidad y dominio del lenguaje. En esencia debe tener habilidades generales como la habilidad de expresión, de observación y de relación empática.

Por último para facilitar al docente de la instrumentación de la comunicación en el aula debe tenerse en cuenta la tarea pedagógica que consta de: planeación del tema a tratar, nivel de comunicación con el grupo de clases, buenos requisitos de comunicación, tener en cuenta las particularidades individuales de los alumnos, las particularidades individuales propias y los métodos de influencia previstos en la clase.

II. PROBLEMAS Y OBJETIVOS

El problema fundamental es el rechazo que hacen los estudiantes ante el estudio de las ciencias básicas, la física y las matemáticas.

Es por este motivo que el objetivo fundamental de este trabajo es lograr minimizar este problema usando un nuevo recurso en la enseñanza de las ciencias exactas, en este caso

hemos tomado la técnica del Transformador Lógico Didáctico (TLD), o Invariante de la Física [12] y la utilización de la comunicación didáctica como una forma de la comunicación educativa, a mi juicio como elemento integrador de este proceso tan complejo que es el de enseñar y aprender y una manera de ver la reorientación de los temas de estudios de la Física y en general de las ciencias exactas encaminados a motivar al estudiante y a que se cumplan los objetivos curriculares de la carreras ó dicho de otra manera ver el impacto del lenguaje simbólico de la Matemática y el de la Física y su interrelación y el rol que juega el mismo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y como este transformador lógico didáctico impacta en la comunicación.

A. Transformador Lógico Didáctico (TLD)

A.1 El enfoque estructural funcional

Según este enfoque se debe describir el objeto de estudio en su nivel más desarrollado, totalmente, y destacarse en este su composición y estructura que garantizan su comportamiento estable como parte de un sistema mayor.

Las características estructurales funcionales estables de cada nivel del sistema se denominaron por los autores de este enfoque invariantes del sistema en lo cual propicia una mejor forma de comunicar dicho mensaje, pues como se planteó anteriormente debe tener cierto balance entre el emisor y el receptor en el propio acto de la comunicación.

Estudios posteriores realizados por el autor en un artículo se encaminaron a precisar este importante concepto, llegando a concluir que un contenido se puede definir como invariante, si el mismo puede constituir el fundamento de la base orientadora de la acción para el aprendizaje de un conjunto de contenidos determinados [13].

Su característica identificativa es su carácter esencial y operatividad didáctica a la hora de ser tratados dentro de la didáctica comunicativa.

Por tanto, debe lograrse que la comunicación cumpla adecuadamente sus 3 funciones fundamentales: informativa, afectiva y reguladora. En este sentido Leontiev apunta 3 importantes consecuencias de la comunicación pedagógica: la creación de un clima psicológico que favorece el aprendizaje, la optimización de la actividad de estudio y el desarrollo de las relaciones entre profesor y alumnos y en el colectivo de estudiantes (grupo). Por tanto esto lo propicia y logra la organización del aprendizaje por invariantes de contenido

B. Enfoque sistémico genético

En este enfoque se parte de la identificación de un contenido que sirva de célula generadora para el aprendizaje de otros que se derivan de este.

Una célula generadora es un contenido tal que por su carácter esencial y simple puede ser la base del aprendizaje de otros contenidos más complejos que resultan de aplicarle a dicha célula determinadas leyes o principios de desarrollo [13].

Entre las características de una célula generatriz, su promotora, N. G. Salmina [1] menciona las siguientes:

1. Es la relación más simple del todo desarrollada.

2. Es una relación universal, inherente al objeto de estudio en todas las etapas de su desarrollo.
3. Es la relación que refleja la contradicción principal, es decir, la fuente del movimiento y el desarrollo del todo.
4. es la relación que contiene la posibilidad de que el sistema se desarrolle.
5. es la relación que tiene un carácter relativo y dependiente del sistema.

Para identificar células generatrices en el contenido de una asignatura o disciplina esta autora propone el procedimiento siguiente:

Análisis empírico del estado desarrollado del objeto de estudio.

Distinguir la estructura genética inicial más simple, la que se identificará como célula generatriz.

Distinguir la ley de desarrollo, es decir, la que despliega el desarrollo de la célula en un todo más complejo. Con lo cual podemos evidenciar que uno tiene una fuerte intensidad didáctica como la pone de manifiesto el transformador lógico didáctico que resuelve este problema de una manera sencilla y de fácil comprensión, es decir elimina la empíria.

III. MATERIALES Y MÉTODOS

La tarea que requirió en tales cursos (en el primer semestre de los cursos 2006-2007 y 2007-2009), en la carrera de ingeniería informática fue aplicar la reestructuración didáctica del contenido de estas ciencias, conjuntamente con la comunicación didáctica para la modalidad de estudio semipresencial, por ser esta mucho más compleja.

De los 24 estudiantes, todos respondieron que estos métodos han motivado el estudio por la asignatura y se sienten bien, esto desde el punto de vista es una fortaleza obtenida.

Aquí se utilizó este transformador lógico didáctico.



FIGURA 1. Cuadro del proceso Transformador Lógico Didáctico de Reestructuración utilizado.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Viendo este problema, hemos sugerido emplear para dicho tema el nuevo recurso del TLD, que sirve al profesor para identificar posibles invariantes y/o células generadoras en un

sistema de contenidos determinado previamente y establecer con ellos una nueva forma de comunicación educativa, para de esta manera asegurar la motivación en el aprendizaje [12, 13, 14, 15].

Teniendo en cuenta los elementos de la comunicación didáctica lo podemos aplicar de la siguiente manera a nuestro caso de estudio y por poseer una característica distintiva en este marco de la modalidad semipresencial que tiene un carácter grupal donde en el aula se establecen las relaciones de comunicación entre el profesor alumno y viceversa, es decir, el alumno no tiene un carácter pasivo sino más bien de intercambio, de negocio con el profesor. Por ejemplo, en un tema particular (en el caso del circuito RLC), se toma como invariante (aquí está presente el clima favorable y el intercambio para el aprendizaje del alumno), es decir, si aplicamos los criterios que definen cada operador tendremos los siguientes procesos:

Aplicamos los criterios que definen cada operador.

Operador 1 De la lógica de la Ciencia

1 A. CONTENIDOS ESENCIALES.

Tomamos como contenido esencial, es decir, el contenido profundo y estable y que sirva de fundamento, entonces teniendo en cuenta la fórmula general de la ecuación diferencial no homogénea, podemos derivar las demás y hacer analogías.

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t), \quad (1)$$

y su solución general es

$$X(t) = e^{-at}(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (2)$$

donde $\alpha = \frac{b}{2a}$ y $\omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$. A, B son constantes ajustadas a las condiciones iniciales del problema.

1B Contenidos no esenciales. El resto de los contenidos que constituyen el sistema.

1C Contenidos Precedentes.

Este no requiere ser desarrollado a un nivel superior y es conocer la solución de la ecuación diferencial no homogénea y aplicarlas a casos particulares.

Operador 2: De la didáctica de la asignatura.

2 A. CONTENIDOS GENERADORES.

Consiste en aplicar otros contenidos, ya con habilidades adquiridas es decir, como ejemplo tomemos el caso más sencillo, el de la ecuación diferencial homogénea y su solución.

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad (3)$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}. \quad (4)$$

Si hacemos las siguientes analogías podemos inferir, otras soluciones en distintas esferas de la física, es decir en el caso de la mecánica y en el caso del electromagnetismo (Circuito RLC), aplicamos su semejanza

$$\text{En este caso } a \rightarrow m \rightarrow L, b \rightarrow \beta \rightarrow R, c \rightarrow k \rightarrow \frac{1}{c}.$$

Caso del electromagnetismo (Circuito RLC)

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = \epsilon(t). \quad (5)$$

La solución es

$$V(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (6)$$

Caso de la mecánica clásica

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (7)$$

La solución es

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}. \quad (8)$$

2B CONTENIDOS GENERADOS.

Son aquellos que resulten asimilables a partir del desarrollo de las habilidades logrado por los estudiantes.

En circuitos RL y RC aplicamos la 2^{da} Ley de Kirchhoff:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0, \quad (9)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (10)$$

Al igual podemos establecer estas analogías:

$$Fg = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad (11)$$

$$F_e l e = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \quad (12)$$

2C. CONTENIDOS PRECEDENTES GENERADORES.

Que cumple con 1C y con 2A

Aquí podemos aplicarlos haciendo analogías entre las cantidades mecánicas y eléctrica

Eléctricas Mecánicas

$$q \rightarrow x$$

$$L \rightarrow m$$

$$R \rightarrow \beta$$

$$\epsilon(t) f_{em} \rightarrow F(t) \overline{F_{ext.}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

Aquí podemos aplicarlos, haciendo analogías entre las cantidades mecánicas y eléctricas, donde se establecen analogías comunicativas de las didácticas comunicativas de las ciencias particulares

De lo anterior, vemos que en su dimensión didáctica (la síntesis, la semántica de la ciencia y su pragmatismo) la comunicación juega un papel importante con este TDL, el alumno comienza a sintetizar las ideas y conceptos que se expresan a través del propio lenguaje comunicativo y estructurado de las ciencias exactas; y va influyendo de forma intencional y general nuevos significados en ellos que a la vez de esta manera se hacen más comprensibles y fáciles de dominar, tanto a la hora del profesor de dar su clase, como el papel que juega el estudiante cuando capta ese mensaje.

Por supuesto, todo esto se realiza en el aula, donde debe haber un contexto que lo impone el modelo de enseñanza, que en nuestro caso es el semipresencial, donde en el mismo el estudiante ya viene a clase presencial con el contenido curricular de los temas ya estudiado y en este marco o contexto se establece una comunicación de intercambio entre ambos (profesor y alumno), por supuesto el clima ambiental comunicativo aquí debe ser flexible, de confianza y de trabajo en grupo, lo que evidenció una mayor comprensión de estos temas al haber estructurado los contenidos con el uso de los invariantes y es ahí donde radicó el cambio sustancial, por este motivo demuestra el peso que tiene esta técnica, utilizando como recurso como se dijo anteriormente el transformador didáctico lógico.

V CONCLUSIONES

En el trabajo se evidencia cómo el Transformador Didáctico Lógico impacta en la comunicación educativa y trae consigo que se reestructuren los contenidos por invariantes utilizando como variante una de sus formas que es la comunicación didáctica donde juega un rol fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje y en la reestructuración de este tema que nos facilita una mejor comprensión del fenómeno viéndolo desde el punto de vista del Método Dialéctico, es decir de lo general a lo particular y viceversa, o lo que es más importante es una mejor manera de comprender, de forma generadora las leyes de la naturaleza desde una óptica más abarcadora y luego someter su aplicabilidad a fenómenos particulares de las distintas esferas y aplicaciones de los fenómenos naturales de las físicas y las matemáticas en su conjunto, el análisis de los resultados será objeto en un próximo artículo.

REFERENCIAS

- [1] Colectivo de Autores, *El Modelo Pedagógico de la SUM. Condicionantes sociales*, (2005). http://www.dict.uh.cu/Revistas/Educ_Sup/032005/Art05.pdf. Consultado el 15 de enero de 2014.
- [2] Greca, I. M., Moreira, M. A., *Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo*, Enseñanza de las Ciencias **16**, 289-303 (1998).

- [3] Alejandro, C. A., *Prácticas de laboratorio de física general en internet*, Revista electrónica de enseñanza de las Ciencias **3**, 2 (2004).
- [4] Torres, J. L., Gary, F., Soltis, J., *Enfoques de la enseñanza*, (Ammorrtu, Buenos Aires, 1998).
- [5] ____ *Caracterización de la comunicación educativa* (primera parte), No. 13, (1999).
- [6] González, B., Reflexiones sobre la categoría comunicación, Revista Cubana de Psicología **22**, No. 1, (2005).
- [7] Fernández, A.M., Álvarez, M.I., Reinoso, C., Duran A. *Comunicación educativa*, (2013). Texto sin publicar.
- [8] Meza, S., Lucero, I., Aguirre, Ma, S., ¿Flota o se hunde?, SECyT. UNNE. Resistencia, (2004), <http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/cyt/2004/comunicaciones/cyt.htm> (Consultado el 28 de Diciembre de 2013).
- [9] Resta, P., et al., *Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente Guía de planificación Edición en español*, presentada por John Daniel, Director General Adjunto de Educación, Durazno 1888, 11200 Montevideo, Uruguay tel. y fax: (5982) 412 77 22 y 412 76 62, División de Educación Superior, © 2004, UNESCO D/HED/TED/3, trilce@trilce.com.uy, <http://www.trilce.com.uy>, ISBN 9974-32-350-9
- [10] Solari, A., German, M., *Un desafío hacia el futuro: educación a distancia, nuevas tecnologías y docencia universitaria*, Primer Congreso Virtual Latinoamericano de Educación a Distancia, del 23 de marzo al 4 de abril del 2004.
- [11] Colectivo de Autores, *Comunicación Educativa*, UAJMS-CEPES. Tarija, Bolivia (1999).
- [12] Llovera, J. J., *Base orientadora de la acción para la determinación de contenidos invariantes y células generatrices*, Memorias del V Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Física en Ingeniería (EFING` 2002) La Habana, 2002.
- [13] Llovera, J. J., *Aprendizaje de la Física por Invariantes*, Memorias de la III Conferencia Internacional sobre Educación Superior, Universidad 2006, La Habana, febrero de 2006.
- [14] Llovera, J.J., *Reestructuración por invariantes del contenido del tema Electromagnetismo*, trabajo de curso de posgrado, La Habana, (1993).
- [15] Notas de clase del curso *Comunicación Educativa*, ISPJAE, La Habana, Cuba, (2007).

Equivalente electro-mecánico del calor usando tecnología computarizada



Montero, Germán^{1,2}, Rodríguez, Nicolás¹

¹Facultad de Humanidades y Educación. Departamento de Matemáticas y Física. Laboratorio de Enseñanza de la Física. Universidad del Zulia. Maracaibo- Venezuela

²Instituto Universitario de Tecnología de Maracaibo. Maracaibo- Venezuela

E-mail: germanmontero71@gmail.com

(Recibido el 13 de Febrero de 2014, aceptado el 25 de Junio de 2014)

Resumen

Para determinar el equivalente electro-mecánico del calor, se presenta un nuevo diseño experimental utilizando una resistencia eléctrica que está sumergida en un calorímetro lleno de agua, que ha sido diseñado en el laboratorio y un aparato que se utiliza para hacer las prácticas tradicionales del equivalente mecánico del calor. Estos aparatos a su vez, se encuentran conectados con instrumentos tecnológicos de medición de vanguardia. En el proceso experimental se pudo confirmar de manera instantánea visualizando la variación de la temperatura con respecto al tiempo. Posteriormente mediante la ley de conservación de la energía, se comprobó dicho fenómeno físico importante. Los resultados obtenidos durante el experimento estuvieron en concordancia con lo que predecía Joule, que el equivalente de 1 Cal es igual 4,18 J/cal, aunque los valores arrojados fueron menos del 1 % para el caso mecánico y 7,6% para el caso eléctrico, la cual son aceptable en correlación con la teoría.

Palabras clave: equivalente eléctrico, equivalente mecánico, calor, efecto Joule.

Abstract

To determine the mechanical and electric equivalent of heat, a new experimental design is presented using an electrical resistance that is immersed in a calorimeter full of water, which has been designed in the laboratory and a device that is used to make the traditional practices of equivalent mechanical heat. These devices at same time are connected with technological measuring instruments. In this experimental process it could be confirmed the existence of the variation of temperature with respect time. Therefore, through the law of conservation of energy, it was proved that which important physical phenomena. The results obtained during the experiment were in agreement with that predicted Joule, the equivalent of 1 Cal is equal to 4.18 J/cal, although thrown values were less than 1% for the mechanical case and 7.6 % for electric case, which are acceptable in correlation with the theory.

Keywords: Electric equivalent, Mechanics equivalent, Heat.

PACS: 44.10+i, 44.15+a, 44.90+c

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El presente investigación tiene como objetivo la determinación del equivalente eléctrico y mecánico del calor, por medio de la transformación de la energía mecánica y eléctrica, utilizando un aparato tradicional en los laboratorios de física y la energía eléctrica un calorímetro diseñado en el laboratorio que contiene 2 resistencias conectadas en serie, que posteriormente es surtido con agua natural.

Es sabido que una caloría [1], se define como la cantidad de energía térmica necesaria para elevar un gramo de agua en un grado centígrado desde 14,5°C a 15,5°C, como también a través de los aportes del experimento sobre el equivalente mecánico del calor de James Joule, el cual consintió en un dispositivo donde se realiza un trabajo sobre el agua al rotar la rueda de paletas a través de un trabajo ejercido por el descenso de unas pesas sujetadas por la cuerda que va a la rueda de paletas, donde se obtuvo que 1cal = 4.186 Joules.

La energía electro-mecánica se transforma en energía térmica, y su cambio lo efectúa a través del trabajo mecánico en forma manual utilizando el aparato del equivalente mecánico del calor tradicional que existe comúnmente en los laboratorios de física. Aunado a esto, para el caso eléctrico se obtuvo debido a la circulación de corriente eléctrica que atraviesa una resistencia eléctrica colocada en un recipiente aislado, sellado y lleno de agua. El calor saliente debido a ambos trabajos está expresado en calorías y la energía proporcionada, está dada en Joule, lo cual es posible determinar el equivalente electro-mecánico del calor.

II. FUNDAMENTACIÓN TEORICA

A. Equivalente Mecánico del Calor

Cuando se transfiere energía calorífica siempre se tiene que el calor ganado por un cuerpo o sistema debe ser igual al calor cedido por otro cuerpo o sistema, por consiguiente

para el caso de la conversión de la energía mecánica en energía calorífica tenemos que [2]:

$$W_m = F \cdot s = m \cdot g \cdot n \cdot \phi \cdot \pi \quad (1)$$

$$\boxed{W_m = m \cdot g \cdot n \cdot \phi \cdot \pi} \quad (2)$$

Donde:

W_m : Energía mecánica.

$F = m \cdot g$: Fuerza de fricción (m : masa suspendida; g : gravedad).

$s = n \cdot \phi \cdot \pi$: Recorrido de la fricción (n : número de vueltas; ϕ : diámetro del calorímetro).

La cantidad de energía calorífica viene dado por:

$$\left. \begin{array}{l} Q_C = C \cdot (T_e - T_0) \\ C = C_{cal} + C_T \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Q_C = (C_{cal} + C_T) (T_e - T_0)} \quad (3)$$

Donde:

Q_C : Energía calorífica

C : Capacidad calorífica del sistema completo

C_{cal} : Capacidad calorífica del calorímetro de cobre
($C_{cal} = 264 \text{ J}/^\circ\text{C}$)

C_T : Capacidad calorífica del calorímetro del termómetro
($C_T = 5 \text{ J}/^\circ\text{C}$)

El aparato científico modelo TD 8551^a de PASCO para Equivalencia Mecánica del Calor permite la determinación de dicha relación con buena exactitud (dentro del 5 % de error relativo), ver página web: www.frro.utn.edu.ar. En este aparato, mostrado en la figura 1, el procedimiento para medir una cantidad determinada de trabajo es efectuada por el giro de una manivela que acciona un cilindro de cobre, el cual tiene enrollada una cinta de nylon con varias vueltas a su alrededor diámetro. Al girar la manivela, hace que la fricción entre la cinta y el cilindro sea suficiente para soportar la masa colgada del otro extremo de dicha cinta.

Esto asegura que la acción del torque sobre el cilindro es constante y medible. Un contador mide el número de vueltas mientras se hace girar el cilindro y la cinta convierte el trabajo mecánico en energía térmica, la cual eleva la temperatura del cilindro de cobre. En la figura 1 se observa el sistema.

B. Equivalente eléctrico del calor

La Ley de la conservación de la energía afirma que la energía no se crea ni se destruye, cambia de forma. Por ejemplo, cuando la energía térmica se trasforma en energía calorífica en un calefactor. Dicho de otra forma: la energía puede transformarse de una forma a otra o transferirse de un cuerpo a otro, pero en su conjunto permanece estable (o constante).



FIGURA 1. Fotografía del montaje experimental del equivalente mecánico del calor.

De esta manera [3] al pasar la corriente eléctrica por una resistencia, produce un trabajo sobre las moléculas de este, el cual por el roce con las moléculas de agua, pasa a ser por la Ley de la conservación de la energía, energía calórica, que fue definida como: "El calor generado por la potencia perdida generada en un resistor eléctrico, depende directamente del cuadrado de la intensidad de la corriente, del tiempo que esta circula por el conductor. Esto se conoce como calentamiento de Joule". El calor se expresa como:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t \quad (4)$$

Se denomina energía eléctrica a la forma de energía que resulta de la existencia de una diferencia de potencial entre dos puntos, lo que permite establecer una corriente eléctrica entre ambos – cuando se les pone en contacto por medio de un conductor eléctrico – y obtener un trabajo. La energía eléctrica puede transformarse en muchas otras formas de energía, tales como la energía luminosa o luz.

Al introducir en un recipiente con agua a una cierta temperatura, una resistencia eléctrica y aplicamos una diferencia de temperatura "y medimos" el paso de la intensidad de corriente I . La potencia consumida por la resistencia es:

$$P = V \cdot I \quad (5)$$

Entonces la energía eléctrica generada durante un determinado tiempo es:

$$W = P \cdot t \quad (6)$$

Por otra parte, por Ley de la conservación de la energía, esta se trasforma en energía calórica, a través de la resistencia

eléctrica. La cantidad de calor generado en el determinado tiempo se invierte en elevar la temperatura del agua y del recipiente en donde el agua está contenida. Por lo tanto la energía calórica transferida al agua es:

$$Q=C_0(m+Me)(Tf-Ti). \quad (7)$$

Donde:

C_0 : Calor específico del agua

M : Masa del agua.

Me : Masa del agua capaz de absorber igual cantidad de calor que el calorímetro para la misma elevación de temperatura.

$Tf-Ti = \Delta T$: Diferencia de temperatura.

De este modo la relación entre la energía eléctrica y el calor la podemos escribir como:

$$J_e = \frac{W}{Q}. \quad (8)$$

Al despejar de la ecuación W nos queda la siguiente ecuación lineal

$$W = J_e \cdot Q. \quad (9)$$

Donde J_e es la pendiente de la recta.

III. MÉTODO EXPERIMENTAL

A. Montaje del equivalente mecánico

El experimento consistió en realizar un montaje experimental que consta de un sistema mecánico conectado a un dispositivo electrónico (Figura 1). El diseño está distribuido en la conexión de un sensor de temperatura en el calorímetro mecánico y a su vez está conectado a una interface (Data Analyzer EA-200) [4, 6] como también incluyendo una calculadora gráfica Casio Class Pad 300 Plus [4, 5, 6].

Una vez realizado el montaje experimental mostrado en la figura 1, se realizaron los siguientes pasos para realizar las medidas del equivalente mecánico del calor:

- Se ajusta el equipo realizando una prueba, para verificar si la cinta esta tensa y equilibrada con la polea de cobre y la pesa.
- El contador se ajusta a cero para contar las vueltas exactas que se van a medir, en este caso son 300 vueltas.
- Se calibra el equipo de instrumentación tecnológica para comenzar las medidas de la temperatura en función de tiempo mediante el sensor de temperatura, data analizar y calculadora Casio Class Pad 300 Plus.

B. Montaje del equivalente eléctrico

En esta sección se utilizó los siguientes materiales de laboratorio, que se pueden visualizar en la figura 2, tales

Equivalente electro-mecánico del calor usando tecnología computarizada como un calorímetro construido en el laboratorio, un multímetro digital, el sensor de temperatura, data analizar y la calculadora Casio Class Pad 300 Plus

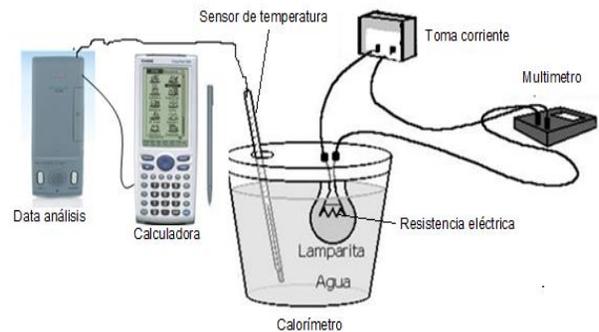


FIGURA 2. Diseño esquemático del montaje experimental para el caso del equivalente eléctrico del calor.

Una vez conectado el sistema como se muestra en la Figura 3, se comienza a tomar las medidas con el empleo del programa Econ 200[6], que se encuentra en la calculadora. Los datos registrados de la temperatura con respecto al tiempo se grafican instantáneamente en la calculadora almacenando los datos, que posteriormente serán procesados en un programa de análisis de datos y graficas Microcal Origin[8] versión 8.01, registrado de la misma forma presentada por Montero[9].



FIGURA 3. Montaje Experimental del equivalente eléctrico del calor con la tecnología instrumental.

En el mismo sentido, se presentan los pasos previos detallados para realizar la experimentación del equivalente eléctrico del calor:

- El calorímetro usado en el experimento fue construido usando un envase de plástico envuelto en corcho (o anime) para evitar que se pierda el calor. Se le adapta la resistencia y se le aíslan los cables del agua de manera que la electricidad no tenga contacto con el agua.
- Se conecta la calculadora con el data análisis y el sensor de temperatura, configurando los parámetros para medir la temperatura en grados Celsius y el tiempo en segundos.

- Agregamos 500gr de agua al calorímetro y medimos su temperatura con el sensor de temperatura para distintos intervalos de tiempo, estableciendo un rango escogido en la calculadora.
- Se calculó la corriente utilizando la ley de Ohm

$$Q = \frac{V^2}{R} t, P = I \cdot V; V = I \cdot R \text{ (Ley de Ohm)}$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120V}{500\Omega} = 0.24 \text{ Amp}$$

Es la intensidad de corriente utilizada por el dispositivo. Donde Q es cantidad de energía térmica del sistema, t el tiempo, V diferencia de potencial, I intensidad de corriente, R resistencia, ΔW diferencia de trabajo

IV. RESULTADOS

Luego de establecer un intervalo de tiempo en la calculadora, se procede a accionar el experimento con todas condiciones adecuadas. Se guarda los datos crudos para luego procesarlos en un programa de la computadora y finalmente analizarlos. En las figuras 4 y 5, se representan los resultados obtenidos de manera instantánea para los experimentos del equivalente mecánico y eléctrico del calor respectivamente.

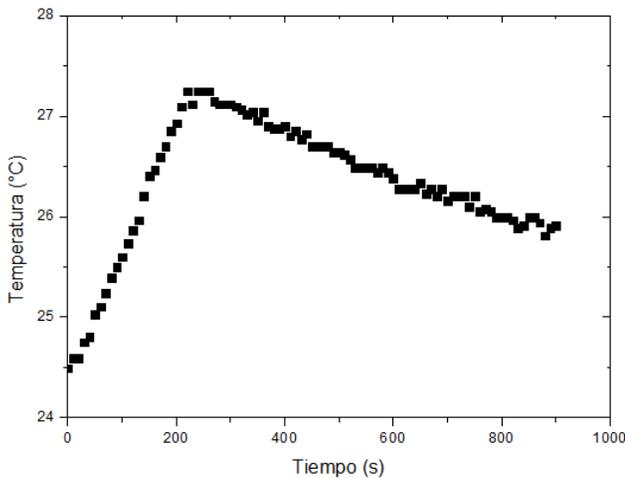


FIGURA 4. Gráfica obtenida experimentalmente de la calculadora del equivalente mecánico del calor.

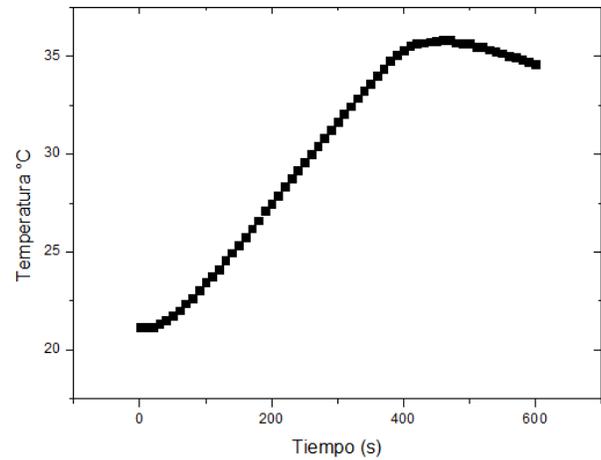


FIGURA 5. Gráfica obtenida experimentalmente de la calculadora del equivalente eléctrico del calor.

V. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Después de analizar los resultados del equivalente mecánico del calor, se extrajo de la gráfica y de las ecuaciones, el cálculo respectivo para hallar el valor correspondiente equivalente térmico. Analizando el ajuste de la gráfica de la figura 6 se obtiene los valores necesarios para calcular dicho valor.

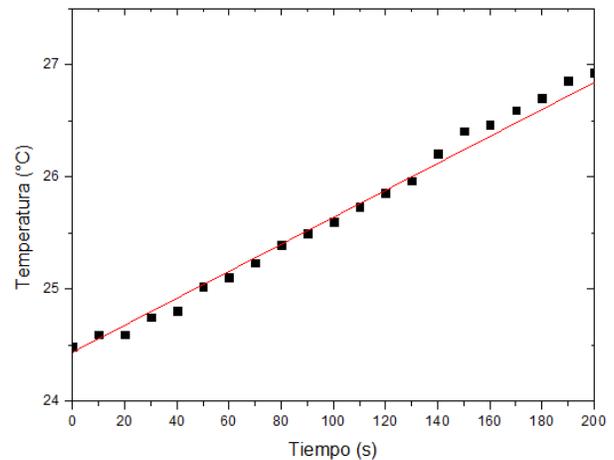


FIGURA 6. Gráfica de la Temperatura en función del tiempo del equivalente mecánico del calor.

De esta gráfica se obtiene los valores correspondientes de W_n y de Q_c , que son importante para calcular el valor de J. Los resultados arrojados fueron:

$$W_m = m \cdot g \cdot n \cdot \phi \cdot \pi = 2 \text{kg} \times (9,8 \text{m/s}^2) \times (300) \times (0.04 \text{m}) \times (\pi) = 738,9025921 \text{ J.}$$

$$Q_c = (C_{cal} + C_T)(T_e - T_0) = (264 \text{J/}^\circ\text{C} + 5 \text{J/}^\circ\text{C}) \times (27,24 - 24,47) \text{ }^\circ\text{C} = 745,13 \text{ J.}$$

Si convertimos en calorías el valor sería: 178,0903442 calorías.

Entonces el valor de

$$J: 738,9025921J/178,0903442 \text{ calorías} = 4,149J/\text{cal}.$$

Donde el porcentaje de error es:

$$\%E = (4,149 - 4,184) / (4,149) * 100\% = 0,84\%.$$

Se puede observar que el resultado dio menos de 1%, lo que significa que la metodología experimental utilizada es óptima para este experimento.

Luego de realizar el primer experimento se bajaron los datos del calorímetro eléctrico y se realizaron los cálculos para determinada la energía eléctrica consumida por la resistencia eléctrica y la cantidad de calor que la resistencia eléctrica transmitió al agua. Estos resultados se reflejan en la representación de la energía eléctrica W y el calor Q suministrado durante un intervalo de tiempo (figura 7).

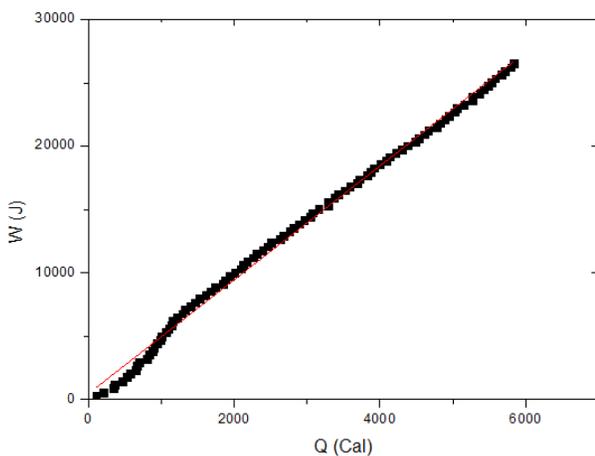


FIGURA 7. Gráfica de la Energía eléctrica en función del calor.

Luego del análisis de las variables se graficó la recta que más se aproxima a esos puntos y se determinó su pendiente realizando una regresión lineal:

$$Y = 4,50x + 465.$$

Valor experimental:

$$J_e = 4,5 \text{ J/Cal}, \text{ Valor teórico} = 4,184 \text{ J/Cal}.$$

Cálculo para incertidumbre:

$$E_{\text{Absoluto}} = |T_{\text{Experimental}} - T_{\text{Teórico}}| =$$

$$\left| 4,5 \frac{\text{J}}{\text{Cal}} - 4,184 \frac{\text{J}}{\text{Cal}} \right| = 0,316 \frac{\text{J}}{\text{Cal}}.$$

$$E_{\text{Relativo}} = \frac{E_{\text{absoluto}}}{T_{\text{experimental}}} = \frac{0,316 \text{ J/cal}}{4,184 \text{ J/Cal}} = 0,076.$$

$$\%E = E_{\text{Relativo}} \times 100\% = 0,076 \times 100\% = 7,6\%.$$

Este porcentaje es relativamente bajo con los resultados obtenidos mediante esta técnica experimental.

VI. CONCLUSIONES

Los experimentos que están referidos al área de calorimetría presentan normalmente un rango de error alto, para el caso del equivalente mecánico del calor el resultado que se obtuvo es menos del 1%, lo que significa que la adquisición de datos obtenidos con la instrumentación tecnológica alcanza unos resultados casi perfectos para lograr el objetivo del experimento.

Al respecto del experimento eléctrico del calor, se obtuvo un 7,6% de error, lo cual es un resultado razonable, utilizando equipos de instrumentación tecnológica en el laboratorio de física.

Gracias al uso de la calculadora fue muy beneficioso, debido a que se permitió obtener datos exactos en la medición del incremento de la temperatura y facilitó el trabajo efectivamente, ya que no es necesario usar un cronómetro y menos estar pendiente de lo que ocurre con los resultados.

Por último a través de una regresión lineal que se realizó en las gráficas del equivalente electro-mecánico, se logró determinar el equivalente del calor.

VII. REFERENCIAS

- [1] Tippens, Paul E., *Física conceptos y aplicaciones*. (7^{ta} Edición. Mc Graw Hill, México, 2001).
- [2] Pacheco H, Gerardo y colaboradores. *Manual de prácticas del laboratorio de termodinámica*. (2011). Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería. División de Ciencias Básicas. p. 34. <http://www.dcb.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/FisicaQuimica/Termodinamica/MANUAL%20DE%20PRACTICAS.pdf>
- [3] Giancoli Douglas., *Física. Principios con aplicaciones*. (Editorial Pearson Prentice Hall, México, 1997).
- [4] CASIO Worldwide Education Website, <http://edu.casio.com/>
- [5] CASIO, Classpad, <http://classpad.net/>
- [6] CASIO International, <http://www.casio-intl.com/>
- [7] User's guides of the data analyzer from Casio or Texas Instruments.
- [8] Originlab Data analysis and Graphing Software. www.originlab.com.
- [9] Montero, G., *Aceleración de cuerpos rígidos sobre un plano inclinado usando tecnología computarizada*, Rev. Electr. Quimer@ **1**, 10-13 (2013). <http://www.grincef.nurr.ula.ve/REQuimera/i>; http://www.firro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/basicas/fisica2/EQUIVALENTE_MECANICO_DEL_CALOR.pdf.

Matrices ABCD en óptica



Alberto Francisco Sandino Hernández

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
Avenida San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, 09340 México, D.F.

E-mail: afsandino@gmail.com

(Recibido el 4 de Febrero de 2014; aceptado el 30 Junio de 2014)

Resumen

En este trabajo se presenta de manera didáctica, la derivación de la matriz ABCD para rayos que se propagan en el vacío así como también en lentes gruesas y delgadas con superficies esféricas, a partir de la aplicación de la óptica geométrica, por medio de un análisis matemático. En este proceso es importante la aplicación de la aproximación paraxial al problema, ya que ayuda a reducir las expresiones matemáticas obtenidas a ecuaciones lineales.

Palabras clave: matriz ABCD, aproximación paraxial, lentes.

Abstract

This paper presents the derivation of the ABCD matrix applying of geometrical optics, through an analysis mathematician for three cases: rays propagating in vacuum, thick and thin lenses with spherical surfaces. In this process, the application of the paraxial approximation to the problem is important because it helps to reduce the mathematical expressions obtained to linear equations.

Keywords: ABCD matrix, paraxial approximation, lenses.

PACS: 42.79.Bh, 02.10.Yn, 42.79.-e.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

A. Óptica Geométrica

La óptica geométrica se encarga de estudiar fenómenos ópticos describiendo la propagación de la luz como rayos rectilíneos. Dichos rayos están descritos por dos variables:

- la pendiente del rayo y ,

- la distancia entre un eje de referencia conocido como *eje óptico* y un punto perteneciente al rayo distinto al punto fuente del cual emerge.

Si tomamos en cuenta una fuente puntual en un punto objeto S que emite ondas esféricas, entonces los rayos representarán la dirección del frente de onda, la cual es radial. Estos rayos llegan a un sistema óptico (lente, espejo, etc.) propagándose en este hasta llegar a un punto imagen P . La línea recta perpendicular a las superficies del sistema óptico que une a los puntos S y P es el eje óptico (Ver Figura 1).

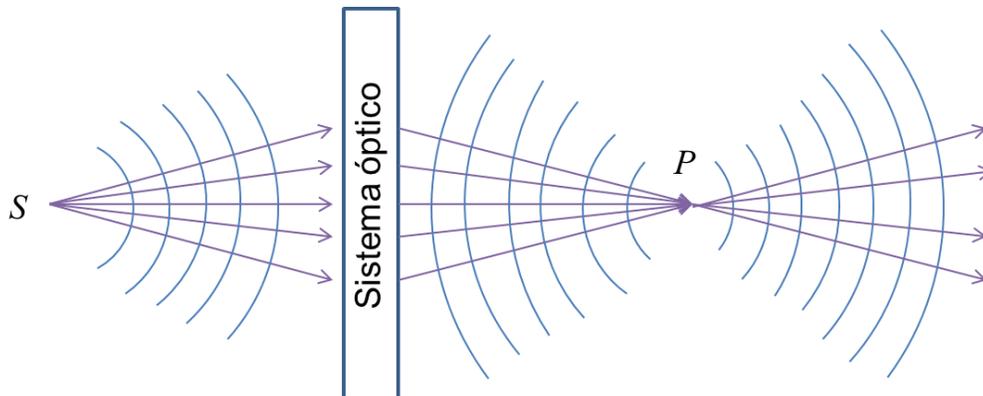


FIGURA 1. Representación de ondas esféricas a partir de rayo.

A continuación mencionamos las características que deben tomarse en cuenta para un sistema óptico:

- a) Sistema óptico estigmático: Este se refiere que al incidir rayos del punto objeto S hacia la superficie de un sistema óptico se consideran solamente un cono divergente de estos rayos, de la misma manera se considera otro cono convergente al punto imagen P en el otro lado del sistema óptico.
- b) Puntos conjugados: Cuando se intercambian de lugar los puntos objeto e imagen entre sí, es decir, se coloca el punto S en el lugar de P y el punto P en el de S , y se observa el mismo fenómeno descrito en el inciso anterior entonces se dice que los puntos son conjugados por principio de reversibilidad.
- c) Efectos por difracción: Aún en medios homogéneos, las ondas son difractadas. El grado de perfección alcanzable en la formación real de imágenes será limitado por la difracción. Para despreciar cualquier efecto por este fenómeno, en óptica geométrica se considera la longitud de onda $\lambda \rightarrow 0$, produciendo una propagación rectilínea en medios homogéneos.

B. Descripción matemática general de un rayo

En este apartado se presenta la descripción matemática general de los rayos emitidos, posteriormente en las siguientes secciones se mostrará la descripción matemática para casos particulares, como son la propagación en el vacío y en lentes tanto delgadas como gruesas. Para esta descripción general se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Anteriormente se mencionó que un rayo está descrito por su pendiente \dot{x}_j (donde $j = 1, 2, 3$ y el punto superior en la variable x representa la derivada con respecto a la dirección de propagación z) y la distancia entre el eje óptico y algún punto x_j ($j = 1, 2, 3$) de la pendiente.
- Un rayo pasa por distintos puntos en los cuales varía o mantiene constante su pendiente.

Así, la representación matemática general está dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + B\dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 &= Cx_1 + D\dot{x}_1, \end{aligned} \tag{1a}$$

cuya forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, \tag{1b}$$

donde la matriz de tamaño 2×2 es conocida como *matriz ABCD*.

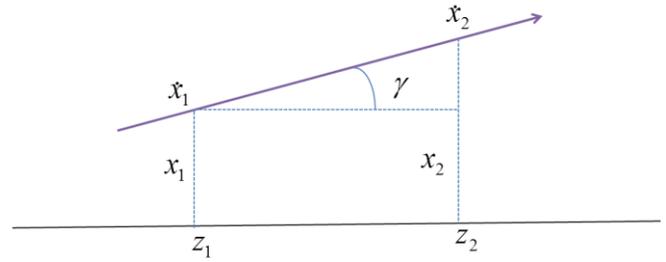


FIGURA 2. Esquema de un rayo.

II. PROPAGACIÓN EN EL VACÍO

A continuación se deducirá la matriz ABCD para el caso de propagación en el vacío o en un medio de índice de refracción n constante. En este caso no se toma en cuenta un sistema óptico. La pendiente del rayo no varía, debido a que está propagándose en un solo medio (Figura 2). Por lo tanto

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2,$$

comparando con (1a) se observa que $C = 0$ y $D = 1$.

Para obtener A considérese un rayo con pendiente cero (paralelo al eje óptico)

$$\dot{x}_1 = 0,$$

entonces su distancia al eje óptico es constante

$$x_1 = x_2,$$

esto implica que $A = 1$.

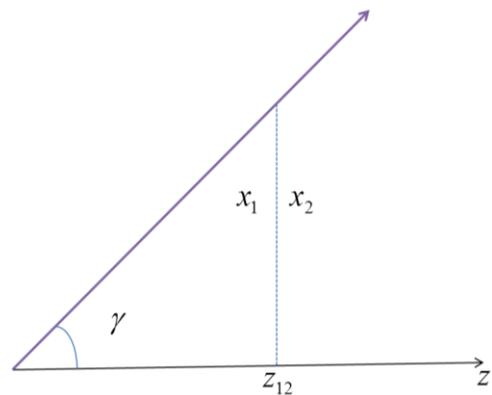


FIGURA 3. Esquema de un rayo en el vacío.

Finalmente para encontrar B se considera la Figura 3. Sea $z_1 = z_2 = z_{12}$, el haz se aleja del eje óptico una distancia

$$x_2 = z_{12} \tan \gamma = z_{12} \dot{x}_1,$$

donde γ es el ángulo entre el rayo y eje óptico. Si la pendiente del haz se mantiene constante entonces $B = z_{12}$.

Por lo tanto la matriz $ABCD$ de propagación en el espacio libre es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

III. LENTE GRUESA

A. Definición

Para iniciar esta sección, es importante saber que es una lente. Una lente es un dispositivo refractor que reconfigura la distribución de la energía emitida. Hay distintos tipos de lentes, para este caso se estudiará una lente con superficies esféricas, de la cual se obtendrá su matriz $ABCD$. En la figura 4 se puede observar la geometría de la lente a tratar:

- S y P son los puntos fuente e imagen.
- C_1 y C_2 son los centros de las superficies esféricas de la lente.
- R_1 y R_2 son los radios de curvatura de la superficie 1 y superficie 2 respectivamente.
- d es el grosor de la lente.
- V_1 y V_2 son los vértices de las superficies 1 y 2 respectivamente.

- θ_i y θ_t son los ángulos de incidencia y transmisión respectivamente.
- n_j es el índice de refracción del medio.

B. Aproximación paraxial y álgebra matricial

Los diseñadores de lentes han hecho uso de la óptica geométrica para poder desarrollar relaciones matemáticas y así describir los fenómenos relacionados con la incidencia de un haz sobre el lente, fenómenos como la refracción y la propagación de haces en un sistema óptico. Este tratamiento del fenómeno los ha llevado a obtener relaciones en forma matricial.

Se empezará por estudiar el fenómeno de propagación de un haz a través de una lente gruesa. Lo que nos llevará a la formulación de una matriz involucrando funciones seno y tangente.

Simplificando el estudio se realizará un desarrollo de Taylor de las funciones mencionadas:

$$\begin{aligned} \text{sen} \gamma &= \gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \dots \\ \tan \gamma &= \gamma + \frac{\gamma^3}{3} + \frac{2\gamma^5}{15} + \frac{17\gamma^7}{315} + \dots \end{aligned}$$

La aproximación paraxial asume que γ es muy pequeño, así que solamente se toma en cuenta hasta términos de primer orden, los de orden mayor son prácticamente despreciables.

Se hace uso de la teoría paraxial para construir una ecuación matricial lineal que describa la propagación de un haz a través de un sistema óptico.

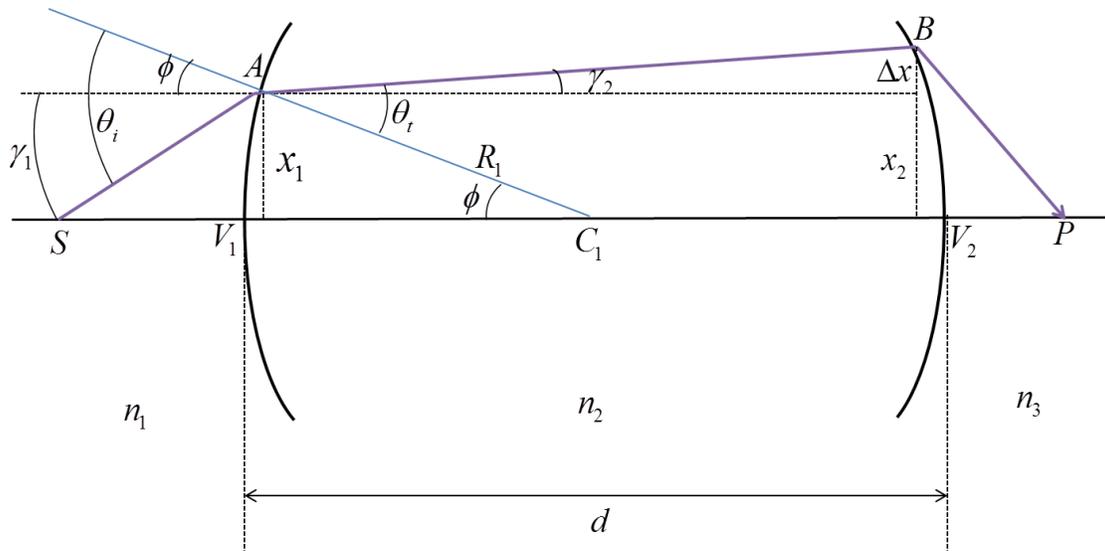


FIGURA 4. Esquema de la propagación de un rayo en una lente de grosor d .

C. Matriz de refracción \mathbf{R}_1

En la Figura 4 se observa a un haz de luz proveniente de un punto objeto S que se propaga en un medio de índice de refracción n_1 e incide en un punto A de la superficie esférica, para después propagarse en un medio de índice n_2 y llegar a un punto B . Para comenzar su descripción matemática, se hará uso de la Ley de Snell que matemáticamente nos dice:

$$n_1 \text{sen} \theta_i = n_2 \text{sen} \theta_t.$$

Con el uso de la aproximación paraxial en esta ley tenemos que:

$$n_1 \theta_i = n_2 \theta_t, \quad (3)$$

donde se considera que $n_1 < n_2$.

En la Figura 4 se observa que el ángulo de incidencia está dado por:

$$\theta_i = \gamma_1 + \phi, \quad (4)$$

y el ángulo de transmisión por:

$$\theta_t = \gamma_2 + \phi. \quad (5)$$

De la geometría de la Figura 4 se obtiene:

$$\text{sen} \phi = \frac{x_1}{R_1}. \quad (6)$$

Haciendo de nuevo uso de la aproximación paraxial para la función seno, se obtiene que

$$\phi \approx \frac{x_1}{R_1}. \quad (7)$$

Los subíndices $j = 1, 2, 3$ en las variables $x, \dot{x}, \gamma, \dot{\gamma}$ indican el medio en donde se toman en cuenta, es decir, si el subíndice j es igual 1, entonces la variable pertenece al medio 1 y así sucesivamente.

Sustituyendo (7) en (4) y (5), para posteriormente sustituir el resultado en (3) se obtiene:

$$n_1 \left(\gamma_1 + \frac{x_1}{R_1} \right) = n_2 \left(\gamma_2 + \frac{x_1}{R_2} \right),$$

despejando γ_2 :

$$\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2} \gamma_1 + \frac{x_1 (n_1 - n_2)}{n_2 R_1}, \quad (8)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2} \gamma_1 + \frac{x_1 P_1}{n_2},$$

donde

$$P_1 = \frac{n_2 - n_1}{R_1}.$$

Es conocida como *potencia refractada* de la superficie 1 o simplemente potencia y es positiva dado a que $R_1 > 0$ y $n_1 < n_2$.

Por la geometría de la figura 4 y aplicando teoría paraxial, en general:

$$\dot{x}_j = \tan \gamma_j \approx \gamma_j,$$

entonces la ecuación (8) se transforma en:

$$\dot{x}_2 = \frac{n_1}{n_2} \dot{x}_1 + \frac{x_1 (n_1 - n_2)}{n_2 R_1}. \quad (9)$$

La altura del punto A no cambia en ambos lados de la superficie, entonces

$$x_1 = x_2. \quad (10)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (9) y (10) forman un sistema de ecuaciones que podemos representar como un sistema matricial.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix},$$

Donde

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Es la *matriz de refracción* de la superficie 1. El determinante de la matriz \mathbf{R}_1 es

$$|\mathbf{R}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{vmatrix} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Así se muestra que solo depende de los índices de refracción de los medios 1 y 2 por donde se propaga el rayo.

D. Matriz de transmisión \mathbf{T}

Ahora se obtendrá la matriz de transmisión del rayo dentro de la lente. Para ello, se considera las dos superficies de la lente. De la Figura 4 se observa que el rayo pasa por un punto A de la superficie 1, se propaga por la lente de índice de refracción n_2 y grosor d hasta llegar a un punto B de la

superficie 2, para luego salir a un medio de índice de refracción n_3 .

De la geometría de la figura 4, se muestra que:

$$x'_2 - x_2 = \Delta x = d \tan \gamma_2 \approx d\gamma_2. \quad (12)$$

El ángulo γ_2 no cambia del punto A al punto B . Pero la altura cambia de x_2 a x'_2 . Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'_2 = x_2 + d\gamma_2 \\ \gamma'_2 = \gamma_2 \end{cases}. \quad (13)$$

Aplicando la aproximación paraxial:

$$x_j = \tan \gamma_j \approx \gamma_j$$

A (13) se obtiene, ya en su forma matricial, el sistema de ecuaciones en términos de la altura y de la pendiente del rayo:

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ \dot{x}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Es la matriz de transmisión y su determinante es:

$$|\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

E. Matriz de refracción \mathbf{R}_2

El método de obtención de la matriz de refracción \mathbf{R}_2 es el mismo al anteriormente expuesto para la obtención de \mathbf{R}_1 , solo que ahora se considera los dos lados de la superficie 2.

En este caso, el rayo se propaga de un medio de índice n_2 a otro medio de índice n_3 . Entonces, la ecuación matricial de refracción de la superficie 2 es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ \dot{x}'_2 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de refracción para esta superficie es:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

El determinante de la matriz \mathbf{R}_2 es:

$$|\mathbf{R}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{vmatrix} = \frac{n_2}{n_3}.$$

Se ve claramente que el determinante depende solo de los índices de refracción de los medios 2 y 3 por donde se propaga el rayo.

La potencia en la superficie 2 es:

$$P_2 = \frac{n_2 - n_3}{R_2}.$$

Así, la potencia del rayo en la lente es:

$$P = P_1 + P_2.$$

F. Matriz ABCD de la lente gruesa

El producto de las tres matrices da como producto la matriz \mathbf{S} del sistema

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T} \mathbf{R}_1$$

o mejor conocida como la matriz $ABCD$ de la lente gruesa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (16)$$

Las componentes de la matriz son

$$A = 1 + \frac{d(n_1 - n_2)}{n_2 R_1},$$

$$B = \frac{dn_1}{n_2},$$

$$C = \frac{1}{n_3} \left[\frac{n_2 - n_3}{R_2} + \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{d(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)}{n_2 R_1 R_2} \right],$$

$$D = \frac{n_1}{n_3} \left[1 + \frac{d(n_2 - n_3)}{n_2 R_2} \right].$$

El determinante de la matriz de la lente gruesa es:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{R}_2| |\mathbf{T}| |\mathbf{R}_1| = AD - BC = \frac{n_1}{n_3},$$

se observa que solo depende de los índices de refracción de los medios 1 y 3.

IV. LENTE DELGADA

A. Matriz ABCD de la lente delgada

Se puede obtener la matriz ABCD de una lente delgada, a partir de la matriz de una lente gruesa, si se considera $d \rightarrow 0$, entonces se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_2 - n_3}{R_2} + \frac{n_1 - n_2}{R_1} \right) & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Si los medios 1 y 3 son aire, es decir, $n_1 = 1$ y $n_3 = 1$, se obtiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

B. Matriz ABCD de la lente delgada (Derivación alternativa)

Otra manera de obtener la matriz ABCD de una lente delgada es analizar la Figura 5, donde se muestra tres rayos distintos que se propagan dentro de la lente.

Primero se toma en cuenta el haz 2, en la figura se observa que si la lente es muy delgada las distancias x_1 y x_3 al eje óptico se consideran prácticamente iguales ($x_1 = x_3$), esto implica que $A = 1$ y $B = 0$ en la expresión (1a).

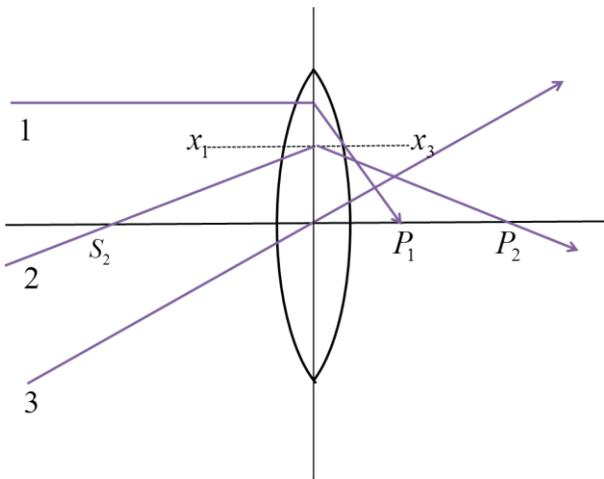


FIGURA 5. Esquema de la propagación de un rayo en una lente delgada.

Ahora considerando el haz 3 que es paralelo al eje óptico y pasa por el centro geométrico de la lente, dicho haz no se desvía, por definición. Entonces su pendiente permanece constante y la distancia al eje óptico es nula, por lo que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dot{x}_1, \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $D = 1$.

Finalmente considerando el haz 1 con pendiente cero (paralelo a eje óptico) al atravesar la lente y llegar al foco P_1 adquiere una pendiente $\frac{x_3}{f}$. La cantidad f es la distancia focal que se mide del centro de la lente al foco. Obtenemos entonces las relaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{1}{f} x_1, \\ \dot{x}_1 &= 0. \end{aligned}$$

por lo que $C = \frac{1}{f}$. Entonces, la matriz ABCD es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Comparando la matriz (17) con la matriz (19) se obtiene una relación que involucra la distancia focal con los índices de refracción de los medios y los radios de curvatura de la lente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_2 - n_3}{R_2} + \frac{n_1 - n_2}{R_1} \right) \quad (20)$$

si $n_1 = n_3 = 1$, es decir, la lente se encuentra en el aire, se obtiene:

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (21)$$

Que es conocida como la *ecuación de fabricantes de lentes*.

V. COMENTARIOS FINALES

Si ahora consideramos rayos propagándose a través de varios sistemas ópticos, uno seguido del otro y con su respectiva matriz ABCD, entonces la ecuación matricial que describe al fenómeno será:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que el producto de matrices es asociativo pero no conmutativo. Físicamente esto quiere decir que al variar el orden de los sistemas ópticos simplemente no se repetirá el mismo fenómeno que se observó en un orden anterior.

Por último, cabe mencionar que cualquier sistema óptico, en principio, tiene su respectiva matriz ABCD. Entre estos sistemas se pueden mencionar espejos, lentes planos, cóncavos o convexos, vidrio, etc.

REFERENCIAS

- [1] Blaker, J. W., *Geometrics optics. The matrix theory*, (Marcel Dekker Inc., New York, 1971).
- [2] Guenther, R. D., *Modern Optics*, (John Wiley & Sons, USA, 1990).
- [3] Hecht, E., *Óptica*, 3era. Ed. (Addison Wesley, Madrid, 2000).
- [4] Nussbaum, A., *Contemporary Optics for Scientists and Engineers. Solid State Physical Electronics Series*. (Prentice Hall, USA, 1976).
- [5] Resnick R, Halliday, D. y Krane, K. S., *Física Vol. 2*, 4ta. Ed. (Grupo Editorial Patria, México, 2009).

Enseñanza de plasmas físicos en el nivel medio superior



Fidel Benjamín Alarcón Hernández¹, María del Pilar Segarra Alberú²,
Jorge Barojas Weber²

¹Instituto Profesional de la Región Oriente, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
Cuernavaca, Morelos, México.

²Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
México D. F.

E-mail: honorato@unam.mx

(Recibido el 18 de Enero de 2014; aceptado el 10 de Junio de 2014)

Resumen

Se presenta una experiencia didáctica sobre el tema de plasmas físicos realizada con dos diferentes grupos de alumnos del Nivel Medio Superior del sistema de la UNAM. Un grupo con estudiantes de cuarto año de la Escuela Nacional Preparatoria del plantel # 8 Miguel E. Schulz, y el otro con estudiantes de sexto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH-Sur); ambos del turno matutino. La experiencia consistió en la ejecución de una secuencia didáctica presentada como un plan de clase, en la cual se conjugan el trabajo en equipos, la realización de experimentos y la discusión de ideas; todo bajo el esquema del modelo didáctico "Enseñar para la Comprensión. Los resultados obtenidos al final de la aplicación de la propuesta muestran aspectos positivos en cuanto a lo procedimental, lo conceptual y lo actitudinal, aún cuando el tema presentado (plasmas físicos) es totalmente nuevo en este nivel.

Palabras clave: Plasmas físicos, Enseñanza para la Comprensión.

Abstract

We present a didactic experience on the subject of physical plasmas developed with two different groups of high school students from UNAM. A group with fourth grade students of the National Preparatory School campus # 8 Miguel E. Schulz, and the other group with students in the sixth semester of the College of Sciences and Humanities (CCH South), both in the morning shift. The experiment consisted in the implementation of a teaching sequence presented as a lesson plan, in which we combine teamwork, performing experiments and discussion of ideas; all directed by the scheme of the didactic model "Teaching for Understanding. The results obtained at the end of the implementation of the proposal show that procedural, conceptual and attitudinal aspects evolve in a positive way, even when the topic presented (physical plasmas) is totally new in this level.

Keywords: Physical plasmas, Teaching for Understanding.

PACS: 01.40.-d, 01.40.gb, 52.50.b

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Cada vez son más las nuevas tecnologías y por lo tanto también más los contenidos académicos que dan explicación a la forma de operación de los aparatos con estas tecnologías los cuáles no son revisados en los diferentes colegios del país. Tratar de hacerlo implica un gran trabajo; en principio sería replantear los contenidos curriculares de alguna manera, o la forma en la cual se abordan los diferentes temas de los planes de estudio. Hacer lo anterior es necesario; pues se entiende que la educación y en particular la educación científica, es uno de los caminos que contribuyen de manera importante en los procesos de mejoramiento de las personas y, por lo tanto de las sociedades.

Las transformaciones de los últimos años que tienden a reformar y fortalecer los planes y programas de estudio en diversos países y en particular en México, muestran que el

ámbito educativo está buscando con estos cambios promover el desarrollo de los estudiantes para dotarlos de las herramientas y los conocimientos, así como de las habilidades y valores que los eduquen para "aprender a aprender, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser", los cuales se considera deben ser los ejes rectores que ordenen el proceso formativo durante la vida¹, de tal forma que sea posible la conformación de sociedades más justas, conscientes, y participativas.

Algunos estudios [1] señalan que la ciencia tal como se enseña actualmente, no resulta atractiva para los jóvenes.

En México, la situación general respecto de la educación en ciencias en el nivel medio superior es un tema preocupante, pues los resultados obtenidos en las diferentes

¹ Cuatro pilares de la educación según la UNESCO (1991).

pruebas que evalúan las competencias necesarias para la vida actual en lectura, matemáticas y ciencias, no son los deseados; se observa que los estudiantes (alrededor del 50%), no están siendo preparados para una vida productiva y eficiente en la sociedad actual [2].

Nuestro país tiene muy pocos estudiantes en los niveles más altos (menos de 1%), lo que significa que los alumnos de mejores resultados no están obteniendo las competencias que se requieren para desarrollar puestos de alto nivel en los diversos ámbitos de la sociedad [3].

De acuerdo con la prueba ENLACE 2012 [4], en lo que se refiere a habilidades matemáticas un gran porcentaje de los estudiantes se encuentran con un nivel de dominio insuficiente o elemental. En consecuencia las ciencias (en particular la física) no pueden estar mejor, pues existe entre ambas una interrelación temática y de desarrollo. Que suceda así, puede deberse a que generalmente los estudiantes en el nivel medio superior perciben la educación escolar como algo ajeno a su vida, lo aprecian como dos mundos diferentes. Por un lado están las creencias y concepciones acerca de los fenómenos que observan en su contexto, y por otro lado están las clases de ciencias que reciben en los colegios, donde se supone se estudia a la naturaleza en donde viven y los sucesos que ellos perciben.

Es necesario pensar y posiblemente replantear la manera de enseñar física para poder presentar una alternativa diferente, en la que el conocimiento escolarizado no esté descontextualizado, que no sea poco útil o poco motivante, que no esté centrada en contenidos declarativos y principalmente, que no haya una desconexión entre la teoría y la práctica [5].

“Desde hace tiempo, se ha visto la necesidad de incorporar a la enseñanza de las ciencias el estudio de los problemas y necesidades de la sociedad, a fin de que la escuela forme personas preparadas científicamente y tecnológicamente, que sean capaces de responder a las demandas de un mundo cada vez más tecnificado”.

La educación en las muchas etapas de la formación de un estudiante tiene propósitos diferentes, y en particular el nivel medio superior se puede considerar como una oportunidad para terminar de mejorar, los saberes fundamentales y de cultura general que un individuo debería manejar. En este punto, la educación científica es una de las vertientes imprescindibles que contribuyen con el entendimiento y cuidado de todo lo que se es, se hace o se piensa.

Si lo que se busca es formar ciudadanos capaces de solventar dificultades, habitantes consientes y sabedores de las complicadas situaciones que se aproximan; es necesario reconsiderar la dirección y meta a la cual se quiere llegar con la educación escolar. Si lo que se necesita es la transferencia de los conocimientos adquiridos en las aulas a situaciones reales que requieren de la aplicación de lo aprendido, es necesario afrontar y vivir tal escenario. Tal contexto, puede suceder e iniciar en las aulas y laboratorios [6], como lo muestra la secuencia didáctica aquí analizada.

En particular, el avance tecnológico ha evolucionado de manera muy rápida en las últimas décadas, lo que se puede

observar en nuestra forma de vida. Tenemos como ejemplos cotidianos el uso de teléfonos celulares, los ipod, los iphone, las televisiones de plasma, las calculadoras solares, la comunicación por fibra óptica, los localizadores y muchas cosas más. De entrada conocemos y podemos utilizar estos aparatos, sin embargo ignoramos los principios físicos de su manera de funcionar.

El contenido y estructura de la propuesta se planteó como una secuencia didáctica que se exhibe como un plan de clase, la cual se rige por la interacción de los alumnos y dispositivos experimentales con características de plasmas físicos, la discusión, el análisis, la respuesta de cuestionarios, la retroalimentación y la metacognición constante; todo mediante el trabajo en equipos.

El contenido, es para el profesor y busca brindarle una propuesta práctica y clara para presentar el tema de estudio. La manera en la que se despliegan las actividades, los cuestionarios y los experimentos, están pensados para favorecer el aprendizaje significativo y la constante interacción entre alumnos y profesor².

Dado que el tema de plasmas no está considerado en ningún plan de estudios del Nivel Medio Superior del país, y que su inclusión es por lo tanto totalmente nueva dentro del sistema; la propuesta se construyó a partir de casos cotidianos. En los que si bien no se consideran aspectos matemáticos, sí se resaltan los aspectos físicos y cualitativos de los plasmas, logrando así retomar directa o indirectamente varios de los temas de un curso intermedio de física.

II. SOBRE LA PROPUESTA

En el nivel medio superior en México, de acuerdo con diferentes programas de estudio³ se pretende una enseñanza que permita al estudiante modificar sus estructuras de pensamiento, mejorar sus procesos intelectuales y adquirir nuevos conocimientos útiles y actualizados del área en cuestión.

El último proceso de revisión de 1996 de los programas de estudio en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) y el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), permitió que el nivel medio superior de la UNAM se actualizara significativamente. Por otra parte, aunque en algunos otros bachilleratos buscando complementar los conocimientos en ciencia se imparten de manera optativa las asignaturas de Física III y IV, el papel que cumplen es principalmente propedéutico y/o de profundización de temas ya vistos, lo cual no da espacio a que se puedan presentar temas relativamente nuevos o relevantes tecnológicamente hablando.

² Quien esté interesado en conocer o leer la propuesta, puede solicitarla a la dirección electrónica: honorato@unam.mx

³<http://www.cch.unam.mx/programasestudio/>,
<http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/>,
<http://www.bachilleratosead.net/sitio/html/planh02.html>,
<http://www.cbti65.edu.mx/planes.html>,
http://www.dgeti.sep.gob.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=263&Itemid=665.

Particularmente, el contenido de plasmas no aparece explícitamente en los temarios de física de los diferentes bachilleratos de nuestro país, y en general no aparece en los temarios de física de los colegios de nivel medio superior de la UNAM⁴, sin embargo puede ser considerado para desarrollar el tema de plasmas físicos para nivel medio superior, fue básicamente por tres causas principales:

- Está ausente en la mayoría de los programas de estudio del país de nivel medio superior. No se considera aunque los alumnos preguntan sobre él desde la secundaria.
- Es generalmente desconocido por los estudiantes de nivel medio superior, así como por la mayoría de personas adultas.
- Se buscó trabajar en algo relativamente no muy tratado en México en este nivel⁵, pero que está presente en la tecnología utilizada diariamente.

El tema es interesante y en nuestro país novedoso, pero además permite presentar a los estudiantes y recordar a los profesores, que la física en principio, es una ciencia de carácter experimental, que está relacionada con el mundo en que vivimos y que no es algo puramente abstracto y sin relación con la naturaleza [7].

La enseñanza del tema permite entender y conocer aplicaciones tecnológicas cada vez más cotidianas y variadas, y en general ayuda a una más detallada descripción cualitativa del universo en que vivimos (el 99% del universo es un plasma) [8]. Un conocimiento básico de este tema es fundamental para el enriquecimiento de la cultura general de las personas.

III. MARCO TEÓRICO

La reflexión sobre las propuestas de enseñanza y aprendizaje de las ciencias experimentales y los resultados académicos de aprovechamiento obtenidos en cada una de ellas, induce a buscar un modelo coherente entre la teoría, la práctica y el ambiente de trabajo, que optimice y asuma los aspectos de planificación y desarrollo, y sea consecuente al mismo tiempo con la forma de aprender de quienes van a construir el nuevo conocimiento. Hoy en día, existen varias propuestas que consideran diferentes modelos didácticos, cuyas características son particulares y responden a diferentes planteamientos. Se tiene el modelo didáctico tradicional, el didáctico tecnológico, el didáctico alternativo, el comunicativo-interactivo, el activo situado, el colaborativo, el de enseñar para la comprensión y varios más.

En esta propuesta, se considera la implementación y el desarrollo del modelo didáctico de perfil constructivista: Enseñar para la Comprensión [9, 10], con el cual se busca contribuir al logro de aprendizajes significativos en los alumnos que estudien alguno de los temas de física como puede ser el tema de “plasmas”. Se eligió el modelo de Enseñar para la Comprensión por su estructura y finalidad, pues considera el comprender, promueve el aprendizaje, el pensamiento y la creatividad. Da oportunidades para rehacer el trabajo una y otra vez y la evaluación de lo aprendido es constante y hecha por el mismo estudiante y sus compañeros.

El modelo didáctico “Enseñar para la Comprensión”, consta de cinco elementos que se respaldan en la corriente filosófica llamada “Aprender Haciendo” [11]: Hilos conductores, tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión, y evaluación diagnóstica continua⁶. De forma general, establece el modo en el cual se aprende de manera factible, ordenada y sistemática.

Un grupo de investigadores colaboradores del proyecto conocido como “*Project Zero*” de la Universidad de Harvard, desarrolló el marco conceptual de “Enseñanza para la Comprensión” (EpC). El trabajo fue el resultado de un proyecto de colaboración directa entre investigadores y docentes que tomó bases teóricas desarrolladas por investigadores del mismo *Project Zero* como: David Perkins, Howard Gardner, Vito Perrone, S. J Bruner, R. F. Elmore, y M. W. McLaughlin [9].

“El aprendizaje para la comprensión se produce por medio de un compromiso reflexivo con desempeños de comprensión que se presenta como un desafío. Estos desempeños siempre se producen a partir de comprensiones previas y de la nueva información ofrecida por el entorno institucional. Aprender para la comprensión exige una cadena de desempeños de comprensión, de variedad y complejidad creciente; es pensar y actuar a partir de los conocimientos previos que el individuo tiene y de la nueva información y experiencias propuestas por el contexto institucional y social.”

No se comprende solo cuando se escucha a otro o al informarse, aunque estas acciones puedan resultar útiles en distintos momentos del proceso de comprensión; siempre la comprensión de un tema implica la elaboración de acciones de *comprensión*, es decir; la parte central del aprendizaje para la comprensión debe ser la realización de dichas acciones [12].

La Enseñanza para la Comprensión considera de principio que los estudiantes siempre tienen alguna idea sobre aquello que se desea que comprendan, aunque tales ideas intuitivas sean preconcepciones que los estudiantes poseen de su entorno y de la manera que éste funciona [13].

⁴ Programas de Estudio de Física I a IV, Área de Ciencias Experimentales, Colegio de Ciencias y Humanidades; Universidad Nacional Autónoma de México. Programas de Estudio de Física I a IV, Área I, Escuela Nacional Preparatoria; Universidad Nacional Autónoma de México.

⁵ La mayoría de los libros de texto de física sugerido como bibliografía básica en los programas de estudio y utilizado por los diferentes colegios de nivel medio superior en nuestro país, no tratan el tema de plasmas físicos; algunos ni siquiera lo mencionan.

Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 2, June 2014

⁶ La evaluación diagnóstica continua, se refiere a la consideración y comparación del estatus inicial de conocimientos, actitudes o cualquier elemento a evaluar de un alumno, con respecto al que tenga en un momento determinado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Tal comparación se debe llevar a cabo durante toda la actividad y busca colocar al individuo en su zona de desarrollo próximo.

La enseñanza para la comprensión por su estructura, se considera un *enfoque constructivista* [14], que comparte con otros enfoques la idea con respecto a la construcción de los conceptos que internaliza quien aprende, pero su aporte particular consiste en *conceptualizar los desempeños* que permiten tal construcción.

La enseñanza para la comprensión (EpC) tiene como herramienta básica el compromiso con la metacognición [15, 16], es decir, el proceso de pensar sobre la propia comprensión que se produce a través de un acto reflexivo e intencional. Responde fundamentalmente a tres preguntas:

1. ¿Qué es lo que realmente se quiere que los alumnos comprendan?
2. ¿Cómo se sabe que los alumnos comprenden?
3. ¿Cómo saben ellos que comprenden?

La primera pregunta se resuelve a través de tres elementos fundamentales de la propuesta: *hilos conductores, tópicos generativos y metas de comprensión*.

Las dos últimas interrogantes dan lugar a los otros elementos de la propuesta: *desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua*.

En particular para la propuesta planteada, se hace una descripción detallada de cada uno de estos elementos en la sección llamada implementación.

IV. METODOLOGÍA

El desarrollo de esta propuesta se llevó a cabo en dos etapas: la etapa de instrumentación y la de implementación.

La selección del material a considerar fue modificado paulatinamente hasta quedar en lo aplicado a los estudiantes de cuarto año de la Escuela Nacional Preparatoria del plantel # 8 Miguel E. Schulz del turno matutino; así como con los estudiantes de sexto semestre del turno matutino del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH-Sur).

Tras la interacción con ambas poblaciones de estudiantes y el trabajo con la secuencia didáctica, la planeación de la presentación del tema de plasmas se proyectó finalmente para un total de seis sesiones de 50 minutos de clase presencial; más cuatro adicionales para resolver tareas y cuestionarios en casa.

A. Instrumentación

La instrumentación de la propuesta se llevó a cabo considerando entre otros, los siguientes elementos: *Estilos de aprendizaje de los alumnos, trabajo en equipo y conocimientos previos sobre electromagnetismo*. Lo cual definió la manera de trabajar con los diferentes grupos.

Por otra parte, la cantidad de material considerado referente al contenido de plasmas dentro de la secuencia didáctica, se determinó con base a que el tema es relativamente desconocido por los estudiantes de nivel medio superior, así como por la mayoría de personas adultas. Es decir, se consideró necesario presentar como primer paso *una introducción al conocimiento de los plasmas desde una perspectiva cualitativa*, y hacerlo de una manera que permita a los estudiantes y recuerde a los

profesores que la física en principio *es una ciencia de carácter experimental*, que está relacionada con el mundo en que vivimos y que no es algo puramente abstracto y sin relación con la naturaleza; además, que un conocimiento básico de este tema es fundamental para la cultura general de las personas.

Básicamente, el contenido considerado es el siguiente:

- Importancia del concepto de plasma y lugares en el universo en donde hay plasmas.
- Descripción de los aspectos físicos básicos de los plasmas.
- Discusión y análisis de los efectos físicos relevantes en los plasmas.
- Entendimiento de la generación de los plasmas desde el punto de vista físico.
- Diferentes tipos de plasmas.
- Conocimiento y comparación de las diferentes aplicaciones tecnológicas.

A1. Estilos de Aprendizaje

Con el fin de optimizar desde un punto de vista pedagógico la planeación y diseño de la secuencia didáctica; se aplicó a los estudiantes el test de *Estilos de Aprendizaje*, de Honey-Alonso. Dicho test es anónimo [17, 18]. Este test, permite conocer la manera predominante de aprender de los estudiantes con los que se trabaja, y define y/o determina con un sustento más, la planeación de los diversos elementos de la secuencia didáctica.

De acuerdo con el test, las personas pueden ser asociadas con algún estilo según la siguiente descripción: estilo activo, estilo reflexivo, estilo teórico y estilo pragmático.

A1.1. Resultados del cuestionario CHAEA

(Cuestionario Honey-Alonso sobre Estilos de Aprendizaje) Los resultados del test aplicado permiten al docente definir cuál es la manera predominante de aprender de los alumnos de cada grupo. Así como de entender mejor los comportamientos, las actitudes y las respuestas que cada alumno puede dar a las actividades realizadas, logrando con ello una mejor evaluación.

Es importante notar que con la aplicación de este test se determina normalmente el estilo *predominante* de aprender de cada individuo, lo que no descarta la presencia en menor o igual porcentaje de los demás estilos.

En particular, la población de estudiantes con la que se trabajó tuvo un estilo de aprendizaje predominantemente reflexivo. En el caso del CCH-Sur, el estilo reflexivo y el pragmático tuvieron un mismo porcentaje, seguido por el teórico, y con menor presencia el activo. Para la ENP el estilo activo ocupó el segundo lugar, seguido por el práctico y al final el teórico.

Lo anterior muestra claramente la presencia de todos los estilos de aprendizaje, lo que indica que una planeación adecuada debería considerar variedad en las actividades a realizar.

A2. Trabajo en equipo

Los grupos se dividieron en equipos de cuatro integrantes por dos razones principales. La primera es referente a la cantidad de equipos experimentales disponibles para trabajar, y la segunda tiene que ver con el control general.

El número de dispositivos experimentales disponibles para llevar a cabo la clase era limitado, lo cual obligó a organizar el material como lo muestra la secuencia didáctica definitiva.

Sobre el control de grupo, se sabe que tener equipos permite dar instrucciones particulares y tener más atención de cada uno de los alumnos, estimula la participación activa y se logra observar con mayor claridad el comportamiento y actitud personal de cada estudiante. Además, ayuda a producir conocimiento desde el principio mediante la interacción entre pares y estimula el desarrollo del pensamiento reflexivo, la comunicación y socialización del pensamiento, la formulación de juicios, la distinción de valores y la apreciación de la opinión del otro. Así mismo, para aquellos alumnos que presentan problemas de aprendizaje y que en un contexto de clase tradicional corren el riesgo de salir mal; con esta metodología (trabajo en equipos), se les facilita la creación de estructuras que favorecen el desarrollo cognitivo. Formar parte de un grupo les permite superar sus propias deficiencias e inseguridades así como mejorar sus posibilidades de cara al futuro, pues el trabajo grupal *"tiene efectos que podrían considerarse terapéuticos sobre los alumnos que han desarrollado un patrón motivacional de miedo al fracaso"* [19].

Considerando lo anterior, se permitió que los equipos fueran formados por los alumnos según criterios propios.

A3. Conocimientos previos sobre electromagnetismo

Para determinar cuánto saben los estudiantes sobre los conocimientos básicos necesarios para entender la física desde un punto de vista *cualitativo* del tema de plasma, se aplicó un cuestionario de preguntas abiertas. A los alumnos que no tenían los conceptos claros, se les recordó la definición y el significado cualitativo mediante un análisis de las respuestas dadas, contestando en grupo y guiados por el profesor.

El cuestionario tenía como objetivos lograr que el alumno recuerde, escriba y asocie conceptos previos de física que están relacionados con el tema de plasmas, así como, que participe en un análisis dentro del salón de clase sobre los temas de estudio. Por otro lado, el objetivo operativo de la aplicación de tal cuestionario, era el de determinar el nivel conceptual y epistemológico del cual partir en el estudio del tema de plasmas.

A3.1. Resultados del Cuestionario Diagnóstico

- La mayoría de los alumnos conocen la definición de campo eléctrico y magnético pero no les queda clara la idea conceptual.

- Entienden lo que es un ion y pueden explicar cuál es su característica principal, sin embargo no distinguen claramente entre la ionización y la excitación.
- Muchos alumnos desconocen o no les es posible mencionar las propiedades físicas de la luz. Tampoco conocen la manera de generar ondas electromagnéticas.
- Los alumnos pueden decir que es un imán y cuáles son sus características, pero utilizan el concepto de metal indistintamente. Expresan que los imanes pueden atraer a cualquier *metal*.
- El concepto de vacío de *materia* es adecuadamente manejado.
- Más del 90% de los alumnos no manejan el concepto de potencial eléctrico. Tampoco el de diferencia de potencial.
- El modelo atómico de Bohr es bien conocido.

De la información obtenida mediante el cuestionario diagnóstico, se desprende que era necesario llevar a cabo una revisión de algunos de los conceptos examinados para poder seguir adelante en la aplicación de la secuencia didáctica de plasmas. Se trabajó con todos los conceptos, pero en particular se hizo con el concepto de excitación y su diferencia con la ionización. Así mismo, se aclaró la manera en la que se pueden generar ondas electromagnéticas y cuáles son sus principales características. Finalmente se explicó lo que es el potencial y su diferencia y se aclaró experimentalmente que los imanes no atraen a todos los metales.

B. Implementación

Se describe la forma en la cual se llevó a cabo la implementación final de la secuencia didáctica propuesta.

Dado que el modelo didáctico EpC observa cierta estructura para su aplicación, se detalla a continuación cada uno de los componentes y su respectivo elemento de aplicación utilizado en la secuencia didáctica.

Los *hilos conductores* elegidos son cuatro y se presentan a manera de preguntas:

- ¿Qué es un plasma físico y cuáles son sus características?
- ¿Cómo se puede generar un plasma?
- ¿Existen los plasmas en el universo?
- ¿Se utilizan los plasmas en el hogar? ¿Y en la tecnología?

El *tópico generativo* es el tema principal: los plasmas físicos.

Las *metas de comprensión* que deben ser alcanzadas por los alumnos son varias (13); están ordenadas por clase (primera, segunda y tercer clase) y se pueden observar en la secuencia didáctica. Van desde recordar y relacionar conceptos, hasta explicar fenómenos naturales y tecnología utilizada que se relacionen con el tema de estudio.

Durante el desarrollo de la propuesta y por sesión, se presentan de forma estratégica las *actividades de enseñanza* seguidas por el profesor, así como las *actividades de aprendizaje* efectuadas por los estudiantes, y en las cuáles se describen los *desempeños de comprensión* que los

alumnos deben realizar para demostrar y construir el entendimiento de las Metas de Comprensión.

Sobre las actividades de aprendizaje son variadas, van desde trabajar con dispositivos experimentales y responder cuestionarios, hasta escribir un ensayo. Las preguntas que constituyen a los cuestionarios son de diferentes tipos, hay de tipo conceptual, en estas los alumnos describen y tratan de explicar la idea relativa a algún concepto; también las hay de aplicación de ideas y de demostración de lo comprendido. Para las segundas, el intervalo de respuestas posibles es muy amplio y puede ser enfocado de diferentes maneras por cada estudiante, por lo que no hay una sola respuesta determinada y queda a criterio del profesor los comentarios posibles. Sobre las últimas, referente a la demostración de lo comprendido, se da la respuesta esperada a las preguntas planteadas en los cuestionarios de cada una de las actividades sugeridas. Tal respuesta se presenta en los anexos correspondientes de la secuencia didáctica.

En cada uno de ellos se describe de manera detallada los siguientes puntos para cada experimento propuesto:

1. Teoría del experimento.
2. Descripción del experimento propuesto.
3. Respuestas del cuestionario sugerido.
4. Bibliografía.

Es importante comentar que la teoría necesaria para responder los cuestionarios, exponer adecuadamente el contenido presente y guiar a los estudiantes durante el avance de la secuencia didáctica, se encuentra en los libros de texto y artículos de divulgación sugeridos [8, 20, 21, 22].

Dado que la secuencia tiene un enfoque apoyado en el *aprender haciendo*, la evaluación del aprendizaje se basa en criterios que son públicos y se conectan visiblemente con las Metas de Comprensión, es formal e informal y se observa al realizar los Desempeños de Comprensión. Cuenta con diferentes fuentes de retroalimentación (docentes, pares, el estudiante mismo) y algo muy importante; muestra el progreso y ofrece información para una futura planeación, logrando así ser una *evaluación diagnóstica continua*.

IV. RESULTADOS

Dado el tamaño de la muestra y el tiempo de aplicación de la propuesta, los resultados obtenidos son cualitativos y cuando más se pudieron observar tendencias generales de la mayoría y en algunos casos porcentajes de participación. Se analizan en función de cuatro diferentes puntos: Enseñanza para la Comprensión, Estilos de Aprendizaje, Trabajo en equipos y Avance conceptual.

A. Enseñanza para la Comprensión

Sobre el aspecto psicopedagógico y didáctico; el modelo Enseñanza para la Comprensión permite motivar a los estudiantes y acompañarlos en el proceso de educación, conocer la ubicación en la cual se encuentran respecto de su avance y aprovechamiento, da las herramientas necesarias

para establecer la planeación de lo que los alumnos deben realizar para lograr alcanzar las metas de comprensión y se consigue la formación integral de los estudiantes, pues en cada actividad se busca esté presente la metacognición. Considera la inclusión de los tres diferentes tipos de contenidos; el actitudinal, el declarativo y el procedimental de manera natural y promueve la investigación.

Este modelo por su estructura ayuda al profesor a tener mayor dominio de la materia en el salón y a tomar en cuenta entre otras cosas, las transformaciones en la disciplina, el conocimiento en su dimensión cultural y tecnológica, y el manejo de extensiones éticas como los valores y la actitud.

El modelo es muy flexible, y por lo tanto no necesariamente se deben de encasillar las cosas y seguir un desarrollo lineal de cada uno de sus componentes. Puede ser adaptado, y por lo mismo considerado en cualquier área de la enseñanza, pues da margen a trabajar con él de manera abierta y sistemática.

Desde el punto de vista disciplinario, el modelo permite a los estudiantes comprender, aprender y retener de manera significativa los conceptos básicos tratados, así como reconsiderar sus ideas previas y analizarlas a la luz de la experimentación en el trabajo con sus pares, logrando con ello una constante retroalimentación y crecimiento académico y personal.

Finalmente, desde la perspectiva socio-educativa, se logra que los alumnos tengan la habilidad de apoyar al conocimiento y de construirlo, en lugar de solo memorizar datos, procedimientos y fórmulas. Ayuda a que den sentido a lo observado, a que comprendan las relaciones que existen entre los experimentos y los conceptos; que razonen reflexivamente para poder determinar analogías, y a obtener conclusiones generales de situaciones en otros contextos, todo ello a partir de ideas y actitudes específicas aprendidas en las aulas.

Así mismo, es importante destacar que el trabajo en equipos, frente a grupo y de un tema que casi nadie conocía; permitió en los estudiantes la relativa libertad de expresión de ideas, generando en ellos el desarrollo de una actitud crítica, de responsabilidad y principalmente de compromiso.

B. Estilos de aprendizaje

Es importante comentar que los grupos con los que se trabajó, de acuerdo con el cuestionario CHAEA tenían una inclinación hacia el estilo de aprendizaje reflexivo, aunque también se observa que no solamente tienen uno, sino que están presentes los demás; lo que permitió que las diferentes actividades realizadas durante el desarrollo de la secuencia fueran bien aprovechadas, productivas e interesantes.

En general, en las clases se tienen alumnos con diferentes formas de aprender y aunque en este caso predomina el estilo reflexivo, lo cual sirve como un punto de referencia; siempre es importante considerar una propuesta que involucre una multitud variada de actividades

C. Trabajo en equipos y realización de experimentos

de enseñanza así como de aprendizaje, tratando de lograr que las clases sean interactivas y benéficas para todos.

Durante la aplicación de esta propuesta se notó claramente la diferencia de los distintos estilos de aprendizaje de los alumnos, los cuales, definieron la manera en la que impactó y funcionó en ellos la aplicación de esta propuesta. Hubo alumnos que estuvieron aparentemente muy cómodos y participativos durante la realización de los experimentos, y no tanto cuando tenían que ser espectadores; hubo otros que se desarrollaron muy bien cuando hicieron las presentaciones de los resultados encontrados, pero no participaban mucho en la realización de los experimentos. También se observó a algunos alumnos que no participaban mucho en la realización de experimentos y tampoco en las presentaciones públicas de resultados, pero comentaban discretamente sus observaciones con algunos compañeros para que ellos las dijeran al grupo o indicaban que era lo que se podía hacer para observar algún fenómeno de su interés. Se notó también, a algunos alumnos que buscaban hacer todas y cada una de las actividades y querían estar siempre supervisando lo que los demás hacían.

Dado que la respuesta a la aplicación de los cuestionarios que permite determinar los distintos estilos de aprendizaje fue anónima, no se pudo contrastar y confirmar qué alumno tiene qué comportamiento según su estilo de aprendizaje. Sin embargo se notó (por grupo) que prevalecía un estilo de aprendizaje determinado (el reflexivo), lo cual se manifestó al observar las respuestas dadas a los cuestionarios.

De las preguntas planteadas en cada uno de ellos, algunas se resuelven dando una descripción de los experimentos, o haciendo alguna actividad y observando, otras mediante la aplicación de conceptos y recurriendo a la teoría conocida, las cuales de manera general fueron correctas. También están las preguntas número cuatro de cada uno de los cuestionarios, en estas se pidió según la actividad experimental propuesta, una respuesta clara que dé explicación al acontecimiento físico que estaban presenciando. Para contestarla correctamente, los alumnos necesitaban observar y reflexionar, analizar detalladamente las diferentes características del fenómeno y tratar de entender lo que podría estar ocurriendo. Esta pregunta fue contestada correctamente por la mayoría de los alumnos y permite considerar según la dificultad de las respuestas que el grupo en general tenía un estilo de aprendizaje reflexivo.

Por otra parte, algo muy notorio durante la realización de esta propuesta y que permite afirmar que el integrar diferentes actividades y acciones para la optimización del aprendizaje de los alumnos los cuales tienen diferentes estilos de aprendizaje es muy importante, fue que en las respuestas dadas a los cuestionarios, en la participación de la presentación final y en la realización del ensayo, la respuesta de los alumnos fue en general muy buena y positiva. Lo cual hace ver que en definitiva cada alumno puede ser motivado a aprender un mismo tema con una actividad diferente, según su estilo de aprendizaje y su personalidad.

En cada equipo de trabajo, se observó el acomodo de los estudiantes al rol que más se acoplaban; se notó el estudiante que fungía como coordinador y organizaba, el que tomaba nota y hacía preguntas, el que hacía una y otra vez el experimento, y finalmente el que participaba con todos. También, por ser equipos de cuatro personas se notó en algunos de ellos que un elemento no sabía qué hacer y de qué manera contribuir, convirtiéndose por algunos momentos en sólo un espectador. Tal situación se resolvió al pedirles a los estudiantes en cuestión que cambiaran la actividad que desarrollaban dentro del equipo y llevaran a cabo una diferente.

Sobre la implementación y realización de los experimentos específicos por equipos, casi todos los estudiantes los llevaron a cabo sin ningún conflicto aparente y participaron activamente. Algunos equipos presentaban actitudes de leve resistencia a la realización de los experimentos y al uso de los dispositivos, no sabían que considerar o anotar cuando efectuaban las actividades y les costaba trabajo determinar qué era lo importante de su actividad. Fue hasta que se les dio el cuestionario a contestar referente a su experimento, que se observó se conducían con interés, de manera activa y buscando en particular obtener las respuestas que se les pedían, obteniendo con ello no solo lo pedido sino además explicaciones a algunos aspectos de los experimentos de sus compañeros.

Las presentaciones de sus observaciones las hicieron de forma clara frente al grupo, y estaban dispuestos a responder lo que podían según lo que entendían. Las respuestas de los cuestionarios de cada experimento, fueron entregadas sin falta y no solo con lo visto en clase, sino con información nueva y conceptualmente correcta.

De manera general, la organización por equipos permitió a los estudiantes integrarse a la realización de una actividad particular, la cual impulsó la colaboración entre ellos y que desarrollaran una actitud de compañerismo, respeto y responsabilidad.

Por otra parte, al profesor facilitó por un lado el control del grupo, y por otro la identificación y manejo de los alumnos que parecía no estaban motivados y requerían de un estímulo extra para integrarse y participar activamente en clase. Sin embargo, aunque las actividades en equipo permitieron un aprendizaje en conjunto fuertemente enriquecedor para todos los integrantes debido a que cada nueva propuesta es explorada y enriquecida por varias ideas, diferentes mentes y muchas historias distintas unas de las otras; el trabajo de orientación (realizado por el profesor) requirió de más paciencia y tiempo, pues se deben de escuchar todas las opiniones y considerar las múltiples respuestas que generalmente siempre son en parte correctas.

D. Avance conceptual

En general, los resultados que aquí se comentan se apoyan en la interpretación cualitativa de la información obtenida

de los materiales de evaluación (cuestionarios, realización de experimentos, comentarios y escritura del ensayo).

Por ser un tema totalmente nuevo en el programa de estudios del nivel medio superior del país, los estudiantes consideraban que no tenían conocimientos previos relativos al tema de plasmas como tal; sin embargo los alumnos expresaron algunas ideas de éste que tenía una gran relación con el tema.

Durante la realización del experimento demostrativo llevado a cabo por el profesor, los estudiantes reunidos por equipos tenían una actitud participativa, preguntaban, hacían comentarios y expresaban hipótesis sobre lo que creían que pasaría o pasaba al realizar algún cambio. Las hipótesis planteadas tenían que ver con sus experiencias con la electricidad. A continuación se presentan.

- *Cuando se aplique la diferencia de potencial en las terminales del dispositivo experimental, se generaran descargas eléctricas entre ellas y la superficie del dispositivo.*
- *Se escuchará un zumbido como el que caracteriza a los cables de las torres de alta tensión.*
- *Si acercamos nuestras manos o algún objeto, se verá un rayo que va de las terminales hacia el objeto.*
- *No pasará nada.*

Ningún estudiante pudo predecir la emisión de luz por el dispositivo al aplicarle la diferencia de potencial y después de haber hecho un vacío relativo. Los estudiantes se sorprendieron mucho cuando se generó la luz del plasma. debido a que no se tenía un circuito cerrado. Respecto del movimiento de la luz generada en el experimento al acercar un imán de alta intensidad, solo cinco estudiantes pudieron describir de entrada cual es la razón por la que aparentemente parece que es movida. Cuando se dio la explicación de la razón física de estos fenómenos, se pudo notar que el trabajo de las explicaciones al cuestionario diagnóstico permitió a los estudiantes comprender mejor que es lo que estaba pasando y les ayudo a poder expresar sus ideas utilizando conceptos como: ionización, voltaje, vacío, ondas electromagnéticas y excitación.

Este experimento definitivamente hizo que los estudiantes utilizaran los conceptos que se habían repasado y permitió que se dieran cuenta de su aplicación y significado físico, consiguiendo con ello que tuvieran un punto de asociación y el andamiaje de conocimientos se reforzara cuando dieron explicaciones particulares a los experimentos que cada equipo realizó.

Las respuestas correspondientes dadas a cada cuestionario según la actividad experimental que realizaron, en general fueron buenas, tenían un sustento físico y se notó que habían investigado en diferentes fuentes.

Para el experimento de la esfera de plasma, fue muy significativa la discusión que se generó, para dar respuesta a la pregunta número cuatro: ¿De qué depende que la luz que emite la esfera de plasma sea de diferente color?

Los estudiantes consideraron diferentes experiencias (el plasma de aire) y los dispositivos que estaban manejando sus compañeros (lámpara ahorradora). Consultaron manuales de operación y especificaciones de fabricación. Algunos alumnos, lograron argumentar utilizando el

concepto de energía de ionización de cada elemento y la frecuencia de emisión de luz según los niveles atómicos.

Por otra parte, para el experimento de la flama del mechero de Bunsen lo que más les llamo la atención fue el movimiento de la flama cuando se somete a una diferencia de potencial. De entrada creían que no pasaría nada, sin embargo al ver lo que ocurría iniciaron con la formulación de hipótesis. Pensaron en campos magnéticos dado el comportamiento aparente de atracción y repulsión, sin embargo fueron desechados como tal al darse cuenta que no atraía un trozo de fierro colgado de una madera.

Consideraron la definición de potencial eléctrico y lograron deducir entonces que una llama está formada en parte por iones.

Para el experimento de la lámpara ahorradora, les interesó mucho (quizá porque ya lo habían visto) que la lámpara se prendiera al acercarla a la esfera de plasma; sin embargo se sorprendieron mucho de que pasara lo mismo cuando observaron que no importaba el tamaño de la lámpara, o que se pusieran más de una, cerca de la esfera de plasma.

Por un lado, tras investigar el funcionamiento de estas lámparas pudieron dar repuesta al porque sucedía así, y por otro, lograron hacer uso y aplicación adecuado del Principio de Conservación de la energía, entendiendo que para que las lámparas emitieran energía en forma de luz, debían de estarla usando y obteniendo de algún otro lugar.

Respecto del experimento del tubo de Lenz, fue muy notorio que los alumnos pudieran responder adecuadamente a la pregunta número cuatro del cuestionario correspondiente. Utilizaron la Ley de Faraday, así como la de Ampere, y trataron de dar una explicación del por qué sucedía lo que observaron.

Finalmente, en la presentación del tema “Plasmas en el universo” llevada a cabo por el profesor, los estudiantes prestaron atención y tomaban nota de lo que les interesaba, hicieron comentarios, preguntas, y buscaban responder a lo que se les cuestionaba.

Sobre la escritura del ensayo relativo al tema de plasmas que se les solicitó y guiados por las ideas principales a considerar que se les indicaron; se podría decir que hicieron un trabajo adecuado, los conceptos nuevos que se trabajaron estaban presentes y en su gran mayoría con suficiente claridad. No se podría afirmar algo a favor o en contra, pues el tema se acababa de presentar; pero por otra parte, se les solicitó un trabajo que requirió de gran esfuerzo, en el cual debían de ordenar sus ideas, entender lo que querían decir, escribirlo correctamente y hacerlo al momento.

V. CONCLUSIONES

Con esta experiencia se puede afirmar que una secuencia como la aquí presentada, orientada por la interpretación constructivista y regida por la propuesta didáctica “Enseñanza para la Comprensión”, ayuda, apoya y guía adecuadamente a los docentes en el trabajo diario dentro de las aulas, y permite a los estudiantes colocarse en su zona

de confort y de desarrollo próximo [23]; aún con un tema totalmente nuevo y desconocido para ellos.

Es significativo destacar que las actividades experimentales tienen un valor e importancia muy amplio dentro de la enseñanza de las ciencias, y se da un cuenta de ello al analizar el desarrollo y actitud de los alumnos tanto en las actividades experimentales como en las de resolución de cuestionarios que solicitan teoría.

Al realizar los experimentos, los alumnos valoran mucho más el trabajo llevado a cabo por ellos mismos y la ejecución de lo que ellos deciden relativo al tema, que lo que se les impone o indica y no les interesa. Es trascendental entender, que el laboratorio, la realización de experimentos, la discusión y análisis de ellos por parte de los alumnos guiados por el profesor; son indispensables para un buen inicio del aprendizaje y la comprensión.

En general, se concluye que la propuesta didáctica presentada, impacta positivamente en el proceso de aprendizaje de los alumnos, y permite al profesor ubicar a los estudiantes que requieren de algún tipo de ayuda.

Se puede afirmar que la situación en la cual se halla la enseñanza de las ciencias, no encuentra dificultades y complicaciones insalvables en los contenidos, o en la manera en la que son organizados e introducidos a los estudiantes; sino en la forma en cómo se enseñan. Prueba de esta afirmación, fueron las respuestas dadas por los estudiantes a las diferentes actividades planteadas.

Es fundamental por tanto, identificar los aciertos y errores durante el quehacer diario con los alumnos, como un primer paso para avanzar hacia la transformación de la labor docente, así como de la forma de involucrarse en el proceso educativo. La problemática asociada con el aprendizaje y la enseñanza, requiere indispensablemente de una aproximación a diversas áreas del conocimiento humano como son la pedagogía, la psicología, la epistemología, la didáctica, los aspectos disciplinares, las implicaciones sociales, etcétera; de tal manera que ello permita entender al docente las experiencias que vive el alumno cuando se involucra en cualquier actividad de aprendizaje. Que la enseñanza de la física se realice de diferentes maneras pero con características que proyecten a la materia como algo teórico o como fuera del contexto de lo cotidiano y sin aplicación real, ya no tiene cabida en la enseñanza. Las asignaturas de ciencias deben ser impartidas con un enfoque que considere la parte experimental, así como la pluralidad de modalidades de enseñanza y aprendizaje.

Una visión multidisciplinaria, indudablemente ayudará al docente a reconocer que su papel ya no puede limitarse a pedir a los alumnos que reproduzcan los contenidos del programa curricular, sino que debe asumir su papel de acompañante a través del camino cognitivo que permita a los aprendices lograr avances importantes en la construcción de nuevos saberes, en donde ellos tengan una participación activa en ese proceso constructivo.

Por otra parte, para que la eficiencia de aprendizaje en toda actividad incremental, se requiere del interés por aprender de los alumnos, interés que de alguna manera promueve y motiva el profesor con la planeación adecuada y multifactorial que realiza. Se necesita pues de un

Enseñanza de plasmas físicos en el nivel medio superior compromiso entre las dos partes, donde prevalezca la cooperación y comunicación, amable, respetuosa y motivada [24].

REFERENCIAS

- [1] Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., e Hemmo, V. http://www.oei.es/salactsi/Informe_Rocard.pdf, Consultado el 10 de Agosto de 2010.
- [2] UNAM, www.journals.unam.mx/index.php. Consultado el 16 de Agosto de 2010.
- [3] U.S. Government, Department of Education. The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel; 2008.
- [4] SEP, http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/informes_de_resultados. Consultado el 06 de Enero de 2012.
- [5] Díaz Barriga, F., *Enseñanza situada: Vínculo entre la escuela y la vida*, Mc Graw Hill. México, 2006.
- [6] Peralta, J.A., *Los signos, la enseñanza, la historia*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 655 - 660 (2012)
- [7] Newman, R. J., *El mundo de las matemáticas*, Vol. 5, (Grijalbo, España, 1980).
- [8] Bravo S., *Plasmas en todas partes*; (FCE, Colección La Ciencia desde México, 2001).
- [9] Pogrè P., *Escuelas que enseñan a pensar: enseñanza para la comprensión, un marco teórico para la acción*. 1° ed, (Papers Editores, Buenos Aires, 2004).
- [10] Stone W. M., *Enseñanza para la comprensión, vinculación entre la investigación y la práctica*, (Paidós, Buenos Aires, 1999).
- [11] Brubacher, J. S., *John Dewey*, En: J. Château (dir). *Los Grandes Pedagogos*, (Fondo de Cultura Económica, México, 2000).
- [12] Perkins, D., & Blythe, T., *Putting understanding up front*. Educational Leadership **51**, 4-7 (1994).
- [13] Campanario, J. M. y Otero, J., *Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de ciencias*. Enseñanzas de las Ciencias **18**, 155-169 (2000).
- [14] Carretero M., *Constructivismo y educación*, (Ed. Luis Vives, Buenos Aires, 1993).
- [15] Sanjurjo, L. O., *La metacognición: Un concepto estructurante para la didáctica*. En: Fundamentos psicológicos de una didáctica operativa, Aebli, H., Colussi, G. y Sanjurjo, L., (Homo Sapiens, Buenos Aires, 1995). Cap. III, pp. 77-93.
- [16] Colussi, G., *Las investigaciones en metacognición. Reconsideraciones teóricas*. En Fundamentos psicológicos de una didáctica operativa. Aebli, H., Colussi, G. y Sanjurjo, L. (Homo Sapiens, Buenos Aires, 1995). Cap. III, pp. 77-93.
- [17] Alonso, C. M., Gallego D. J., y Honey, P. *Estilos de Aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora*. Universidad de Deusto. (Edit. Mensajero, Bilbao, 1999).
- [18] Alonso C. M., Gallego D. J. y Honey P., http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Especialidad/Modulo2_PDF/ESTEM02T05P04.pdf.

Fidel Benjamín Alarcón Hernández et al.

[19] Huertas J. A., *Motivación, Querer aprender*, (Aique Grupo Editor S.A, Argentina, 1997).

[20] Forrest I. B., *Plasmas en el laboratorio y en el cosmos*. (Reverté, España, 1968).

[21] Rodríguez, Y., Martínez, H.. *Plasmas, aplicaciones en la vida diaria. Narraciones de la ciencia*. Inventio, La génesis de la cultura universitaria en Morelos, 5, 49-53, (2007).

[22] Martínez, H., Alarcón, H. F. B., *La sangre del Universo: El plasma*, Hypatia Revista de Divulgación Científico-Tecnológica del Estado de Morelos **43**, 6-7, (2012).

[23] Vigotsky, L., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, (Editorial Crítica, México, 1988).

[24] Huertas J. A., *Motivación, Querer aprender*, (Aique Grupo Editor, Argentina, 1997).

Modeling the one-dimensional oscillator with variable mass

Hilário Rodrigues¹, Nelson Panza¹, Dirceu Portes¹, and Alexandre Soares²

¹Departamento de Física, CEFET/RJ, Avenida Maracanã, 229, 20271-110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

²Departamento de Matemática, CEFET/RJ, Avenida Maracanã, 229, 20271-110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

E-mail: harg@cefet-rj.br

(Received 24 February 2014, accepted 30 June 2014)

Abstract

We discuss the general form of Newton's second law valid for describing the dynamics of one-dimensional variable mass systems. We thus obtain the equation of motion of the one-dimensional oscillator with a variable mass, which is modeled as a quadratic function of time. The obtained equation of motion is numerically solved by means of a simple procedure. The work is addressed to physics courses at undergraduate level.

Resumen

Se discute la forma general de la segunda ley de Newton válida para describir la dinámica de los sistemas de masa variable de una dimensión. Obtenemos así la ecuación de movimiento del oscilador unidimensional con una masa variable, que se modela como una función cuadrática del tiempo. La ecuación obtenida de movimiento es numéricamente resuelta por medio de un procedimiento simple. La obra está dirigida a los cursos de física a nivel de pregrado.

Keywords: Newton's second law, variable mass systems, oscillators.

PACS: 45.20.D-, 46.40.-f, 45.20.da

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

In mechanics, variable-mass systems are systems which have mass that does not remain constant with respect to time. In such systems, Newton's second law of motion cannot directly be applied because it is valid for constant mass systems only [1, 2]. Instead, a body whose mass m varies with time can be described by rearranging Newton's second law and adding a term to account for the momentum carried by mass entering or leaving the system [1, 6].

Due to some conceptual difficulties, this topic is not commonly addressed in basic physics courses. Thus, it may be interesting to propose new approaches to the topic for students of science and engineering at undergraduate level.

In this work, we derive the correct form of Newton's second law applied to single-degree of freedom systems with a time-variable mass. Then, we describe the dynamics of the single one-dimensional oscillator with the mass modeled by a quadratic function of time. The obtained equation of motion is solved by using a suitable numerical procedure for given initial conditions.

The work is mainly addressed to undergraduate students and teachers. The study of this topic requires acquaintance with basic concepts of calculus and physics at intermediate level.

II. NEWTON'S SECOND LAW FOR VARIABLE MASS SYSTEMS

Consider a particle of mass m which is moving with velocity v at time t . Under the action of the force F between the time instants t and $t + dt$, its velocity changes from v to $v + dv$. According to Newton's second law, the change of the linear momentum, dp , is given by

$$dp = F dt, \quad (1)$$

where $p = mv$. For constant mass, the previous equation entails

$$m \frac{dv}{dt} = F. \quad (2)$$

Equation (2) represents Newton's second law commonly presented in textbooks. This form is particularly useful in obtaining the equation of motion of a constant mass particle. Equation (1) leads to an alternative form of Newton's second law, however:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv). \quad (3)$$

When applied to describe the dynamics of a constant mass particle, equations (2) and (4) provide equivalent expressions of Newton's second law. Furthermore, those equations are invariant under the Galilean transformation, defined by

$$x' = x - ut, \quad v' = v - u, \quad (4)$$

where u is the velocity of the primed frame of reference relative to the unprimed frame.

The description of a variable-mass system is a bit more difficult. In order to explore this point, let us apply the Galilean transformations (4) to the equation of motion (3).

The invariance of Newton's second law enforces that the equation of motion in the primed frame of reference must retain the same form of equation (3):

$$F' = \frac{d}{dt}(mv'). \quad (5)$$

The time derivative in the right-hand side yields

$$F' = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}(v - u). \quad (6)$$

and hence

$$F' = \frac{d}{dt}(mv) - \frac{dm}{dt}u \neq F. \quad (7)$$

So, the equation of motion (3) is not Galilean invariant when the particle mass is time dependent. In order to properly obtain the equation of motion, we have to apply the principle of conservation of linear momentum for the entire system, which is the basic principle behind the Newton's second law. Thus, consider a single-degree of freedom system with a time varying mass m , as illustrated in Fig. 1.

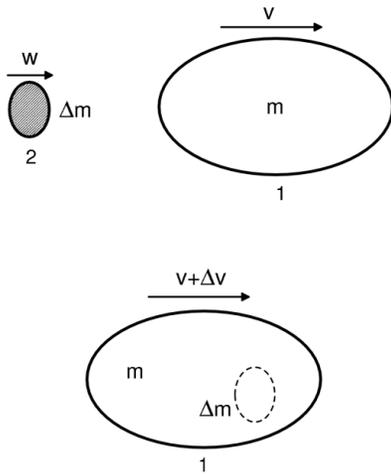


FIGURE 1. The particle of mass Δm and velocity w collides with a particle of mass m and gets stuck in it (upper part). After the process, the new particle of mass $m + \Delta m$ moves with velocity $v + \Delta v$ (lower part).

The system (the body labeled 1 in the figure) moves with velocity v at the time t . The particle of mass Δm (labeled 2 in the figure) and mean velocity w collides with the system during a time interval Δt , imparting mass to the system. Assuming that the mass of the entire system is conserved

during the collision, the new mass and the new velocity of the original system increase to $m + \Delta m$ and to $v + \Delta v$, respectively. The linear momentum of the system at the time t is thus given by $p(t) = mv + (\Delta m)w$, while the new linear momentum at the time $t + \Delta t$ reads $p(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(v + \Delta v)$. Hence, the change in the total linear momentum is

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v - \frac{\Delta m}{\Delta t}(w - v). \quad (8)$$

Taking the limit $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta m \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$ in equation (8), one arrives to

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt}(w - v), \quad (9)$$

where $w - v$ is the velocity of the incoming mass with respect to the centre of mass. Combining equations (3) and (9) one obtains

$$F = m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt}(w - v), \quad (10)$$

which in turn can be put in the form

$$m \frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt}(w - v), \quad (11)$$

F being the net external force acting on the system. Analogously, for the case $dm/dt < 0$ (system losing mass) we would obtain

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt}(w - v), \quad (12)$$

Equations (11) and (12) describe the motion of a time varying mass particle, and represent the proper extension of Newton's second law. The term $\frac{dm}{dt}(w - v)$ in the right-hand side of both quoted equations should be interpreted as a real force acting on the particle, apart from the external force F . For the particular case $F=0$, the equation (12) leads to the simplified equation of motion

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt}(w - v), \quad (13)$$

Equation (13) is known as the rocket equation, which describes the motion of rockets drifting in the free space. The relative velocity $w-v$ represents the velocity of gases escaping from the rocket, and is often called the *exhaust velocity*, and denoted by v_e [5, 7].

Also note that equation (10) may be put in the form

$$F = \frac{d}{dt}(mv) - \frac{dm}{dt}w, \quad (14)$$

which entails that equation (14) recovers equation (3) in the particular case $w=0$.

Finally, it is easy to verify that equation (14) is invariant under Galilean transformation.

III. ENERGY BALANCE

The kinetic energy of the system at the time t is given by

$$T(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Delta mw^2, \quad (15)$$

while at the time $t + \Delta t$ the kinetic energy is

$$T(t + \Delta t) = \frac{1}{2}(m + \Delta m)(v + \Delta v)^2. \quad (16)$$

Neglecting higher order terms in Δm and Δv , the change in the kinetic energy reads

$$\Delta T = mv\Delta v + \frac{1}{2}\Delta m(v^2 - w^2), \quad (17)$$

which leads to

$$\frac{dT}{dt} = m \frac{dv}{dt} v + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (v^2 - w^2). \quad (18)$$

Inserting (11) into the right-hand side of equation (18), we obtain the power supplied by the force F , which reads

$$Fv = \frac{dT}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (w - v)^2. \quad (19)$$

The time derivative of the kinetic energy of the particle 1 is explicitly given by

$$\frac{dT_1}{dt} = m \frac{dv}{dt} v + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2, \quad (20)$$

from which equation (18) can be put in the form

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT_1}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} w^2. \quad (21)$$

Then, inserting (21) into the right-hand side of (19) one obtains

$$Fv = \frac{dT_1}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} w^2 + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (w - v)^2. \quad (22)$$

Notice that for the case $\frac{dm}{dt} < 0$ (system losing mass) we would obtain instead

$$Fv = \frac{dT_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} w^2 - \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (w - v)^2. \quad (23)$$

In order to analyze the role of each term present in the right-hand side of equations (22) and (23), consider for the sake of illustration a one-dimensional system with only two forms of energy: the kinetic energy T and the internal energy U . (The reasoning used hereinafter in this section are not completely valid for the system described in the next sections, where other forms of energy are present, like gravitational potential energy and elastic potential energy.) So, the total energy can be written as $E=T+U$. Assuming no heat transfer between the system and the external environment it follows that

Modeling the one-dimensional oscillator with variable mass

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}. \quad (24)$$

Comparing equations (19) and (24) we get

$$\frac{dU}{dt} = \pm \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (w - v)^2, \quad (25)$$

where the sign $+$ ($-$) stands for $dm/dt > 0$ (< 0).

Equations (24) and (25) tell that the work done by the external force F is not entirely converted into kinetic energy.

Regardless whether the system is losing or acquiring mass, part of that work is transformed into internal energy. In short: a particle of variable mass behaves like a dissipative system.

If we ignore external forces when two masses hit and stick together, it follows from (24) that

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}. \quad (26)$$

Equation (26) refers to totally inelastic collisions, which entails that the change in kinetic energy during this class of collisions is negative. This explains what happens to the kinetic energy: it mostly goes into internal energy and heat, and some of it goes into sound waves, etc.

IV. MODELING THE VARIABLE MASS OSCILLATOR

In order to model the variable mass oscillator, consider a leaking bucket of water which is attached to a spring, as illustrated in Fig. 2. The water exits out the bucket through a small hole at the bottom. Assume that the mass loss of water and the motion of the oscillator are along a line (the z -axis).

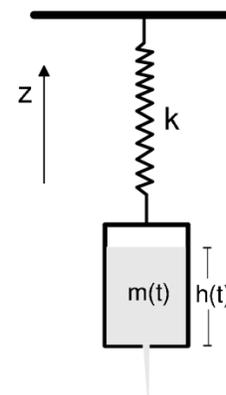


FIGURE 2. Oscillator with a variable mass. A bucket of water which is attached to a spring. The water flows out through a small hole in the bottom of the bucket.

In this situation, and ignoring friction, the system is subjected to the action of three different forces, namely, the elastic force exerted by the spring, the weight of the oscillator, and the force exerted by the leaking water. In accordance with equation (12), one obtains [6]:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dm}{dt}q - kz - mg, \quad (27)$$

where $q = w - v$, $z(t)$ is the displacement of the centre of mass measured from the initial equilibrium position; w is the mean velocity at which the water leaves the system; $v = dz/dt$ is the velocity of the oscillator; k is the stiffness coefficient of the linear restoring force; and g is the acceleration of gravity.

Now, imposing the conditions $w = v = 0$, $\frac{dm}{dt} = 0$, and $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ at the time $t = 0$, provide the equilibrium position

$$z_0 = -\frac{m(0)g}{k}, \quad (28)$$

where $m(0)$ is the initial mass of the oscillator. If m is constant, the system would oscillate around the equilibrium position z_0 . So, by means of the transformation

$$z \rightarrow z + z_0. \quad (30)$$

The equation (27) turns into

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dm}{dt}q - kz + (m(0) - m)g. \quad (31)$$

So, the "instantaneous" equilibrium position at every time t is computed by

$$z_0(t) = \frac{m(0) - m(t)}{k}g, \quad (32)$$

which entails that as the water leaves the leaking bucket, the equilibrium position undergoes a continuous upward movement.

The mass of water within the bucket has a quadratic dependence on the time (see appendix for details of calculation), which is given by

$$m_w(t) = m_w(0) \left(1 - ft \sqrt{\frac{g}{2h_0}}\right)^2, \quad (33)$$

where $m_w(0)$ is the initial mass of water, $f = \frac{a}{A}$, is the ratio between the cross-sectional areas, and h_0 is the initial height of the column of water. The mass of the oscillator is given by the summation of the mass of the bucket m_b , and the time-varying mass of water $m_w(t)$.

Assuming the leaking of water occurs at a very low rate, one can neglect the effect of the first term on the right side of equation (31) on the dynamics of the oscillator. The equation of motion thus reads

$$(m_b + m_w) \frac{d^2z}{dt^2} = -kz + (m_w(0) - m_w)g. \quad (34)$$

V. NUMERICAL SOLUTION

According to equation (33), the bucket of water is completely empty after the elapsed time given by

$$\tau = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (35)$$

For the time interval $0 \leq t \leq \tau$ the equation of motion (34) can be put in the form

$$a = \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz - (m_w(0) - m_w)g}{m_b + m_w}, \quad (36)$$

After the elapsed time τ , the oscillations are governed by the equation of motion

$$a = \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz - m_w(0)g}{m_b}, \quad t \geq \tau. \quad (37)$$

Henceforth we discuss approximate solutions of equations (36) and (37). With this aim, we use a simple numerical method which can be implemented, for example, in electronic calculators or even by using the Excel spreadsheet.

Thus, consider a generic function of time $y(t)$. We can assign to the time derivative of $y(t)$ the approximate expression

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \quad (38)$$

which can be a good approximation if the time step h is small enough. This allows to compute the approximate value of y at the time $t + h$:

$$y(t + h) \approx y(t) + h \frac{dy}{dt}, \quad (39)$$

provided the time derivative of y at the time t .

Thus, consider the first order differential equation

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (40)$$

Euler method consists of using (39) as the approximate solution of the differential equation (40). So, assign a value for the time step h , and set $t_0 + h$. Now, the first step from t_0 to $t_1 = t_0 + h$ yields the new value of y :

$$y_1 = y(t_0 + h) = y_0 + hf(t_0, y_0). \quad (41)$$

After n successive steps, we get

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad (42)$$

where $y_n = y(t_n)$.

Further improvements of the Euler method allows approximate solutions of higher accuracy. One of these improvements is the midpoint method, which consists of taking function evaluations at the time step $t_n + \frac{h}{2}$, and then

applying the Euler method using these evaluations. So, following this method we have first to compute

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n), \quad (43)$$

and then obtain the value of the function at the time $t_n + h$:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}), \quad (44)$$

where by definition $t_{n+1/2} = t_n + h$. Note that in equation (44) the derivative function $f(t, y)$ is evaluated at the midpoint time $t_n + \frac{h}{2}$, and not at the time t_n .

In order to numerically solve equation (36) valid for the time interval $0 \leq t \leq \tau$, we first compute $z(t)$ and $v(t)$ at the time step $t_n + \frac{h}{2}$:

$$z_{n+1/2} = z_n + \frac{h}{2} v_n, \quad (45)$$

and

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2} a_n, \quad (46)$$

where

$$a_n = -\frac{kz_n - (m_w(0) - m_w(t_n))g}{m_b - m_w(t_n)}, \quad (47)$$

with $z_n = z(t_n)$ and $v_n = v(t_n)$. The next step provides:

$$z_{n+1} = z_n + h v_{n+1/2}, \quad (48)$$

and

$$v_{n+1} = v_n + h a_{n+1/2}, \quad (49)$$

where now

$$a_{n+1/2} = -\frac{kz_{n+1/2} - (m_w(0) - m_w(t_{n+1/2}))g}{m_b - m_w(t_{n+1/2})}. \quad (50)$$

In order to compute the dynamical evolution of the oscillator for $t \geq \tau$, the equation (37) must be replaced by

$$a_n = -\frac{kz_n - m_w(0)g}{m_b}, \quad (51)$$

at the time t_n .

VI. RESULTS

In this section we present results obtained for the case of a bucket of mass $m_b = 1.0$ kg, filled with the initial mass of water of $m_w(0) = 10$ kg with a column of initial height $h_0 = 0.5$ m. The bucket of water is attached to the spring of stiffness coefficient $k = 100$ N/m. The mass of the oscillator is given at every time by $m(t) = m_b + m_w(t)$, $m_w(t)$ being the time varying mass of water.

Modeling the one-dimensional oscillator with variable mass

The algorithm for solving the equations (36), (37) comprises the following steps. First, assign initial values to all variables: the elapsed time $t = 0$; the initial position $z = z(0)$; the initial velocity $v(0)$; the initial mass of water $m_w(0)$; the initial height of the water column h_0 ; the value of the ratio between the cross-sectional areas $f = a/A$. Assign values to constants g , k , and the mass of the bucket m_b . Then, compute the position $z_{n+1/2}$ at the time step $t_n + h/2$, given by equation (45); compute the acceleration step a_n at the time step t_n , given by equation (47) for $0 \leq t \leq \tau$, and by equation (50) for $t \geq \tau$; then, compute the velocity $v_{n+1/2}$ at the time $t_n + h/2$, given by equation (46). Compute the acceleration $a_{n+1/2}$ given by equation (50), or by (51) if $t \geq \tau$. Now, compute the new values of v and z by using equations (49) and (48). The time t is incremented by h at each step. The new values of the mass of water within the bucket $m_w(t)$ is directly obtained from equation (33) as the function of time.

We start with the initial condition $z(0) = 0$ and $v(0) = 0$. Thus, the change of the dynamical state of the system is initially caused by the change in mass of the oscillator with time. We also compute the elastic potential energy U_k , and the gravitational potential energy, W , which are given respectively by

$$U_k = \frac{1}{2} k \left(z - \frac{m_0 g}{k} \right)^2,$$

and

$$W = (m_b + m_w(t))g.$$

The mechanical energy of the system is given by the summation of the elastic potential energy, the gravitational potential energy and the kinetic energy, namely $E = T + W + U_k$.

In the carried out numerical simulations we adopt the value $h = 0.01$ s for the time step. With this step we need a few thousand steps to perform the simulation. Assigning for the ratio $f = a/A$ the value $f = 0.01$, for example, the water takes tens of seconds to exit the leaking bucket. So, this does not demand a huge computational time, providing however a very accurate numerical result.

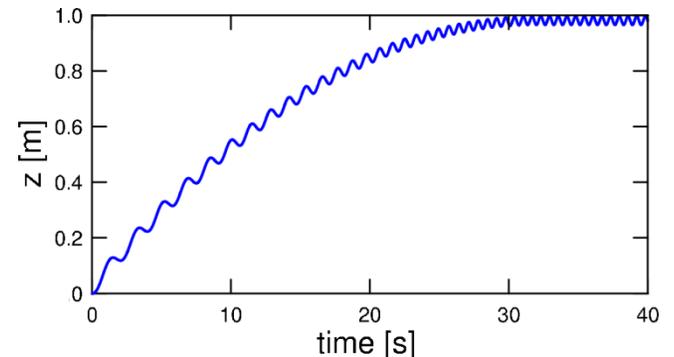


FIGURE 3. Position as a function of time for the value $f=0.01$. The used values of the other parameters are $g=9.8$ $m \cdot s^{-2}$, $k=100$ N/m , $m_b=1.0$ kg (mass of the bucket), $m_w(0)=10$ kg (initial mass of water), and $h(0)=0.5$ m (initial height of the water column).

Figure 3 depicts the behavior of the position of the oscillator as a function of time for the adopted values of the model parameters outlined in the caption of the figure. Notice that the "instantaneous" equilibrium position of the oscillator moves upward while the water within the bucket flows out.

The oscillations are obviously caused by the action of the restoring force, as the mass of the oscillator decreases. In special, one notices that the amplitude of the oscillations decreases, while the frequency increases as the mass of the oscillator decreases. The final equilibrium position, around which the system oscillates for $t > \tau$, can be computed by using equation (28), which in the present case has the value $0.98 m$.

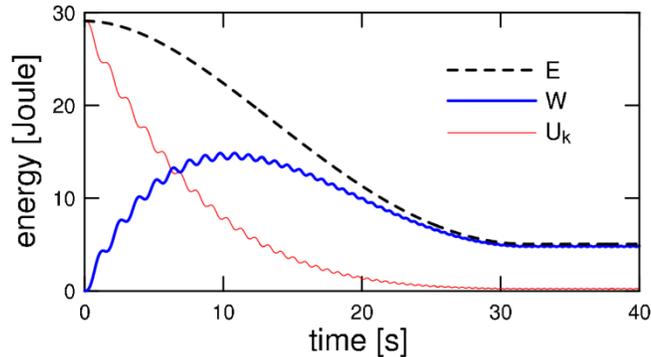


FIGURE 4. Energy as a function of time for $f = 0.01$. The values of the other model parameters are the same used in the previous figure.

Figure 4 shows the behavior of the energy of the oscillator as a function of time for the same set of values of the parameters used in Figure 3. As discussed in Section III we can see that the total energy of the oscillator is dissipated due to the mass loss of the system.

VI. CONCLUSIONS

In this work, we discuss the appropriate form of Newton's second law applied to single-degree of freedom systems with a time variable mass. We present a set of equations which are used to model the dynamics of a one-dimensional oscillator with a time-varying mass. The dependence of the mass on the time is taken into account, by means of a simple modeling (the leaking bucket of water) where the mass of the oscillator has a quadratic dependence on time.

The resulting equation of motion is numerically solved in terms of the improved Euler method, and some results for chosen values of the model parameters have been presented and discussed in the text.

According to the results obtained by the numerical simulations, the system shows a typical oscillatory behavior with "amplitude" and "frequency" which vary as the water leaves the bucket. At the end, there remains only the bucket that oscillates like a one-dimensional harmonic oscillator with constant amplitude and frequency.

This study, despite its simplicity, is intended to be used as a useful approach for students get acquainted with the physics of systems with time-varying mass at the undergraduate level.

The conclusions must notice the new and remarkable contributions of the paper. Also the suggestions and shortcomings of the manuscript must be pointed out.

REFERENCES

- [1] Feynman, R. P., Leighton, R. B. and Sands, M., *The Feynman lectures on physics, Vol. 1* (Addison-Wesley, USA, 1964).
- [2] Plastino, A. R. and Muzzio, J. C., *On the use and abuse of Newton's second law for variable mass problems*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **53**, 227-232 (1992).
- [3] Symon K. R., *Mechanics, 3rd ed.* (Addison-Wesley, USA, 1971).
- [4] Alonso, M. and Finn, E. J., *Physics, Vol. 1* (Academic, New York, 1992).
- [5] Campos I., Jiménez, J. L., and Del Valle, G., *Canonical treatment of the rocket with friction linear in the velocity*, *Eur. J. Phys.* **24**, 469-479 (2003).
- [6] Irschik, H. and Holl, H. J., *Mechanics of variable-mass systems. Part 1: Balance of mass and linear momentum*, *Appl. Mech. Rev.* **57**, 145-160 (2004).
- [7] Rodrigues, H., Pinho, M. O., Portes, Jr D., and Santiago, A. J., *Modeling the dynamics of bodies self-propelled by exponential mass exhaustion*, *Eur. J. Phys.* **29**, 527-537 (2008).

APPENDIX

Let us thus consider a cylindrical bucket of water with cross-sectional area A with a column of water of height h . At the bottom of the bucket there is a small hole with cross-sectional area a , with $a \ll A$, through which the liquid flows out under the action of the gravity force.

As depicted in Figure 2, we place the point of reference 2 at the free liquid surface, and the reference 1 at the bottom of the bucket. Neglecting losses, which is reasonable if the hole is tiny and the storage bucket is large and wide, we can apply the Bernoulli equation:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho Q^2 + \rho g(z_1 + h) = p_1 + \frac{1}{2}\rho q^2 + \rho g z_1, \quad (A1)$$

where p_1 and p_2 are the pressure at the bottom of the bucket and at the free liquid surface, respectively. The upper part of the bucket is open to the atmosphere, and the water leaks the bucket freely through the hole in the bucket bottom. So, we have $p_1 = p_2 = p_0$, where p_0 is the local atmospheric pressure. Q is the velocity at the free liquid surface and q is the exit velocity of the water; h is the height of the free liquid surface relative to the bottom; ρ is the density of the liquid; and z_1 is the position of the bottom of the bucket in along the z -axis.

Because of the large cross-sectional area A in comparison with the hole, the velocity Q can be set equal to zero. Thus, we can make these substitutions into the Bernoulli equation to obtain

$$q = \sqrt{2gh}. \quad (\text{A2})$$

Notice that equation (A2) is valid even when the surface level is decreasing due to water leakage, provided that the time rate of change of h and Q is sufficiently small. The rate at which the height h decreases with time can be used to calculate the rate of loss of mass, applying the mass balance on the content of the bucket. In fact, from the equation of continuity the rate of loss of mass is related to the mass flow through the equation

$$\frac{dm}{dt} = -\rho qa. \quad (\text{A3})$$

On the other hand, the mass of water stored in the bucket at time t is given by

$$m(t) = \rho Ah(t). \quad (\text{A4})$$

Modeling the one-dimensional oscillator with variable mass where $h(t)$ is the height of the water column within the bucket.

Inserting (A2) into (A3) yields

$$\frac{dm}{dt} = -\rho a \sqrt{2gh(t)}. \quad (\text{A5})$$

From (A4), one can put (A5) in the form

$$\frac{dm}{dt} = -f \sqrt{\rho A} \sqrt{2gm}, \quad (\text{A6})$$

where $f = \frac{a}{A}$. Thus we find

$$\frac{dm}{m^{1/2}} = -f \sqrt{\rho A} \sqrt{2g} dt. \quad (\text{A7})$$

Integrating the equation (A7), we obtain the mass of water within the bucket as a function of time, given by equation (33).

¿Es estable el Sistema Solar?



José J. Arenas

*Jefe del Departamento de Física, Instituto Monterroso,
C/Santo Tomás de Aquino S/N, C.P.: 29680, Estepona, Málaga, España*

E-mail: arenasferrer@hotmail.com

(Recibido el 27 de Febrero de 2014; aceptado el 16 de Junio de 2014)

Resumen

En bachillerato y primeros cursos universitarios, el Sistema Solar se enseña como ejemplo de la Ley de Gravitación y del determinismo newtoniano. Sin embargo, la estabilidad del Sistema Solar ha sido objeto de amplios estudios por los más grandes físicos y matemáticos de todos los tiempos. Lagrange y Laplace iniciaron los primeros análisis rigurosos en los siglos XVIII-XIX, y a ellos siguieron otros gigantes como Poincaré y, más recientemente, Kolmogorov, Arnold, Moser, Laskar, etc. La pregunta en su sentido clásico: ¿Es estable el Sistema Solar? se refiere a si los planetas colisionarán entre sí o, por el contrario, algunos de ellos escaparán al infinito. En este artículo se analizará el estado de la cuestión revisando las fuentes originales de los autores y se propone que se incluya en el currículum académico.

Palabras clave: mecánica celeste, estabilidad del Sistema Solar, problema de los n cuerpos, caos, determinismo

Abstract

In high school and early college courses, the Solar System is taught as an example of the Law of Gravitation and Newtonian determinism. However, the stability of the Solar System has been object of research by the most important physicists and mathematicians of all times. Lagrange and Laplace began the first rigorous analysis in the 18th and 19th centuries, and others followed such as Poincaré and, more recently, Kolmogorov, Arnold, Moser, Laskar, etc. The question in its classic sense: Is the Solar System Stable? refers to if planets will collide with each other or, on the contrary, some of them will escape to infinity. This article will analyze the state of the art reviewing the original sources of the authors.

Keywords: celestial mechanics, stability of the Solar System, n -body problem, chaos, *determinism*

PACS: 01.65.+g, 45.50.Jf, 45.50.Pk,

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Los esquemas y análisis sobre las órbitas planetarias del Sistema Solar suelen adoptar un formato sencillo en la enseñanza secundaria y primeros cursos universitarios, ya que se basan en modelos de dos cuerpos en que uno de masa m orbita en torno a otro de masa $M \gg m$, pudiendo considerarse así en reposo al segundo de ellos. Sin embargo, incluso en los complejos cálculos de trayectorias suele obviarse la tendencia natural del sistema dinámico a largo plazo si tenemos en cuenta otras fuerzas gravitatorias, es decir, realmente ¿Es estable el Sistema Solar?

Esta pregunta surgió de forma natural tras los trabajos sobre gravedad y órbitas planetarias de Kepler y Newton [1] del siglo XVII, ya que en estos no se incluía la interacción que los planetas ejercían entre sí. Estas interacciones aumentaban la complejidad en el cálculo de trayectorias, ya que se pasaba de un problema de dos cuerpos a un problema de n cuerpos. Por tanto, el Sistema Solar, en caso de no ser un sistema integrable, podría resultar caótico (término aún no acuñado en aquellos años). El sentido clásico de la pregunta se refiere a si los planetas colisionan entre sí o escaparán al infinito con el paso del tiempo, y como veremos

en un recorrido de siglos, la respuesta, especialmente la analítica, es de una extraordinaria complejidad histórica.

Desde las primeras investigaciones al respecto de la mano de Laplace en 1796 [2] hasta las modernas contribuciones relacionadas con la expansión cosmológica [3, 4] y las simulaciones de Laskar y otros [5, 6, 7, 8, 9] de 2009, han sido muchos los grandes físicos y matemáticos que han tratado de resolver uno de los grandes retos de la física clásica. Esta cuestión ha sido muy bien señalada y esbozada por algunos autores como Moser [10], Szebehely [11], o, más recientemente, Solé-Manrubia [12]

II. KEPLER Y NEWTON: GERMEN DEL PROBLEMA

Entre 1609 y 1618, apoyado en las observaciones del astrónomo Tycho Brahe, Johannes Kepler estableció un modelo heliocéntrico sobre el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol. Las tres leyes enunciadas por Kepler se pueden resumir de la siguiente forma (entre paréntesis escribimos parte de las palabras textuales de Kepler del Libro Quinto, Las Armonías del Mundo:

III. LAPLACE Y JACOBI: PRIMEROS ANÁLISIS

a) Ley de las Elipses

Los planetas describen órbitas elípticas en su movimiento alrededor del Sol, estando este en uno de sus focos (*demostrado está también por mí, al mismo tiempo, ser elíptica la órbita del planeta, y estar el Sol, fuente del movimiento, en el otro foco de esa elipse*).

b) Ley de las áreas

El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales (*a supuestos tiempos iguales, pongamos un día natural en ambos casos, los correspondientes arcos diarios verdaderos de una órbita excéntrica mantienen entre sí proporción*).

c) Ley Armónica

Los cuadrados de los periodos T de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores a de la elipse, es decir, $T^2 = k \cdot a^3$. Siendo k una constante de proporcionalidad (*es cosa certísima y en todo exacta que la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquiáltera entre las distancias medias*).

Las leyes de Kepler eran descriptivas, para la fundamentación hubo que esperar a Isaac Newton y sus célebres *Principia de 1687*. En concreto, en la Sección XI (*Del Movimiento de Cuerpos que tienden unos a otros con Fuerzas Centrípetas*), Newton aborda con rigor el movimiento de los cuerpos en relación con las Leyes de Kepler. Así, en la Proposición LXV, Teorema XXV, expone:

Teorema I

“Varios cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias desde sus centros, pueden moverse entre sí en elipses, y describir mediante radios trazados a los focos áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos”.

Seguidamente podemos leer un comentario que ya contiene el germen del problema;

“Se ha demostrado en la proposición anterior el caso en el cual los movimientos ocurren exactamente en elipses. Cuanto más se aparte la ley de las fuerzas de la ley allí propuesta, tanto más perturbarán los cuerpos sus mutuos movimientos; y tampoco es posible que los cuerpos, con atracción mutua según la ley aquí supuesta, se muevan en elipses exactas, salvo que mantengan entre sí determinada proporción de distancias(...) pero los cuerpos pequeños pueden disminuirse tanto que dicho desvío, con las interacciones mutuas, sean menores que unas dadas y, por tanto, hasta que las órbitas coincidan con elipses y las áreas respondan a los tiempos sin mayor error que uno dado”.

Así, aunque el determinismo newtoniano se asentó rápidamente a lo largo de toda Europa, fue el propio Newton quien puso de manifiesto la imprecisión de las trayectorias elípticas keplerianas si se tenían en cuenta las perturbaciones gravitatorias de otros planetas. En cualquier caso, el científico inglés atribuía a una inteligencia divina el reajuste de las órbitas para que estas funcionaran eternamente como un reloj.

La monumental obra newtoniana dejó alguna cuestión sin resolver, como por ejemplo: *¿Por qué las órbitas de los dos planetas mayores, Júpiter y Saturno, a veces se retrasan y otras se adelantan respecto a sus predicciones teóricas?*

Pierre Simón de Laplace estudió esta aparente inestabilidad planetaria y publicó sus conclusiones en *Exposition Du Systeme Du Monde (1796)* y en *Mécanique Céleste (primera vez en la historia en que se aplica esta expresión)*, cuyo primer volumen apareció en 1799. Así, el francés demostró que las perturbaciones orbitales no eran acumulativas como temía Newton, sino que se repetían con un periodo de 929 años. Además, inspirado en un trabajo de Lagrange de 1766 (que no reproduciremos aquí debido a su extensión), Laplace también demostró que la excentricidad de las órbitas planetarias está acotada inferior y superiormente. Con estos y otros estudios como la vinculación de aceleración media de la Luna con la disminución de la excentricidad terrestre quedó aparentemente zanjada la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar. Sin embargo, los análisis laplacianos sólo se basaban en observaciones, con lo que quedaban fuera del estudio las perturbaciones no advertidas y sus efectos a largo plazo, en esta línea encontramos un primer análisis teórico del problema en 1842, el cual es poco conocido a pesar de que su autoría pertenece a Carl Gustav Jakob Jacobi [13].

En las lecciones sobre dinámica que Jacobi impartió en la Universidad de Königsberg durante el semestre de invierno del curso 1842-43, se encontraba un capítulo (*Lectura 4, Principio de Conservación de la “Vis Viva”*) en que profundizaba en el teorema de las fuerzas vivas y su relación con el potencial. Tomando el Sistema Solar como un sistema de masas puntuales, Jacobi obtuvo una relación general entre el momento de inercia del sistema (R) y el potencial gravitatorio total (U) que, particularizado en \mathbb{R}^3 era;

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h'. \quad (1)$$

Siendo h' una constante de integración.

Sin embargo, a pesar del ingenioso método que se puede leer en sus *lecciones*, Jacobi reconoce al final del capítulo que la anterior ecuación no le condujo a conclusiones definitivas ya que (entre otras razones) al integrar la expresión anterior, sólo se obtienen soluciones dependientes de parámetros desconocidos, los cuales acota basándose en la hipótesis inicial de un sistema planetario estable.

IV. POINCARÉ: EL CONCURSO DEL REY

Desde que Halley observó en 1682 el cometa que lleva su nombre y predijo acertadamente que regresaría en 1758 (desgraciadamente, como tantas veces en ciencia, no vivió para comprobar su logro), la mecánica de Kepler-Newton se había convertido en la manifestación del gran poder de la razón frente a la religión en cuanto a explicar las leyes de los

cielos. De tal forma, se esperaba que algún científico con la voluntad e inteligencia necesarias resolviera la cuestión, ya que el ambiente intelectual de la época no contemplaba problemas irresolubles. Así, el ya conocido como *Problema de los n cuerpos* topó con un año clave en su historia: 1885.

Con motivo del cumpleaños del Rey Óscar II de Suecia y Noruega, G. M. Leffer, profesor de matemáticas de la Universidad de Estocolmo propuso en 1884 al monarca la realización de un concurso matemático. Finalmente, tras aceptar la propuesta, se compuso un jurado formado por Weierstrass, Hermite y el propio Leffer. De los cuatro problemas de que constaba el concurso, el que pasó a la historia fue el propuesto por Weierstrass:

“Dado un sistema formado por un número arbitrario de puntos materiales que se atraen mutuamente de acuerdo con las leyes de Newton, se propone, bajo la hipótesis de que un choque entre dos o más partículas no tiene nunca lugar, desarrollar las coordenadas de cada partícula en una serie procedente de funciones conocidas en el tiempo y que sean uniformemente convergentes para cualquier valor de tiempo”.

La verdadera dificultad del reto residía no ya en encontrar las soluciones del sistema dinámico, sino en demostrar su existencia. Henri Poincaré, durante los tres años concedidos para resolver el problema, se sumergió en la cuestión.

Desde la comodidad que ofrecía la mecánica de Hamilton-Jacobi que reducía el orden de las ecuaciones diferenciales, Poincaré partió del concepto de integrabilidad de sistemas dinámicos dado por Liouville en 1840:

Teorema II

“Si existen $f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ independientes y en involución (paréntesis de Poisson nulos), donde $k = 1, \dots, n$, $f_i = H$, entonces el sistema hamiltoniano H es integrable”.

En definitiva, para que un sistema hamiltoniano de n variables sea integrable, debe haber n constantes de movimiento, las cuales no siempre son sencillas de encontrar. En referencia a ello, los *Métodos Nuevos de la Mecánica Celeste Tomo I* (Poincaré, 1892), se estudia el sistema Sol-Tierra-Luna (problema de los tres cuerpos) de hamiltoniano:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}. \quad (2)$$

En donde m_i representa las masas, p_i el momento y r_{ij} la distancia entre la i -ésima partícula y la j -ésima.

En el espacio euclídeo tridimensional dicho sistema consta de 18 variables entre momentos y posiciones, pero podemos reducir la dimensión del sistema gracias a las 10 constantes de movimiento conocidas (que derivan del centro de gravedad como sistema de referencia en reposo, momento angular constante y conservación de la energía). Así, el sistema Sol-Tierra-Luna queda con 8 variables. La pregunta oportuna es *¿habrá más constantes de movimiento?* La respuesta a la cuestión se cerró con Poincaré;

Teorema III

“No existe ninguna otra constante de movimiento que reduzca la dimensión del sistema”.

Como consecuencia de este rígido teorema, el problema de los 3 cuerpos fue el primero en mostrar al mundo todo un universo de dinámicas irregulares, concluyendo que la no integrabilidad del problema de los tres cuerpos podría implicar, generalizando a los n cuerpos, la inestabilidad del Sistema Solar (Peterson, 1994). En consecuencia, Poincaré obtuvo que el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar prácticamente no se repetía nunca, al menos con total exactitud. Paradójicamente, el futuro, a pesar de ser determinista, era impredecible.

El gran enfoque de Poincaré se basó en la observación de que la mayoría de los problemas de la Mecánica Celeste se pueden clasificar como *sistemas hamiltonianos próximos a integrables*, lo que hoy conocemos como *Teoría de Perturbaciones*.

De esta forma, se pueden encontrar coordenadas de acción-ángulo (I, w) en las que el hamiltoniano adopta la forma simplificada:

$$H(I, w) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, w). \quad (3)$$

En donde $H_0(I)$ es integrable y $\varepsilon H_1(I, w)$ es pequeño. En nuestro caso, el planetario, $H_0(I)$ representa la energía de los planetas en órbita alrededor del Sol si despreciamos las interacciones entre ellos (movimiento kepleriano), y $\varepsilon H_1(I, w)$ representa las interacciones de los planetas entre sí (mucho menor que la atracción ejercida por el Sol, ya que el pequeño parámetro ε es del orden de las masas planetarias). S representa la función generadora (la nueva transformación canónica para el hamiltoniano perturbado H) necesaria para encontrar unas nuevas coordenadas (I', w') en forma de series en ε . Así, Poincaré obtuvo:

$$S_1(I', w) = wI' + i\varepsilon \sum_{m \neq 0} \frac{H_{1,m}(I') e^{imw}}{m\Omega}. \quad (4)$$

En donde Ω representan las frecuencias planetarias y

$$m = 2\pi(m_1, m_2, \dots, m_n), \forall i/m_i \in \mathbb{Z}.$$

Se podría pensar que con este desarrollo ya estaba resuelto el problema del movimiento de los planetas, ya que tomando cada vez más términos en las series se obtienen aproximaciones del movimiento cada vez más afinadas. Sin embargo, para garantizar la estabilidad a largo plazo, la serie debe converger, por lo que $m\Omega \neq 0$.

De tal forma, la serie diverge si:

$$m\Omega = m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + \dots + m_n \Omega_n = 0. \quad (5)$$

Es decir, cuando haya resonancias entre las frecuencias.

Poincaré demostró que tomando un número creciente de términos en las series, a partir de un cierto momento, las soluciones se deterioran. Así, el francés, parecía indicar que ninguna órbita iba a ser eternamente estable, lo cual

planteaba otra pregunta: si además, ha quedado demostrado que no hay más leyes de conservación ¿por qué se comportaban los planetas con tanta regularidad desde hace 4500 millones de años? A pesar de no responder definitivamente a la pregunta de Weierstrass, Poincaré ganó el concurso del Rey Óscar publicando parte de sus resultados en [14].

Llegamos así a una situación peor que la posible anulación de los divisores en algunos términos de la serie, y es que incluso en el caso estricto en que $m\Omega \neq 0$, es decir, cuando las frecuencias sean inconmensurables, siempre se puede encontrar un conjunto de valores de m tales que:

$$m\Omega < \delta. \quad (6)$$

Con δ escogido arbitrariamente pequeño, provocando la divergencia de las series. Surgió así en Teoría de Números el problema de los denominadores pequeños [15, 16].

IV. KOLMOGOROV, ARNOLD Y MOSER: TEOREMA KAM

Según Weierstrass, la estabilidad no podía depender únicamente del carácter racional de las medidas del cociente de las frecuencias, dada la imposibilidad de medir tales magnitudes con semejante precisión. Surgió así una elegante conexión entre la Mecánica Celeste, la Teoría de Números, y la Teoría Geométrica de la Medida, ya que:

¿Hasta qué punto los números irracionales se pueden aproximar a racionales?

Siempre podemos encontrar aproximaciones racionales para un número irracional, como por ejemplo $7/5$ para $\sqrt{2}$.

De igual forma, podemos aproximar un número irracional “tanto como queramos” si usamos números racionales con denominadores grandes. Sin embargo, de todo ello se abre una cuestión sutil:

¿Se puede calificar a un irracional de mal aproximable o bien aproximable, en el sentido de que a los irracionales bien aproximables podemos acercarnos con lentitud, a través de números racionales de denominadores pequeños?

Joseph Liouville también se interesó por esta cuestión, llegando al siguiente teorema de 1840:

Teorema IV

Para cada algebraico α de grado $n > 1$, existe una constante $A(\alpha) > 0$, tal que:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^n}, \quad (7)$$

se cumple para todos los números racionales p/q .

A la anterior desigualdad se le llamó condición diofántica [17]. Este teorema, que ya muestra la limitación de acercarse con precisión arbitraria a los números racionales, dejaba el cabo suelto del exponente n . Tras una larga búsqueda de mejoras al Teorema de Liouville, a mitad del siglo XX, el teorema de Liouville fue mejorado por Roth;

Teorema V

El Teorema de Liouville también se cumple para un exponente:

$$2 + \epsilon, \forall \epsilon > 0. \quad (8)$$

Por lo que le fue concedida la medalla la medalla Fields en 1958.

El resultado fundamental que combinaba las nociones de Teoría de Números con los sistemas hamiltonianos próximos a integrables llegó con Kolmogorov [18], Arnol'd [15] y Moser [10] en los años cincuenta y sesenta del siglo pasado.

Los estudios de los tres matemáticos se concentraron en el conocido como Teorema KAM [18, 19, 20, 21] que, enunciado en una de sus múltiples versiones:

Teorema VI

Dado el hamiltoniano $H(\mathbf{I}, \mathbf{w}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \mathbf{w})$, con ϵ suficientemente pequeña cumpliendo una de las dos condiciones:

i. H_0 es integrable no degenerado

ii. H_0 es isoenergéticamente no degenerado,

para todas las Ω satisfaciendo la condición diofántica:

$$|(m, \Omega)| \geq \frac{A(\epsilon)}{|m|^r}, \text{ con } r > (n + 1), |m| = \sum_{i=1}^n |m_i|,$$

Existe \tilde{T}_Ω , toro invariante del hamiltoniano $H(\mathbf{I}, \mathbf{w})$, cercano al toro invariante T_Ω del sistema no perturbado, sobre el que el flujo es conjugado del que se tenía en T_w . Dado un compacto foliado por toros de H_0 , el conjunto de puntos de él no pertenecientes a algún \tilde{T}_w tiene medida relativa que tiende a cero si ϵ lo hace.

Aunque, debido a su complejidad, queda fuera del objetivo del presente artículo la demostración y profundización de todos los conceptos que aborda dicho teorema, sí podemos decir coloquialmente que el Teorema KAM expone que los sistemas hamiltonianos débilmente perturbados tienden a mantener su estabilidad. Asumiendo que el Sistema Solar pertenece a este tipo de sistemas, este ha sido el resultado analítico más importante en la historia del problema.

Aunque en la década de 1960 todavía existían astrónomos convencidos de la existencia de leyes de conservación suplementarias como única explicación posible de la estabilidad del Sistema Solar, el Teorema KAM respondió a cuestiones de Mecánica Celeste de forma misteriosa, mediante Teorías de Números y probabilidades (cuanto mayor sea el parámetro ϵ , menor será la probabilidad de que el sistema sea estable).

V. ANDERSON Y LASKAR: NUEVAS VÍAS

Aunque el Teorema KAM asestó un duro golpe al problema, pronto surgieron nuevas ideas a la luz de los descubrimientos cosmológicos del siglo XX y el salto de gigante de las simulaciones por ordenador.

Edwin Powell Hubble demostró bajo el método observacional la expansión del Universo en 1929, aunque la autoría del descubrimiento es controvertida porque también

se asigna el descubrimiento a Lemaitre en 1927 (publicado como noticia en Nature en Noviembre de 2011). Según la Ley de Hubble las galaxias se alejan unas de otras a una velocidad v proporcional a distancia R que las separa;

$$v = HR. \quad (9)$$

En donde H es la llamada constante de Hubble, cuyas medidas de 2011 [22] arrojan un valor de $67.0 \pm 3.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Sin embargo, los modelos cosmológicos basados en la Teoría del Big Bang parecían sugerir que H podría variar lentamente a lo largo del tiempo. Así, a esta “constante” se le ha ido llamando progresivamente parámetro de Hubble. El valor de dicho parámetro depende del tiempo en la forma:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(1 + q). \quad (10)$$

Por tanto, el parámetro de Hubble aumenta o disminuye según el signo del conocido como *parámetro de deceleración* q . En un principio se pensaba que $q \geq -1$, lo que correspondería a $\dot{H} \leq 0$, ya que ello implicaría que la expansión decelera o permanece constante debido a la fuerza gravitatoria que gobierna el Universo. Sin embargo, el descubrimiento de un valor $q < -1$ en algunas observaciones de supernovas, revolucionó la Cosmología de la mano de Riess en 1998 al implicar que la expansión cosmológica se estaría acelerando.

De acuerdo con lo anterior, queda patente que la expansión afecta a la mecánica de las galaxias, pero ¿afectará también a escalas más pequeñas? Anderson, en 1995, demostró que sí. Comenzaron así a estudiarse los efectos de la expansión cosmológica a la escala del Sistema Solar como perturbaciones en el problema de los dos cuerpos, considerándola como una corrección de la ley de gravitación newtoniana. Por tanto, aunque la perturbación sea pequeña, quizá podría desestabilizar a nuestro sistema planetario en un futuro. Bajo esta moderna vía de estudio, Sereno y Jetzer obtuvieron en 2007 que, en un escenario pesimista y despreciando los efectos de la materia oscura, el radio orbital divergiría y ocasionaría que el Sistema Solar se disocie tras un intervalo de tiempo:

$$\Delta t_{dis} = \int_{z_{dis}}^0 \frac{dz}{(1+z)H(z)}, \quad (11)$$

en donde el parámetro z (corrimiento al rojo) proviene del efecto Doppler que se mide mediante: $1 + z = \frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{emitida}}$, siendo λ la longitud de onda de la luz solar.

A pesar del gran resultado obtenido, ya que ofrece una solución numérica al problema del orden de 10^9 años, este no es definitivo puesto que depende del comportamiento a largo plazo de la energía oscura y este tampoco es un tema cerrado.

En una revisión de la cuestión encargada por la E.S.A. (2010), Carrera y Giulini, consideraron un solo planeta del Sistema Solar, con lo que la escala de tiempo relevante del problema es el periodo de las órbitas alrededor del Sol, por

lo cual asumieron el parámetro de Hubble como constante (H_0) durante una órbita. De tal forma, como perturbaciones a las leyes de Kepler, rederivaron el radio crítico a partir del cual no podrían existir órbitas circulares (tomadas así por sencillez) debido a la aceleración cosmológica, siendo dicho radio crítico:

$$R_c = \sqrt[3]{\frac{GM}{|q|H_0^2}}. \quad (12)$$

En donde G es la constante de gravitación y M la masa solar. Cabe decir, para hacerse una idea de la magnitud de la distancia, que el cociente entre la distancia Sol-Tierra (R_0) y dicho radio es:

$$\frac{R_0}{R_c} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\frac{GM_s}{|q_0|H_0^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\frac{C}{|A|}}} = 4.2 \cdot 10^{-8}. \quad (13)$$

Por lo que el radio crítico se encuentra, suponiendo estables los parámetros cosmológicos, extremadamente alejado.

Recientemente (2013), se han tenido en cuenta las ecuaciones post-newtonianas EIH (Einstein, Infeld, Hoffman) para un sistema de dos cuerpos en la obtención del radio crítico [23]

En cuanto a otras vías de investigación que ofrezcan resultados a nivel predictivo, Jacques Laskar, en los años 80, 90 y más recientemente en 2009 investigando sobre la estabilidad del Sistema Solar para el Instituto de Mecánica Celeste de París, consolidó la idea de usar otros métodos ante el carácter no determinista del sistema. Bajo la luz de otros estudios anteriores como el de Sussman y Wisdom, Laskar integró numéricamente en 1989 el movimiento de los ocho planetas del Sistema Solar para un tiempo de 200 millones de años, indicando los resultados que planetas como Mercurio, Venus, La Tierra y Marte, tenían un comportamiento de las trayectorias caótico; las distancias entre dos órbitas inicialmente próximas se multiplicaban por tres cada cinco millones de años (exponente de Lyapunov).

Por tanto, ello hacía imposible cualquier predicción más allá de 100 millones de años, ya que un error del 0.00000001% en la medida de las condiciones iniciales conducía a un error del 100% (un error igual a la medida) tras 100 millones de años. El origen de tales movimientos caóticos provenía de las resonancias entre los periodos de precesión (resonancias seculares) de las órbitas de Marte y de la Tierra por un lado, y de Mercurio, Venus y Júpiter por otro. Las integraciones y simulaciones posteriores (como el análisis de Lissauer de 1999) para la evolución de las órbitas planetarias muestran una gran estabilidad en planetas similares a la Tierra para periodos de tiempo de hasta 10^9 años [24].

Simulaciones más recientes (Laskar, 2009) recrean los movimientos orbitales con pequeñas variaciones de las condiciones iniciales que dan lugar a 2500 dinámicas posibles para los próximos miles de millones de años; en un

1% de los casos, Venus, Mercurio, La Tierra o Marte colisionaban entre sí o con el Sol.

VI. CONCLUSIONES

La pregunta clásica sobre la Estabilidad del Sistema Solar sigue abierta a pesar del Teorema KAM (años 60), ya que este sólo establece su estabilidad como una probabilidad que depende de perturbaciones pequeñas, siendo una teorema de pequeño parámetro que además no está cuantificado. El carácter no integrable y caótico del Sistema Solar (Bruns-Poincaré, 1887), hace que sean necesarios métodos numéricos y simulaciones que sólo realizan predicciones válidas hasta un tiempo de 10^8 años (Laskar, 1990, 2009) o 10^9 años (Lissauer, 1999). Estas cifras son de un orden de magnitud similar a los resultados mediante otros métodos de aplicación cosmológica (Serenó y Jetzer, 2007) basados en la Ley de Hubble (1929). Respecto a esta última vía de estudio, podríamos preguntarnos ¿debe despreciarse? Esta respuesta no la hemos considerado trivial ya que el efecto de la aceleración cósmica es acumulativo y, a tenor de los recientes descubrimientos y análisis posteriores a 1998, podría crecer con el tiempo y la distancia además de influir a pequeñas escalas (Anderson, 1995). Dichos descubrimientos sobre la aceleración cósmica (Riess, 1998), parecen indicar que, efectivamente, se deben tener en cuenta parámetros cosmológicos en la búsqueda de una solución definitiva al problema. El hecho de que los parámetros de deceleración y de Hubble (q y H respectivamente) no sean del todo conocidos, al igual que la influencia de la materia oscura, hace que la respuesta a la pregunta esté abierta.

En definitiva, nos encontramos ante un problema particular con más de tres siglos de historia mucho más profundo pero menos conocido que el del simple enunciado “problema de los n -cuerpos”, y que ha atraído a las mejores mentes desde el siglo XVII. La respuesta a la cuestión ¿Es estable el Sistema Solar? sigue siendo un enigma. En futuras investigaciones sería recomendable que se añadiera la perturbación cosmológica en el hamiltoniano de n cuerpos próximo a integrable de Poincaré-KAM, y que no sólo se incluya como perturbación a la ecuación newtoniana en un sistema de dos cuerpos. Por tanto, habría que añadir el parámetro de Hubble como una nueva constante del sistema dinámico que reduzca la dimensión del sistema. Entendemos también que si se ha incluido la aceleración cosmológica en el análisis del problema, habría que cuestionar también si debe seguir despreciándose la relatividad general como marco de estudio o, al menos, como perturbación de las leyes clásicas (aproximación postnewtoniana). En conclusión, dicha pregunta abierta sólo podrá resolverse con nuevos métodos matemáticos o con modificaciones en los axiomas de la mecánica celeste y la dinámica de sistemas en general.

Aunque los contenidos matemáticos y físicos son de un nivel elevado, pensamos que incluso en cursos preuniversitarios de ciencias debería enseñarse que las Leyes de Kepler-Newton sólo funcionan correctamente en un sistema de dos cuerpos. Estas ideas, aunque se expliquen en la práctica docente sin ecuaciones, no sólo pueden motivar al

¿Es estable el Sistema Solar?

alumnado a investigar, sino que evitarán que en un futuro entren en contradicción sus nuevos conocimientos con los antiguos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la inestimable colaboración de Profesor Manuel Bautista en la traducción del “abstracts”, así como la impagable ayuda en los contenidos, del Doctor Rafael Ortega Ríos, quien apoyó un proyecto de mayor envergadura y que engloba los contenidos aquí expuestos.

REFERENCIAS

- [1] Hawking, S., *A hombros de gigantes*, (Crítica, España, 2010).
- [2] Hawking, S., *Dios creó los números*, (Crítica, España, 2010).
- [3] Carrera, M & Giulini D., *Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics*, *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 169-208 (2010).
- [4] Sereno, M. & Jetzer, P., *Evolution of gravitational orbits in the expanding universe*, *Physical Review D*. **75**, 064031 (2007).
- [5] Laskar, J., Joutel, F. & Robutel, P., *Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon*, *Letters to Nature* **361**, 615-617 (1993).
- [6] Laskar, J. & Gastineau, M., *Collisional trajectories for Mars and Venus with the Earth*, *Nature* **459**, 817-819 (2009).
- [7] Laskar, J., *La Luna y el Origen del Hombre*. Investigación y Ciencia, Julio (1994).
- [8] Laskar, J., Froeschlé, C., *El Caos en el Sistema Solar*. *Mundo Científico* **732**, 115-121 (1991).
- [9] Laskar, J., Joutel, F. and Robutel P., *Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon*, *Letters to Nature* **361**, 615-617 (1993).
- [10] Moser, J., *Is the Solar System Stable?*, *The Mathematical Intelligencer* **1**, 65-71 (1978).
- [11] Szebehely, V. G., *Stability of the Solar System and its minor natural and artificial bodies*, (Kluwer Academic Publishers, Netherland, 1985).
- [12] Solé, V., Manrubia, S. C., *Orden y Caos en Sistemas Complejos, Fundamentos y Aplicaciones*, (UPC, Barcelona, 2001).
- [13] Jacobi, G., *Jacobi's Lectures on Dynamics*, Delivered at the University of Königsberg in the Winter Semester 1842-1843 and According to the Notes Prepared by C. W. Brockardt (1842).
- [14] Poincaré, H., *Livre II: Les Approximations de la mécanique céleste, chapitre v: sur la stabilité du Systeme Solaire*, (Paris, 1898).
- [15] Arnol'd, V., *Small denominators and problems of stability motion in classical and celestial mechanics*, *Russ. Math. Surv.* **18**, 6 (1963).
- [16] Small Denominators. *Encyclopedia of mathematics*,

http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Small_denominators&oldid=14339. (Consultado el 10 de Enero de 2014).

- [17] Luca, F., *Aproximaciones diofánticas*, (Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, México, 2012).
- [18] Broer, H. W., *KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **41**, 507-521, (2004).
- [19] Celletti, A. & Chierchia, L., *KAM Stability for a three-body problem of the Solar System*, Math. Phys. **57**, 33-41 (2006).
- [20] Féjóz, J., *Démonstration du "théoreme d'Arnold" sur stabilité du système planétaire (d'après Michael Herman)*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **24**, 1-62 (2004).
- [21] Pöschel, J., *A Lecture on the classical KAM Theorem*, Proc. Symp. Pure Math. **69**, 707-732 (2001).
- [22] http://www.icrar.org/news/news_items/media-releases/a-new-way-to-measure-the-expansion-of-the-universe (consultado el 30 de Agosto de 2013).

- [23] Arenas, J. J., *The effect of the cosmological expansion on local systems: post-newtonian approximation*, arxiv 1309.3503, (2013).
- [24] Lissauer, J. J., *Chaotic motion in the Solar System*, Rev. Mod. Phys. **71**, 835-845 (1999).
- [25] Delshams, A., *Poincaré, Creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste*, Departament de Matemàtica Aplicada I. Universitat Politècnica de Catalunya (2005) <http://www.ma1.upc.edu/recerca/preprints/preprints-2005/Fitxers/040501delshams.pdf> (Consultado el 22 de Diciembre de 2014).
- [26] Montesinos Amilibia, A., *Variedades Diferenciales*, (Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Valencia, Valencia, 2005).
- [27] Ortega, R., *La Mecánica, una fuente de problemas*. Notas dentro del curso "Matemáticas: vínculo interdisciplinar" (2006)
- [28] Simó, C., *Difusión de Arnol'D, Actas II, Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, (UAB, Barcelona, 1979).

Física 1⁺⁺: Aulas de aprendizaje cooperativo para estudiantes que recursan



Sandra Kahan, Adriana Auyuanet, Federico Davoine y Cecilia Stari

*Instituto de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,
Julio Herrera y Reissig 565, C.P. 11.100, Montevideo, Uruguay.*

E-mail: skahan@fing.edu.uy

(Recibido el 25 de Febrero de 2014, aceptado el 25 de Junio de 2014)

Resumen

Este artículo presenta la metodología de enseñanza aplicada en un curso de física general basado en cálculo para estudiantes que lo cursan por segunda vez. El método combina las estrategias de aprendizaje cooperativo con la resolución de problemas ricos en contexto. El curso con esta modalidad se llama Física 1⁺⁺. Los resultados de la población objetivo se comparan con los resultados de los estudiantes que siguieron el curso tradicional (clases teóricas expositivas y de presentación de ejercicios). La aplicación de un análisis multifactorial exploratorio (EFA) a los resultados de las diferentes pruebas que rindieron los estudiantes permitió identificar dos factores principales asociados a estrategias de resolución de problemas de los estudiantes: Un primer factor puede ser identificado con estrategias de resolución de problemas, basadas en la aplicación de fórmulas, por su asociación a los resultados de las pruebas que rindieron la primera vez que atendieron el curso, en su modalidad tradicional. Un segundo factor puede ser identificado con el aprendizaje de conceptos, por su asociación a los resultados del post-test del Force Concept Inventory, aplicado al inicio y final de este curso.

Palabras clave: Aprendizaje cooperativo, física en contexto, análisis multifactorial exploratorio.

Abstract

This article presents an educational methodology, combining cooperative learning and context-rich problems, applied to a calculus based physics course for students who attend it by the second time. The results of this modality, called "Física 1⁺⁺" are compared to those obtained by the students who attend the traditional course (theoretical lectures and exercises presentations). The application of the exploratory multi-factorial analysis (EFA) to the results of several examinations allowed identifying two key factors associated to the problem-solving strategies of the students. The first factor can be identified with strategies based on the mechanical use of mathematical relationships because it can be connected with the examinations' results obtained by the students when they attend the traditional course for the first time. The second factor can be linked with concepts' learning, due to its association with the Force Concept Inventory post-test, applied at the beginning and at the end of this course based on cooperative learning.

Keywords: Cooperative Learning, Physics in Context, Exploratory Factorial Analysis.

PACS: 01.55+b, 01.40.gb, 01.50.kw

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Física 1 es un curso que se instrumenta en el primer semestre de las carreras de la Facultad de Ingeniería. Se trata de un curso de física general basado en cálculo, que discute temas de mecánica de la partícula y el rígrado.

Tradicionalmente, este curso se dicta en un formato de tres horas semanales de clases teóricas y tres horas semanales de clases de resolución de ejercicios, divididas en dos sesiones de una hora y media. Las clases teóricas (muy numerosas) son expositivas. En las clases de ejercicios, el docente suele exponer estrategias de resolución de problemas con la espontánea participación de los estudiantes. Con el objetivo de cambiar esta tendencia, en el segundo semestre se implementó una metodología de enseñanza y

los estudiantes. Posteriormente, responder dudas que surgieron durante la etapa de aprendizaje individual de los estudiantes, fuera del aula.

El curso Física 1 se dicta en ambos semestres lectivos.

Aproximadamente un 70% de estudiantes que ingresan reprueban el curso tradicional del primer semestre; aproximadamente un 20% de los estudiantes que reprueban el primer semestre se desvinculan de la Facultad. El 65% de los estudiantes que cursan Física 1 en el segundo semestre son estudiantes que reprobaron el curso del primer semestre. Ediciones tradicionales del curso del segundo semestre han demostrado que se reiteran los bajos índices de aprobación y altos índices de desvinculación. El aprendizaje alternativo (para parte de la población) que integra los conocimientos teóricos con la resolución de

problemas: la modalidad de trabajo fue el Aprendizaje Cooperativo.

Paralelamente, el resto de la población sigue el curso tradicional, constituyendo la población testigo de este trabajo. La evaluación sumativa es la misma para ambas poblaciones.

El artículo que aquí presentamos está organizado de la siguiente manera: en la sección II se describe el Aprendizaje Cooperativo, en la sección III se detalla el procedimiento de implementación del mismo en el curso de Física 1. En la sección IV se presenta la Herramienta Diagnóstica al Ingreso (HDI) y en la sección V el Force Concept Inventory (FCI). Los resultados son analizados a la luz de la HDI en la sección VI y en la sección VII se presenta el Análisis Multifactorial Exploratorio de los mismos. Finalmente en la sección VIII se presentan las conclusiones.

II APRENDIZAJE COOPERATIVO

El Aprendizaje Cooperativo existe cuando los estudiantes trabajan juntos para alcanzar metas de aprendizaje compartidas. Cada estudiante puede llegar a la meta, sólo si los otros integrantes del grupo llegan a sus metas [1]. Heller & Co [2] han sido pioneros en la aplicación de esta metodología de trabajo en cursos de Física, tanto en actividades de resolución de problemas como en actividades de laboratorio, a lo largo del curso.

El aprendizaje cooperativo que se aplica mayoritariamente en la enseñanza de la física al inicio de la universidad consiste en la organización de los estudiantes en pequeños grupos estables, a lo largo del semestre. A veces, la integración del grupo es determinada por el equipo docente que conforma grupos heterogéneos de acuerdo a ciertos criterios: resultados académicos previos, multiplicidad étnica, etc. [2] [3]. Cada grupo cumplirá su objetivo de aprendizaje a través de la comunicación de ideas entre los integrantes para acordar los conceptos, habilidades y estrategias a ser aplicadas en una situación problemática particular.

Los estudiantes pueden tener la capacidad de resolver ejercicios rutinarios pero fallan a la hora de transferir lo aprendido en determinadas circunstancias a otros contextos porque ello requiere la aplicación de conceptos [5]. Para garantizar que el estudiante ha aprendido los conceptos y puede transferirlos a situaciones más complejas, se recomienda la resolución de problemas contextualizados en anécdotas de la vida real [5, 6]. Sin embargo, la dificultad que presenta a un estudiante aislado esa clase de problemas, excede en muchos casos su capacidad de análisis individual, generándole incertidumbres a la hora de decidir qué modelos aplicar. El trabajo en la modalidad cooperativa provee el soporte de aprendizaje necesario como para que los integrantes del grupo desarrollen la capacidad de transferir el conocimiento a problemas cotidianos, los cuales requieren estrategias más complejas que la resolución de los problemas de final de capítulo [7].

Entre las muchas perspectivas del aprendizaje cooperativo [8], entendemos que ese ambiente posibilita que los estudiantes expliciten sus concepciones alternativas, en el seno de un grupo de confianza y la discusión entre pares ayude a transformarlas en conceptos científicamente aceptados [9, 10, 11]. Vosniadou [12] indica que el cambio conceptual no es sólo un proceso cognitivo personal sino que está influenciado significativamente por factores socioculturales que la dinámica de aula debe favorecer.

Igualmente, el aprendizaje cooperativo, al promover la comunicación de las ideas y la necesidad de síntesis por parte de todos los integrantes del grupo, motiva que los estudiantes reflexionen y hagan una síntesis de los conceptos, tácticas y estrategias (metacognición) que emplearon en la resolución de problemas y esto redundará en un aprendizaje más duradero [13].

III METODOLOGÍA

Desde el año 2011, se propone a estudiantes re-cursantes una modalidad de aula alternativa a las clases regulares, basada en las dinámicas del aprendizaje cooperativo y motivadas por la resolución de problemas ricos en contexto.

La modalidad adoptó el nombre de Física 1++. Este trabajo expone los resultados de la experiencia instrumentada en los años 2011 y 2012.

El curso utiliza como bibliografía básica el libro Física, Vol. 1, Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K. y como bibliografía complementaria los libros: Física, Vol. 1, P.A. Tipler, y Física, Vol. 1, R.. Serway [14].

Las actividades se organizan por unidades temáticas. En cada unidad temática, se le entrega a los estudiantes una o dos hojas de problemas, diferente a las del curso tradicional pero de características similares: los primeros ejercicios son de aplicación directa de los conceptos trabajados en el aula para posteriormente plantear situaciones problemáticas de complejidad creciente para el estudiante [15]. El estudiante debe realizar esta hoja de ejercicios fuera del aula.

El curso tradicional y de aprendizaje cooperativo se aprueban mediante la realización de las mismas dos pruebas parciales de múltiple opción. Dependiendo de los puntajes obtenidos, el estudiante puede exonerar el examen final, aprobar el curso, quedando habilitado por rendir el examen final o reprobado el curso.

En el año 2011 (2012) se instrumentaron 2 (3) grupos de un máximo de 32 estudiantes atendidos por dos docentes (un Profesor y un Asistente). Cada grupo dispone de tres sesiones semanales de dos horas cada una y trabaja en la modalidad de aprendizaje cooperativo, conformando subgrupos de 4 estudiantes. El trabajo de aula se complementó con la utilización de la plataforma Moodle de la Facultad. Asimismo, para promover el trabajo cooperativo, Física 1++ dispone de aulas con mobiliario flexible que posibilitan que los estudiantes se sienten alrededor de una mesa de trabajo o atiendan el pizarrón, de acuerdo al tipo de actividad programada.

Parte del equipo de trabajo había participado de instrumentaciones previas basadas en el aprendizaje

cooperativo [16] concebidas como complementarias a las actividades de los cursos regulares y, por lo tanto, de una sola sesión semanal de dos horas. En cambio, Física 1⁺⁺ consiste en tres sesiones semanales de dos horas, lo que permite afianzar los vínculos sociales entre los estudiantes a la interna de cada grupo de 4 integrantes, entre estudiantes del turno y entre los estudiantes y el equipo docente.

El cronograma de trabajo en el aula es planificado mediante reuniones entre los docentes de Física 1⁺⁺. La planificación es realizada por unidad temática. Cada semana los docentes indican a los estudiantes qué secciones de los libros del curso deben leer. La comprensión de dicho material bibliográfico se evalúa mediante un breve cuestionario en línea que el estudiante debe responder, antes de concurrir a clase. De las respuestas a estas autoevaluaciones, es posible determinar que los estudiantes no leen o no logran comprender los conceptos estudiados por lo que el docente debe hacer una puesta a punto inicial.

En la primera etapa, al principio de cada unidad temática, los docentes realizan una breve discusión de los conceptos teóricos. Para ello, se utilizan como insumo los errores más comunes que cometieron los estudiantes en la autoevaluación en línea. Luego, se trabaja promoviendo la discusión colectiva de situaciones problemáticas, elegidas a los efectos de detectar errores conceptuales, bajo la moderación del profesor que atiende el grupo.

En la segunda etapa, cada subgrupo trabaja en la resolución de problemas “ricos en contexto”. El docente interviene oportunamente cuando surgen dudas y está atento a los diferentes razonamientos que van surgiendo en cada grupo. Se busca motivar las discusiones dentro de los grupos sobre los diferentes puntos de vista, modelos mentales sobre el problema y estrategias alternativas de resolución.

En una tercera etapa, también moderada por el docente, los subgrupos exponen en el pizarrón los ejercicios de la hoja de problemas, discutiéndolos con el resto de los estudiantes del grupo. El rol de los docentes consiste en colaborar en el desarrollo de las exposiciones y complementarlas con comentarios o preguntas, de forma de generar discusiones. En el caso de que los estudiantes se equivoquen en la exposición, los docentes buscan que ellos mismos y sus compañeros detecten los errores conceptuales y los corrijan.

De la segunda y tercer etapa de trabajo, es posible verificar que las estrategias acordadas dentro de los subgrupos no son, en general, de tipo ‘plug-and-chug’ [17], aunque en las primeras semanas, son muchos los estudiantes que proponen esas estrategias al grupo. Éste se auto-regula aplicando estrategias que requieren la aplicación de los conceptos porque los ejercicios y problemas (aún los de final de capítulo) se plantean para ser resueltos en forma paramétrica y porque los problemas ricos en contexto requieren de un acuerdo representacional a la interna del subgrupo. Los docentes exponen al grupo estrategias de resolución, sólo cuando detectan un abordaje conceptual o procedimental inapropiado particular de un subgrupo o generalizado.

IV LA HERRAMIENTA DIAGNÓSTICA AL INGRESO (HDI)

La Facultad de Ingeniería aplica, al inicio de la carrera, la Herramienta Diagnóstica al Ingreso (HDI). Las carreras de ingeniería son de libre acceso a todos los egresados de la Enseñanza Media (aprox. 1000 estudiantes) que completaron su bachillerato en áreas científico-tecnológicas. La HDI incluye (en formato múltiple opción) preguntas de Física, Matemática, Química y Comprensión Lectora, además de otras componentes (Expresión Escrita, Motivación, Estrategias de Aprendizaje y Estilos Cognitivos) que profundizan en una línea de investigación de diagnóstico de las características de la población ingresante [18].

Cada pregunta de opción múltiple se evalúa de acuerdo a 4 niveles de desempeño (Nivel 1: adquisición de información; Nivel 2: interpretación de la información; Nivel 3: análisis de información y realización de inferencias; Nivel 4: estrategias de investigación científica). La selección de estos desempeños (y no otros) implicó una opción teórica sobre modelos de aprendizaje en la enseñanza de las ciencias [18].

Preguntas del Force Concept Inventory, Mechanics Baseline Test (MBT) [19] y Brief Electromagnetism Assessment (BEMA) [20], son aplicadas en la componente de Física de la Herramienta Diagnóstica al Ingreso (HDI).

Al cabo de 3 años (2008-2010), en la componente de Física se aplicaron sólo preguntas del FCI, resultando un índice de suficiencia inicial $S_i = 50 \pm 2\%$, sobre toda la población ingresante.

V EL FORCE CONCEPT INVENTORY (FCI).

Como es conocido, el FCI [19] es un test que se aplica para evaluar la ganancia (pre-test y post-test) que tienen los estudiantes en la comprensión de los conceptos de cinemática y dinámica de la partícula, como consecuencia de los cursos básicos de Física.

Medidas comparando ganancia entre pre y post-test en el FCI, demuestran las ventajas del aprendizaje cooperativo, en particular, si se tiene en cuenta su resultado comparativo en grupos sociales (étnicos o de género) [3, 21, 22]. Las mujeres suelen tener mayores dificultades en el aprendizaje de la Física y muestran mayor nivel de desvinculación en las carreras de la Facultad de Ingeniería [18].

El FCI se aplicó en la primer clase del curso Física 1⁺⁺ en el año 2012, resultando un índice de suficiencia $S_i = 43\%$; un índice bastante alto si se tiene en cuenta que dicha población está re-cursando la asignatura que reprobó en el primer semestre. Comparando este resultado con el de aplicar el FCI al final del curso ($S_f = 63\%$), se mide una ganancia normalizada $G_N = 34\%$, la cual se toma como índice de medida del aprendizaje conceptual y se define como:

$$G_N = \frac{S_f - S_i}{100S_i} \quad (1)$$

El resultado está entre los valores esperados para cursos que instrumentan trabajo cooperativo. Como confirman varios autores [23, 24], en promedio, dicha ganancia es de 20% en los cursos tradicionales, 37% en cursos en los que el estudiante resuelve ejercicios individual o cooperativamente y de 43% cuando los estudiantes trabajan en la modalidad taller. Si, además, se tiene en cuenta el índice inicial de suficiencia S_i , el curso Física 1++ se posiciona en el borde superior de los datos presentados por Hake [25] sobre un total de 32 universidades muestreando el resultado de 4832 estudiantes.

En otra palabras, es comparable con los resultados que se obtienen al aplicar metodologías de enseñanza con participación activa de los estudiantes.

VI RESULTADOS DEL CURSO Y SU RELACIÓN CON LA HDI

Muchos son los trabajos que comparan el resultado académico de grupos de aprendizaje cooperativo con métodos de enseñanza tradicionales. A veces, no se observan diferencias significativas porque se comparan sólo índices de aprobación, sin tener en cuenta por ejemplo, el estado inicial de conocimiento de los estudiantes o su contexto social [5].

En la tabla I se explicitan los resultados del curso tradicional y Física 1++ para la generación que cursó la modalidad en el año 2011. Similares porcentajes se observan para el curso 2012. En el índice de aprobación de la asignatura se incluye a los estudiantes que exoneraron el examen y a los que, habiendo aprobado el curso, aprobaron el examen final que se aplica dos semanas después de finalizado el curso. Los porcentajes de aprobación de la asignatura y del curso para los estudiantes que cursaron Física 1++ son superiores a los del resto de la población.

Con el objetivo de caracterizar mejor a la población de Física 1++ y a la población del curso tradicional, la figura 1 compara los resultados del curso en relación al resultado global del HDI (RG-HDI) en sus cuatro componentes: Matemáticas, Física, Química y Comprensión Lectora.

Como se indicó, los estudiantes que forman parte de este estudio cursan por segunda vez la asignatura que reprobaron en el semestre anterior. Por esa razón, la figura 1 muestra que los RG-HDI de quienes siguieron el curso tradicional y, también, Física 1++ se ubican en valores intermedios. Los ingresantes que obtuvieron mejor RG-HDI no conforman esta población porque ya aprobaron la asignatura en el primer semestre, mientras que los que obtuvieron un bajo RG-HDI tampoco la conforman porque la no obtención de créditos en el semestre anterior, condiciona grandemente su decisión de no proseguir estudios de ingeniería en el segundo semestre.

TABLA I. Resultado del curso F1++, comparado con el resultado de la modalidad tradicional para los estudiantes que cursaron en el 2011.

2011	Física 1 tradicional	Física 1++	Total (2do semestre)
Nº Estudiantes	355	55	410
Exoneran examen	27 (7.6%)	13 (24%)	40 (9.8%)
Aprueban curso	114 (32%)	18 (33%)	132 (32%)
Aprueban asignatura (total)	59 (17%)	19 (35%)	78 (19%)

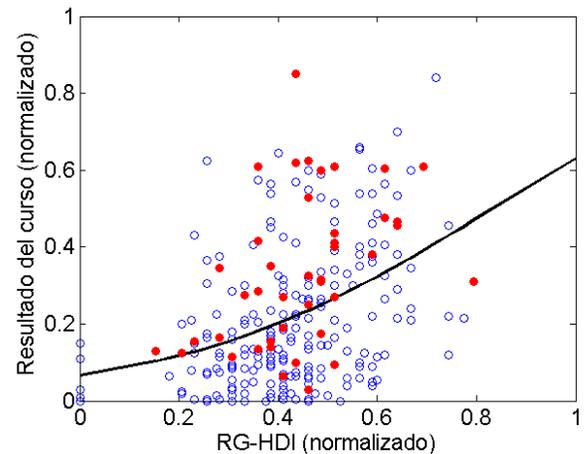


FIGURA 1. Resultado del curso para los estudiantes de Física 1++ (círculos rojos rellenos) en comparación con los resultados de toda la población (círculos azules), en función del resultado global de la Herramienta Diagnóstica al Ingreso (RG-HDI). La línea continua indica el ajuste de los resultados de toda la población a una función logística (ver texto).

Para estimar qué resultado de curso es posible esperar, de acuerdo al RG-HDI de cada estudiante, se ajustó una función logística [26] a toda la población que participó del curso de Física 1 en el segundo semestre. Esa función es la que mejor pone de manifiesto los alcances diagnósticos de la HDI, dado que de acuerdo a la teoría de la respuesta al ítem (IRT), los estudiantes con mayor RG-HDI aprobarán la asignatura con el mejor puntaje, mientras que los que obtuvieron bajo puntaje, reprobarán la asignatura [27].

Considerando ese ajuste, se observa que (aprox.) el 74% de los estudiantes que participaron del curso Física 1++ quedaron por encima de esa curva, mientras que sólo el (aprox.) 44% de estudiantes que participaron del curso tradicional, obtienen un resultado en el curso por encima del valor esperado, de acuerdo a la regresión logística.

Los resultados del curso Física 1++ son mejores en porcentaje, de acuerdo a los datos explicitados en la tabla I, cuando se los compara con la población que siguió el curso tradicional.

VII ANÁLISIS FACTORIAL EXPLORATORIO

El análisis cuantitativo de la sección anterior pone de manifiesto que los estudiantes de Física 1⁺⁺ tienen mejores índices de aprobación que los estudiantes que se inscribieron al curso tradicional. Para tener una nueva perspectiva de cuáles son las competencias que tiene esta población estudiantil, utilizamos el análisis multifactorial exploratorio (EFA) de esos índices en conjunto con el FCI.

En este análisis la hipótesis es que todos los datos observables (resultado de N estudiantes en P pruebas o preguntas) puede reducirse a un número más pequeño de dimensiones o factores latentes. Esos factores latentes, se eligen aleatoriamente para maximizar el peso de los observables en esta nueva representación y así minimizar el error implicado en la nueva representación lineal, consecuencia del producto de la matriz de pesos y la matriz de factores latentes. La identificación de los factores latentes con determinadas habilidades cognitivas requiere de una interpretación plausible, guiada por la caracterización subjetiva de estudiantes y docentes de la población que se está estudiando pero, también, por el criterio de explicar la varianza de los datos [28, 29, 30].

Para realizar el análisis se tomaron los resultados de las siguientes pruebas: resultado global de la herramienta diagnóstica al ingreso (HDI), primer y segundo parcial del primer semestre del 2012 (1P-1S y 2P-1S), que los estudiantes de la población estudiada cursaron en modalidad tradicional, primer y segundo parcial del segundo semestre del 2012 (1P-2S y 2P-2S), cuando cursaron Física 1⁺⁺ y ambos resultados del FCI (FCI-pre y FCI-pos).

La Tabla II (ver también figura 2) muestra el resultado del análisis multifactorial exploratorio (EFA) en una y dos dimensiones de las siete variables descritas, para la población que cursó Física 1⁺⁺. La representación 1D considera la presencia de un único factor latente, o sea una única habilidad cognitiva que determina las respuestas de los estudiantes en las diferentes pruebas. El peso del resultado del FCI-post (0,8906) indicaría que el factor latente determinado por esta variable está fuertemente relacionado con la capacidad de los estudiantes de responder preguntas conceptuales de Física. El bajo peso de 1P1S y 2P1S sobre ese único factor latente, la alta variancia presentada por estas variables cuando se las quiere representar con un único factor y el hecho de que un único factor refleje sólo un 31,7% de la variancia de los siete datos (última columna de la tabla), pone de manifiesto que la representación mejoraría si se aumenta la dimensión del análisis. Para determinar la dimensión óptima en un análisis factorial exploratorio, se usa como criterio, que el peso de las variables sobre alguno de los factores latentes sea mayor que 30% [31].

La figura 2 muestra el análisis multifactorial 2D que posibilita interpretar los resultados de las siete pruebas en función de dos factores latentes. Este análisis explica el 48.8% de la variancia de las variables en el modelo, de acuerdo a la suma de los autovalores normalizados por el número de variables (última fila de la tabla II).

Uno de los factores latentes puede identificarse con la habilidad de responder preguntas conceptuales de Física dado que coincide (con peso 0,8975) con el resultado del FCI-pos. Por otro lado, el segundo factor latente coincide plenamente (con peso 0,9950) con el primer parcial del primer semestre (1P-1S) poniendo de manifiesto que, para los estudiantes de Física 1⁺⁺, el FCI-pos y el resultado de ese parcial no estarían correlacionados. Vale señalar que el carácter ortogonal que presenta esta población recursante en ambas pruebas no puede extrapolarse a toda la población que cursó F1 en el primer semestre.

TABLA II. Pesos y comunalidad del análisis factorial exploratorio (EFA) en una y en dos dimensiones.

EFA	1D		2D		
	Peso	Comunalidad	Peso Fact 1	Peso Fact 2	Comunalidad
HDI	0.3169	0.1004	0.3068	0.3069	0.1883
1P1S	0.0436	0.0019	-0.0032	0.9950	0.9900
2P1S	0.0617	0.0038	0.0744	-0.2867	0.0877
1P2S	0.5498	0.3022	0.5402	0.2021	0.3327
2P2S	0.6291	0.3958	0.6241	0.0741	0.9423
FCI-pre	0.7884	0.6216	0.7870	0.0105	0.6195
FCI-pos	0.8906	0.7931	0.8975	-0.0080	0.8055
PerVar	31.7 %	31.7%	31.5%	17.3%	48.80%

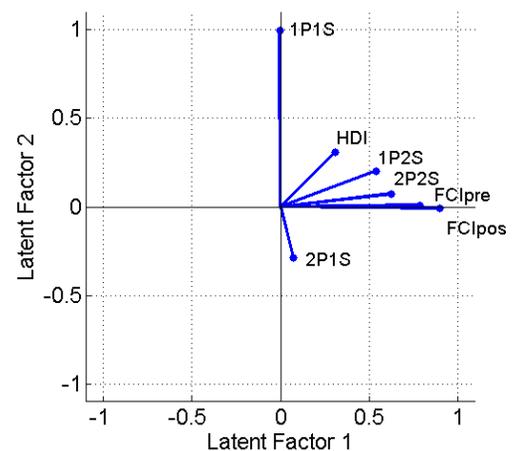


FIGURA 2. Representación del análisis multifactorial exploratorio 2D de las siete variables descritas en el texto para los estudiantes que cursaron F1⁺⁺ en el 2012.

Por otro lado, observando las proyecciones de los resultados de las pruebas del segundo semestre (1P-2S y 2P-2S) sobre ambos factores latentes, es posible apreciar la evolución de los estudiantes desde el factor latente identificado con 1P-1S, hacia estrategias que priorizan los “conceptos físicos”. El resultado del primer parcial (1P-2S) tiene pesos significativos en ambas variables, aunque su

proyección es más fuerte sobre el factor que representa la comprensión conceptual. En el segundo parcial del segundo semestre (2P-2S) el peso correspondiente al factor definido por 1P-1S es despreciable.

En función de ello, si el primer factor latente se identifica con los “conceptos físicos”, se puede suponer que el segundo se identifica con estrategias de resolución de problemas de tipo ‘plug-and-chug’ [17].

Esta hipótesis se refuerza al analizar la resolución de los problemas del primer y segundo parcial del segundo semestre (1P-2S y 2P-2S), así como la evolución de los estudiantes a lo largo del semestre en las etapas de resolución de problemas de física en contexto y exposición oral de los resultados por parte del estudiante (ver descripción en sección III).

El RG-HDI tiene pesos significativos (mayores a 0.3) en ambos factores latentes, demostrando que dicha prueba evalúa conceptos físicos pero que el estudiante también ha empleado en sus respuestas las estrategias de tipo ‘plug-and-chug’ de acuerdo con nuestra interpretación del factor latente asociado a 1P-1S.

El 2P-1S (previo a la realización del curso Física 1++) tiene un peso negativo importante sobre el factor latente identificado como “plug and chuck”. Ese resultado denunciaría que los estudiantes ni siquiera aplicaron esa estrategia en la resolución de esa prueba.

Para ajustar mejor los datos, podría realizarse un análisis 3D. Sin embargo, el análisis 3D hace que los resultados sean de difícil interpretación dado que el peso de todas las variables (menor a 0.6) sobre un tercer factor latente impide identificar a éste con alguna de ellas.

VIII CONCLUSIONES

Física 1++ es una experiencia educativa que satisface tanto a docentes como a estudiantes porque implica una mayor interacción entre los actores del proceso de enseñanza y aprendizaje. Entendemos que esta metodología, aplicada específicamente en el primer curso de Física, promoverá entre los participantes, buenas estrategias de estudio más allá de este curso, aún cuando los siguientes no las instrumenten explícitamente.

Debido a que la instrumentación del curso implica una asignación importante de horas docentes, no es posible reproducirla para toda la población recursante (aprox.) 450 estudiantes. Por esa razón se aplica a los estudiantes que, al cabo de una reflexión sobre sus estrategias de estudio, manifiestan la voluntad de dedicarse a la asignatura.

Al cabo de dos ediciones del curso Física 1++ es posible determinar que dicha metodología de enseñanza y aprendizaje mejora los resultados del curso de Física 1, si se la compara con la metodología de enseñanza tradicional y, particularmente, con los resultados de la población que asiste a clases expositivas de resolución de ejercicios, propias de la modalidad tradicional.

Asimismo, un análisis multidimensional ha demostrado que los resultados de los parciales del segundo semestre están fuertemente correlacionados con el aprendizaje de los

conceptos físicos involucrados. Se concluye que los estudiantes de Física 1++ abandonaron paulatinamente las estrategias de resolución de problemas basadas en la utilización de fórmulas por estrategias que se basan en la aplicación de conceptos, lo cual se verifica al analizar la forma en que los estudiantes presentaron la solución de los problemas en el primer y segundo parcial del segundo semestre.

El análisis detallado de las encuestas realizadas a los estudiantes al final del curso [9] y de cómo evolucionaron las estrategias de resolución de problemas a lo largo del semestre lectivo [32] serán objeto de un trabajo futuro. Se espera que dicho análisis, asociado a la impronta de cada grupo docente, permita mejorar la práctica docente en el curso Física 1++ pero, también, en otros cursos de Física Introductoria.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Comisión Sectorial de Enseñanza de la Universidad de la República por financiar la instrumentación de este proyecto en el año 2011.

Asimismo, agradecemos a los docentes que participaron de las diferentes ediciones del curso: Lucía Amy, Nahuel Barrios, Virginia Feldman, Daniel Gau, Alejandro Goday, Marcela Peláez y Pablo Pérez.

REFERENCIAS

- [1] Johnson, D. W. and Johnson, R. T., *Making cooperative learning work*, Theory into Practice **38**, Building community through cooperative learning, 67-73. Published by: Lawrence Erlbaum Associates (Taylor & Francis Group), (1999).
- [2] Heller, P. and Hollabaugh, M., *Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 2: Designing problems and structuring groups*, Am. J. Phys. **60**, 637-644, (1992).
- [3] Brewster, E. et al, *Toward equity through participation in Modeling Instruction in introductory university physics*, Phys. Rev. S. T. Physics Ed. Research **6**, 010106 (2010).
- [4] Bransford, J. D, Brown, A. L. and Cocking, R. R., editors, *How people learn*, (2008). <<http://www.nap.edu/openbook.php?isbn=0309070368>> (Consultado 21/02/2014).]
- [5] Enghag, M., Gustafsson, P. and Jonsson, G., *From everyday life experiences to physics understanding occurring in small group work with context rich problems during introductory physics work at university*, Research in Science Education **37**, 449-467, (2007).
- [6] Maloney D. P., *Research on problem solving: Physics*, in Handbook of Research on Science Teaching and Learning 327-354, edited by D. Gabel (MacMillan, New York, 1993).
- [7] Benegas, J. & Villegas, M., *Influencia del texto y del contexto en la resolución de problemas de física*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 210-224 (2011).

- [8] Slavin, R. E. *Co-operative learning: what makes group-work work?*, in *The nature of learning: using research to inspire practice*, (OECD Publishing, Paris, 2010).
- [9] Viennot, L., *Learning and conceptual understanding: beyond simplistic ideas, What have we learned?*, In: *Connecting research in physics education with teacher education*, edited by Matilde Vicentini and Elena Sassi (ICPE, Italia, 2008).
<<http://web.phys.ksu.edu/icpe/Publications/teach2/Viennot.pdf>> (Consultado 21/02/2014).
- [10] Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Scott, P., and Mortimer, E., *Constructing scientific knowledge in the classroom*, *Educational Researcher* **23**, 5-12 (1994).
- [11] Van Boxtel, C., Van der Linden, J., Kanselaar, G., *Collaborative learning tasks and the elaboration of conceptual knowledge*. *Learning and Instruction* **10**, 311-330 (2000).
- [12] Vosniadou, S. *The cognitive-situative divide and the problem of conceptual change*, *Educational Psychologist* **42**, 55-66 (2007a).
- [13] Solaz-Portolés, J. J., Sanjosé, V. & Gómez, C.B., *La influencia de las estrategias y motivación en la resolución de problemas: Implicancias para la enseñanza*, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **5**, 788-795 (2011).
- [14] Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K., *Física*, Vol. 1, (CECSA, 3era. Edición, México, 2005).
- [15] Truyol, M. E., Gangoso, Z., *La selección de diferentes tipos de problemas de física como herramienta para orientar procesos cognitivos*. *Investigações em Ensino de Ciências* **15**, 463-484 (2010).
- [16] Kahan, S., Varela, S., Casaballe, N., *Proyecto Multimedia Estudiantil: una experiencia para motivar buenas estrategias de resolución de problemas de Física*, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **5**, 293-300 (2011).
- [17] Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A., and Ozimek D. J., *Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics & physics*. In: D. Jonassen (Ed.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems*, (Lawrence Erlbaum, New York, 2007).
<<http://web.phys.ksu.edu/papers/2006/TransferInProblemSolving-FullChapter-v32.pdf>> (Consultado 21/02/2014).
- [18] Míguez, M., Crisci, C., Curiote, K., Loureiro, S., & Otegui, X., *Herramienta diagnóstica al ingreso a Facultad de Ingeniería: motivación, estrategias de aprendizaje y conocimientos disciplinares*, *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería* **14**, 29-37 (2007).
Documento de Trabajo de la Unidad de Enseñanza: *Estudio sobre deserción en Facultad de Ingeniería*, presentado al Consejo de la Facultad de Ingeniería el 30/05/2013.
- [19] Hestenes D., Wells M., and Swackhamer G., *Force Concept Inventory*, *Phys. Teach.* **30**, 141-158 (1992).
Hestenes, D., Wells, M., and Swackhamer, G., *Mechanics Baseline Test*, *Phys. Teach.*, **30**, 159-167 (1992).
Halloun, IA & Hestenes, D., *The Initial Knowledge State of College Physics Students*, *Am. J. Phys.* **53**, 1043-1055 (1985).
- [20] Ding, L., Chabay, R., Sherwood, B. and Beichner, R., *Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment*, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **2**, 010105 (2006).
- [21] Benckert, S. *et al*, *Conversation and context in Physics Education* (1997).
<https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/18144/1/gupea_2077_18144_1.pdf>, (Consultado 21/02/2014).
- [22] Lorenzo, M., Crouch, C. H., Mazur, E. *Reducing the gender gap in the physics classroom*, *Am. J. Phys.* **74**, 118-122 (2006).
- [23] Morote, E. S. and Pritchard, D. E., *What courses elements correlate with improvement on test in Introductory Newtonian Mechanics?*
<<http://relate.mit.edu/wp-content/uploads/2012/02/effectiveness.pdf>> (Consultado el 21/02/2014)
- [24] Saúl, J. M., *Beyond problem solving: Evaluating introductory physics courses through the hidden curriculum*, UMD PERG PhD Dissertation, (1998).
<<http://www.physics.umd.edu/perg/dissertations/Saul/>> (Consultado 21/02/2013).
- [25] Hake R. R., *Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses*, *Am. J. Phys.* **66**, 64-74 (1998).
- [26] Morris, G. A., Branum-Martin, L., Harshman, N., Baker, S. D., Mazur, E., Dutta, S., Mzoughi, T. & McCauley, V., *Testing the test: Item response curves and test quality*, *Am. J. Phys.* **74**, 449-453 (2006).
- [27] Kahan, S., Blanco, E., Curione, K., Miguez M., *Explorando los errores conceptuales de ingresantes a la Facultad de Ingeniería*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **30**, 4401 (2008).
- [28] Scott, T. F., Schumayer D. & Gray, A. R. *Exploratory factor analysis of a Force Concept Inventory data set*. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **8**, 020105 (2012)
- [29] Champagne, A.B. and Klopfer, L.E. *A causal model of students achievements on college physics course*. *Journal of Research in Science Teaching* **19**, 299-309 (1982).
- [30] Wang, S, McCall, M., Jiao, H. & Harris, G., *Construct validity and measurement invariance of computerized adaptive testing: application to Measures of Academic Progress (MAP) Using Confirmatory Factor Analysis*. *Journal of Educational and Developmental Psychology* **3**, 88-100 (2013).
- [31] Beavers, A. S, Lounsbury, J. W., Richards, J. K., Schuyler, Huck, W., Skolits, G. J., & Esquivel, S. L., *Practical considerations for using exploratory factor analysis in educational research*, *Practical Assessment Research & Evaluation* **18**, 6 (2013).
<<http://www.pareonline.net/pdf/v18n6.pdf>> (Consultado 21/02/2014)
- [32] Gangoso, Z., Truyol, M. E., Brincones, I., Gattoni, A., *Resolución de problemas, comprensión, modelización y desempeño: un caso con estudiantes de ingeniería*. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **2**, 233-240 (2008).

Circuito RC en descarga. Signo y sentido de la corriente



Osaba-Rodríguez, C.

Departamento de Física, ISPJAE, calle 114 No.11901 entre Ciclo Vía y Rotonda, CP 10400, Marianao, La Habana, Cuba.

E-mail: carloso@electronica.cujae.edu.cu

(Recibido el 6 de Marzo 2014, aceptado el 28 de Junio de 2014)

Resumen

En la determinación mediante las Reglas de Kirchhoff, de las corrientes y sus sentidos en las ramas de circuitos de corriente continua compuestos de baterías y resistores, las corrientes que resultan positivas muestran su sentido de circulación verdadero, mientras que a las negativas les corresponde el sentido contrario al supuesto. Mas sucede que al determinar la corriente en un circuito RC en régimen de descarga, aunque se le asigne el sentido físicamente correcto, algunos textos obtienen su valor con signo negativo. El presente artículo discute la determinación de dicha corriente y su signo.

Palabras clave: Circuitos eléctricos, circuito RC, corriente eléctrica.

Abstract

When Kirchhoff Rules are used for finding the currents and their directions on branches of D.C. circuits with batteries and resistors, positive currents have the right direction and negative currents have the opposite direction. But operating with a capacitor discharged by connecting it across a resistor (discharging RC circuit), although the current is supposed to circulate the right way from positive to negative plate, on some texts a negative current is obtained. This paper discusses how to determine this discharging current and its sign.

Key words: Electric circuits, RC Circuit, Electric current.

PACS: 01.55.+b, 41.20.-q, 07.50.

ISSN 1870-9095

I. CIRCUITOS RESISTIVOS Y CIRCUITO RC

La resolución de circuitos de corriente continua compuestos de baterías y resistores mediante el empleo de las reglas de Kirchhoff plantea habitualmente la determinación de las corrientes en las ramas a partir de los valores de la fuerza electromotriz de las baterías y las resistencias de los resistores. Tras proponer sentidos de circulación para las corrientes en las ramas y resolver el correspondiente sistema de ecuaciones, las corrientes que resulten positivas cuentan con el sentido de circulación correcto y las negativas con sentido opuesto.

Por su parte, el circuito de una sola malla compuesto por un capacitor, un resistor y que puede contar con una batería se le llama circuito RC. El mismo se estudia en régimen de carga, cuando la batería va cargando al capacitor, y en régimen de descarga cuando se parte de un capacitor cargado que va descargándose a través de un resistor conectado a sus placas.

II. CIRCUITO RC. RÉGIMEN DE CARGA

En un circuito como el de la figura 1 que cuenta con un interruptor, una batería, un resistor y un capacitor

descargado, tras cerrar el interruptor en $t = 0$ se establece una corriente de la placa positiva a la negativa, verificándose el resultado

$$\varepsilon = Ri + q/C. \quad (1)$$

Que mediante la ecuación $i = \frac{dq}{dt}$ se transforma en

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} + q/C. \quad (2)$$

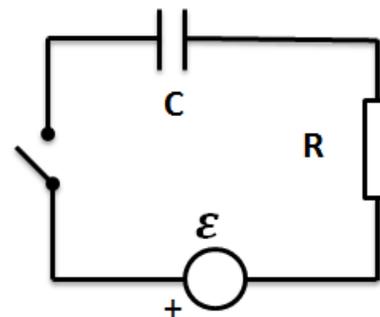


FIGURA 1. Circuito RC con fuente de voltaje.

De ahí se obtiene la ley de carga del capacitor:

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}). \quad (3)$$

Empleando nuevamente $i = \frac{dq}{dt}$ se obtiene la expresión de la corriente:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}. \quad (4)$$

El signo positivo que precede a la corriente indica que el sentido de circulación supuesto es correcto.

III. CIRCUITO RC. RÉGIMEN DE DESCARGA

En un circuito como el de la figura 2 que cuenta con un interruptor, un resistor y un capacitor con carga Q_0 , tras cerrar el interruptor en $t = 0$ se establece una corriente de la placa positiva a la negativa, verificándose el resultado

$$Ri + q/C = 0. \quad (5)$$

De ahí se obtiene la ley de descarga del capacitor

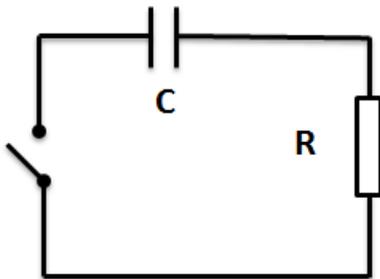


FIGURA 2. Circuito RC sin fuente de voltaje.

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (6)$$

Al emplear la relación $i = \frac{dq}{dt}$ se obtiene

$$i(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}, \quad (7)$$

ecuación precedida por un signo negativo que parece indicar un sentido de circulación erróneo para la corriente aunque el sentido supuesto para la corriente sea el correcto.

IV. DIVERSOS ENFOQUES EN LOS TEXTOS

El tratamiento del circuito RC en descarga en varios textos se consigna a continuación, empleando la notación antes expuesta.

4.1. Tras plantear la ley de descarga (6) declarar que puede obtenerse la expresión $i(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$, con

- Circuito RC en descarga. Signo y sentido de la corriente
- la corriente precedida de un signo positivo, sin exponer la forma en que se obtiene tal expresión [1].
- 4.2. Obtener la expresión de la corriente de descarga (7) sin comentar el signo negativo lo que puede dejar insatisfecho al lector reflexivo [2].
- 4.3. Obtener la expresión de la corriente de descarga (7) indicando que circula en un sentido tal que disminuye la carga en el capacitor [3]. Esto desvincula el signo de la corriente con el hecho de que su sentido sea correcto o incorrecto.
- 4.4. Explicar que en una ecuación como (4) el signo positivo indica que el capacitor está cargándose y que en (7) el signo negativo indica que el capacitor está descargándose. Que tanto en carga como en descarga la corriente $i(t)$ cumple con la ecuación $R \frac{di}{dt} + i/C = 0$, la cual admite como solución general $i(t) = I_0 e^{-t/RC}$, donde la selección de $I_0 = \varepsilon/R$ para la carga y de $I_0 = -Q_0/RC$ para la descarga proporciona las expresiones necesarias [4]. Este procedimiento brinda expresiones satisfactorias pero deja sin explicar por qué se adoptan tales expresiones para I_0 .
- 4.5. Emplear un circuito con un interruptor que en una posición incorpora la fuente dando lugar al proceso de carga, y en otra excluye la fuente dejando al circuito en descarga. Tomando en la descarga el mismo sentido de circulación de la corriente que en la carga, se aplica en (6) $i = \frac{dq}{dt}$ y se obtiene (7), indicándose que la corriente fluye en sentido opuesto al mostrado ya que el capacitor se descarga en lugar de cargarse, con lo cual no se interpreta el signo obtenido para la corriente [5].
- 4.6. Plantear para el régimen de carga $i = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$. Para la descarga tomar $\varepsilon = 0$, quedando $i = -\frac{q}{RC}$. Declarar que el signo negativo indica que la carga positiva está saliendo de la placa positiva por lo que la corriente circula en un sentido opuesto al del proceso de carga. Obtener $I_0 = -\frac{Q_0}{RC}$ al evaluar en el instante inicial, plantear $i = \frac{dq}{dt}$ para derivar (6) y obtener (7), escribiendo la ecuación para la descarga como $i(t) = I_0 e^{-t/RC}$, quedando al final la ecuación de la corriente precedida de un signo positivo [6]. Esto proporciona una expresión formalmente correcta en cuanto al signo positivo, pero con un método algo enrevesado.
- 4.7. Tras haber obtenido para la descarga (6) se emplea $i = -\frac{dq}{dt}$, ya que la corriente en el circuito es igual a la rapidez con que decrece la carga (positiva) en el capacitor. [7, 8, 9, 10]. El procedimiento expuesto en 4.7 es el que se considera mejor.
- Si bien la relación $i = \frac{dq}{dt}$ es siempre válida cuando vincula la corriente en una sección de un conductor con la carga que atraviesa dicha sección, para relacionar la corriente en el circuito con la carga de un capacitor en descarga, es necesario incluir el signo negativo expuesto en 4.7. Con ello

la corriente en la descarga exhibe un signo positivo que confirma su sentido de circulación, de la placa positiva a la negativa.

.....Suponer para el capacitor en descarga que el sentido de la corriente es entrando a la placa positiva no es físicamente correcto; y si este proceder cuenta como ventaja que hace valedera la relación $i = \frac{dq}{dt}$, arrastra la desventaja de presentar una corriente cuyo sentido de circulación no es correcto.

V. EJEMPLOS AFINES

La inclusión de un signo negativo para reflejar la variación de una magnitud que decrece está presente en otras situaciones conocidas en Física, tales como la ecuación de continuidad y la ley de desintegración radiactiva.

La relación entre la transferencia de la carga eléctrica contenida en un volumen a través de la superficie cerrada que lo rodea y la carga neta contenida en dicho volumen responde a una ley de conservación. Así un flujo positivo, indicativo de un tránsito de carga hacia el exterior, se relaciona con la disminución de la carga neta en el volumen, lo que se plantea matemáticamente con la inclusión de un signo negativo.

De este modo la ecuación de continuidad en forma diferencial puede plantearse como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8)$$

Siendo \vec{j} el vector densidad de corriente y ρ la densidad volumétrica de carga.

Una ecuación de continuidad análoga puede plantearse para la conservación de la masa en un volumen.

El fenómeno de desintegración radiactiva proporciona otro ejemplo, pues si una muestra contiene N núcleos radiactivos, la rapidez $\frac{dN}{dt}$ con que ocurre la desintegración es proporcional a la disminución de la cantidad de núcleos sin desintegrar, lo que conduce a la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (9)$$

En la que vuelve a presentarse un signo negativo. Vale destacar que la anterior ecuación diferencial conduce a la ley de desintegración

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (10)$$

Cuya forma es análoga a la de la corriente de descarga en el capacitor para un circuito RC.

CONCLUSIONES

Para un circuito RC en régimen de descarga, la inclusión de un signo negativo en la ecuación que relaciona la corriente eléctrica que circula con la derivada respecto al tiempo de la carga en el capacitor, confiere a dicha corriente un signo positivo cuando circula en el sentido físicamente correcto, lo cual preserva un resultado establecido en el tratamiento de las Reglas de Kirchoff, contenido que precede al estudio del circuito RC en los textos de Física.

REFERENCIAS

- [1] Sears, F., *Fundamentos de Física. Electricidad y Magnetismo*. (Edición Revolucionaria, La Habana, 1966).
- [2] Kip, A. F., *Fundamentos de Electricidad y Magnetismo*, (Ediciones del Castillo, S.A. Madrid, 1967).
- [3] Page, L., Adams, N. I., *Principles of Electricity*, (D. Van Nostrand Company, Inc. New York, 1931).
- [4] Peck, E. R., *Electricity and Magnetism*, (Mc. Graw – Hill Book Company, Inc. New York, 1953).
- [5] Halliday, D., Resnick, R., Krane, K., *Física*, (Editorial Félix Varela, La Habana, 2003).
- [6] Sears, F., Zemansky, M., Young, H., Freedman, R. *Física Universitaria*, (Novena edición, Editorial Félix Varela, La Habana, 2008).
- [7] Purcell, E. M., *Electricity and Magnetism*, (Edición Revolucionaria, Instituto del Libro, La Habana, 1970).
- [8] Tipler, P. A., *Física*, (Tercera Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1993).
- [9] Stanford, A. L., Tanner, J. M., *Physics for Students of Science and Engineering*, (Academic Press, Inc, USA, 1985).
- [10] Ortega, J. *et al.*, *Electromagnetismo, Oscilaciones y Ondas. Parte teórica*, (ENPES, La Habana, 1990).

La tecnología en el aula de clase: De las calculadoras graficadoras a los ambientes virtuales de aprendizaje



Elvia Rosa Ruiz Ledezma

CECyT Wilfrido Massieu, Instituto Politécnico Nacional, Av.de los Maestros 217, Colonia, Casco de Santo Tomás, C.P. 11340, México D. F.

E-mail: ruizelvia@hotmail.com

Resumen

En este trabajo queremos mostrar la evolución del uso de la tecnología en diversas situaciones didácticas para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Partimos del punto de que en el aula cada día es más común el uso de las nuevas tecnologías, aunque en la mayoría de las ocasiones no se muestran ni exhiben razones o evidencia de que su uso produzca cambios en la forma de aprender o en los resultados escolares de los alumnos. De inicio la introducción de la tecnología en investigaciones que implementaron calculadoras graficadoras, adoleció de un sustento teórico y en otras usaron la teoría de los sistemas de representación. Más recientemente se implementaron los sistemas CAS incluyendo la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje, nació la teoría de la aproximación instrumental, encaminada al desarrollo de aproximaciones socio-culturales.

Palabras clave: Nuevas tecnologías, software, génesis instrumental, ambientes CAS, aproximación instrumental.

Abstract

In this work, we want to show the evolution of the use of technology in various teaching situations for teaching and learning mathematics. We start from the point that in the classroom is more common the use of new technologies, although in the majority of cases they do not show or exhibit reasons or evidence of its use to produce changes in the way of learning or schooling outcomes of students. At the beginning, the introduction of technology in research implementing graphing calculators suffered from a lack of theoretical support. In others, they used systems of representation theory. More recently, the CAS systems including the instrumental dimension of learning processes have been implemented. The theory of the instrumental approach was born, is aimed at the development of socio-cultural approaches.

Keywords: New technologies, software, Instrumental génesis, CAS enviromen, Instrumental approach.

PACS: 01.40.-d, 01.40.E-, 01.50.H-

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En este escrito mostramos como el proceso de introducir la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha sufrido diversas transformaciones, al mismo tiempo que la evolución de las herramientas tecnológicas ha influenciado a las teorías de la Matemática Educativa (ME); lo anterior ha permitido abordar las diferentes problemáticas surgidas alrededor del uso de estas herramientas en el aula.

En el último cuarto del siglo pasado se implementaron diversas propuestas didácticas a realizar con la ayuda de calculadoras graficadoras, hojas de cálculo, programas computacionales, etc. A inicios de los años ochentas la utilización de calculadoras graficadoras permitió al estudiante visualizar rápidamente comportamientos de gráficas de funciones que al realizarse con lápiz y papel eran muy tediosos y difíciles de observar, así la pauta teórica dentro de la ME la dieron los registros de representación de Duval [1]. Posteriormente en los noventas se inició la utilización de programas computacionales de cálculo formal llamados CAS (Computer Algebra Systems = Sistemas Algebraico

Computacionales) [2] y también el uso de software de geometría dinámica como son Cabri-Géomètre y Logo; los cuales en su momento fueron exitosos como lo demuestran investigaciones de Tinoco [3] y Sacristán [4].

En el presente siglo y hasta la fecha con la construcción teórica de la aproximación instrumental se ha profundizado sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas, no siendo solamente adaptaciones de actividades en lápiz y papel sino actividades encaminadas hacia la conceptualización y la socialización del conocimiento [5]. Otros aspectos que también presentamos son el empleo de tutoriales en el aula, el empleo de software y las ventajas y desventajas del uso de estas herramientas tecnológicas y cómo han adquirido sentido desde la Aproximación Instrumental.

Además, el desarrollo acelerado de las tecnologías de la información y comunicaciones (TIC), a las que cada vez más de nuestros estudiantes tienen acceso [6] y que ha provocado la producción acelerada de programas que son utilizados en todos los ámbitos de nuestra vida, transforman y agilizan muchas tareas. Desde esta perspectiva permiten

estudiar de manera diferente los campos de la ciencia, la ingeniería y la didáctica [7].

Actualmente nos preguntamos ¿si es posible enseñar ciencias en línea?, como con el uso de un laboratorio virtual de física [8], o los entornos virtuales donde participan gran cantidad de usuarios conectados en red llamados MUD (Multi- User Dungeon/Domain/Dimension). Dieterle y Clarke [9] presentan cómo MUVES (multi-user virtual environments) se han utilizado en la educación y como pueden utilizarse para la enseñanza inmersos en un contexto psicosocial.

II. CALCULADORAS GRAFICADORAS

A. Introducción de la herramienta

En este primer apartado como antecedentes del uso de la tecnología, presentamos resultados de investigaciones que consideramos muestran cómo el uso de las calculadoras graficadoras y las calculadoras avanzadas (también llamadas súper-calculadoras) despertaron gran interés entre los educadores matemáticos. A casi 30 años de la aparición de la calculadora CASIO fx 7000g recordamos comentarios de investigadores que las consideraban como una herramienta que contaba con el potencial para revolucionar la ME, tanto en la manera en que ésta se enseña como en los contenidos y énfasis del currículo escolar [10].

Muchas investigaciones como las que mencionaremos, están dirigidas a su efectividad como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje en cursos de precálculo y cálculo. Algunos resultados obtenidos sugieren que estos instrumentos pueden facilitar el aprendizaje de conceptos sobre funciones y graficación, desarrollar habilidades de visualización espacial, promover la exploración y provocar un cambio en el énfasis que se venía haciendo en la manipulación simbólica y demostración algebraica hacia la representación gráfica; examinando las relaciones entre representaciones gráficas, algebraicas y geométricas [10]. Particularmente Dick [11] presentó el caso de un estudiante universitario en la clase de cálculo, al que una super-calculadora le permitió proyectar una solución a un problema de manera lógica y directa, pudo tener un acceso más efectivo a múltiples representaciones, (gráfica, numérica y simbólica) así también la oportunidad de verificar su resultado simbólico regresando al registro gráfico.

Lo anterior pone en evidencia que las calculadoras graficadoras pueden aportar cambios importantes en la enseñanza de las matemáticas en el salón de clase. Un mayor acceso a múltiples representaciones y una mayor oportunidad para un enfoque en la resolución de problemas. Sobre la resolución de problemas Dick [11] comenta que el uso de una calculadora graficadora nos provee de más tiempo instruccional en el desarrollo del problema, (al reducir la atención en la manipulación algebraica) más herramientas de solución y una mayor percepción al hacer uso del registro gráfico. Por lo que para Dick la utilización de la calculadora graficadora en el contexto escolar

permitirá redireccionar el currículum hacia una disminución del cálculo simbólico y numérico, favoreciendo la profundización en el aprendizaje conceptual.

Ruthven [12] comparó el desempeño de estudiantes (15-18 años) en tareas matemáticas que tenían acceso permanente a las calculadoras gráficas, con el de estudiantes con bases similares, pero sin acceso regular a esa herramienta. El cuestionario tenía 12 elementos gráficos para que el estudiante encontrara su correspondiente notación algebraica, esto es, se pretendía observar si los estudiantes eran capaces de articular la representación algebraica con la gráfica de la función presentada. Los resultados proporcionaron una fuerte evidencia tanto de reconocimiento como de refinamiento superior por parte del grupo que tenía acceso permanente a las calculadoras graficadoras.

Sin embargo, hay investigaciones que muestran que el uso de la calculadora graficadora quizás no facilite el aprendizaje de temas particulares de precálculo y que el aprendizaje de muchos conceptos gráficos tampoco es facilitado por esta herramienta [10]. Aunque estos investigadores si encontraron que si bien es posible que suceda lo mencionado, la calculadora graficadora permitió a los estudiantes la mayoría de las veces tener un mejor entendimiento al relacionar la expresión algebraica con su gráfica correspondiente y además ellos tendieron a conjeturar y generalizar.

Del Puerto y Minnaard [13] también describieron el uso de la calculadora gráfica en el nivel superior; mencionando que “Las calculadoras gráficas facilitan la exploración y el descubrimiento, favoreciendo una activa aproximación al aprendizaje y no solamente permiten el trabajo individual, pues las investigaciones indican que promueven la interacción entre estudiantes y maestros” [13]. Además, la investigación menciona los obstáculos que se presentaron en el nivel básico pese a que el nuevo currículum sugiere, a partir del segundo ciclo de Educación General Básica, el uso de la calculadora como herramienta para la realización de cálculos numéricos.

En esta primera etapa las investigaciones presentadas fueron exitosas, para los objetivos planteados, dado que la herramienta es portable (puede ser llevada al salón de clases), permite la visualización de la gráfica, de igual manera se puede desplegar el registro numérico y podemos obtener gran cantidad de información de la función que se está trabajando. Con todas las bondades encontradas, todavía en las aulas no se ha implementado, habiendo cierto rechazo de los profesores para su uso y la organización del currículum en ambientes informáticos [2].

Ese el caso de las dificultades que vieron maestros y directores [13] para emplear calculadoras en el aula: temor, no estar disponibles en las instituciones, falta de capacitación, costo, falta de tiempo, entre otros. Por lo que se refiere a los maestros de los que habla esta investigación, coinciden en que su uso intensivo puede tener efectos negativos sobre el aprendizaje no beneficiando a los alumnos en la retención e internalización de las operaciones; por lo que las creencias de los maestros contribuyen a no estar de acuerdo con la incorporación de

la calculadora en el currículum de la escuela básica en Argentina.

A pesar de estos obstáculos mencionados, otras investigaciones sobre el uso de la calculadora la recomiendan comentando que su empleo promueve que los alumnos generen información acerca de un problema dado, organicen dicha información a través de su uso, exploren patrones, entre otros [10]. Lo anterior puede comprenderse aún más si tomamos en cuenta que implementar esta herramienta, genera otro tipo de organización didáctica, en la que hay que diseñar actividades específicas y no triviales; así como el diseño de una evaluación con el uso de este instrumento.

Respecto a la evaluación del aprendizaje de los estudiantes con el uso de la calculadora graficadora se propone realizar estudios cualitativos de las funciones, como por ejemplo analizar las gráficas de las funciones en lugar de solo trazarlas [14]. Así también se debe incorporar la herramienta en actividades evaluadas como tareas y exámenes [14].

Debemos señalar que en los últimos 15 años los investigadores han sido más cuidadosos en los resultados de su uso [15]. Debido a que estas herramientas no se convierten de inmediato en instrumentos matemáticos eficientes ya que se requiere cierta experiencia para su uso [5]. También debe tomarse en cuenta que la herramienta no solo facilite una práctica matemática eficiente sino que permita sentar las bases de una cultura matemática permeada de valores sociales que determinen las relaciones con el mundo y su interpretación. Pues como observamos, los reportes de investigaciones que conformaron la primer década del uso de esta tecnología no daban respuestas claras de cómo las calculadoras graficadoras podían ser usadas para maximizar aprendizajes ni sugerían el tipo de prácticas o ambientes de aprendizaje que brindarían amplios beneficios a nuestros estudiantes.

Sin embargo, en este siglo las investigaciones sobre el impacto de las calculadoras graficadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han madurado y se ha extendido el uso de esta herramienta. En países como Inglaterra, Francia, Escocia, Suecia, Noruega y Finlandia las calculadoras gráficas no simbólicas están permitidas oficialmente en los exámenes; en Portugal, Francia, Austria y Eslovenia se recomienda el uso de sistemas de cálculo simbólico. Según el informe de la Encuesta Nacional de Ciencia y Educación Matemática 2000, más del 80% de los profesores de matemáticas de secundaria de Estados Unidos que fueron entrevistados utilizan calculadoras graficadoras en sus aulas [16].

En 2002 Texas Instruments en asociación con la Universidad Estatal de Michigan y bajo la dirección de Gail Burrill ex presidente del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), hizo una revisión exhaustiva de investigaciones en todo el mundo sobre el uso de la calculadora graficadora [16]. Los resultados obtenidos fueron más de 180, pero solo 43 fueron considerados por cumplir con estrictos criterios de arbitraje. Los estudios fueron agrupados alrededor de cinco preguntas:

- 1) ¿Cómo usan los profesores las calculadoras graficadoras y cómo relacionan su conocimiento y creencias con la tecnología, las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas?
- 2) ¿Con qué tipo de tareas matemáticas los estudiantes escogen usar la calculadora graficadora?
- 3) ¿Qué conocimientos y destrezas matemáticas son aprendidas por los estudiantes que usan calculadoras graficadoras?
- 4) ¿Qué ganan matemáticamente los estudiantes que utilizan la tecnología de la calculadora graficadora que no puede ser observado en ambientes no tecnológicos? y
- 5) ¿Esta tecnología tiene efectos similares en el desempeño de estudiantes de diferente sexo, status socio-económico y grupos de excelencia?

B. Otras formas de trabajo

Considerando el desarrollo alcanzado por las calculadoras como los CAS y otros softwares en este bloque de investigaciones contemplamos otros factores, que en un principio no fueron tomados en cuenta, como por ejemplo la argumentación, análisis de comportamientos gráficos, reforzamiento de explicaciones, etc.

Cedillo [17] reportó una investigación que utilizó al software Derive, el trabajo fue en México sobre el desempeño de 800 profesores de matemáticas que atendieron cerca de 200000 estudiantes (12-15 años) en un periodo de cuatro años. El estudio incluyó dos aspectos, uno buscó estudiar lo que ocurre en el proceso enseñanza-aprendizaje de la aritmética y el álgebra en un ambiente computarizado. Se utilizó la versión Derive instalada en la calculadora TI 92. Como resultados alentadores se observó que bajo estas nuevas formas de trabajo en el salón de clases los estudiantes descubren resultados matemáticos y generan argumentos sólidos. Sin embargo también se vio que los profesores no están empleando suficientes recursos de manipulación simbólica, como los que ofrece un sistema algebraico computarizado debido a que consideran que los estudiantes deben dominar primero los algoritmos para la transformación algebraica mediante técnicas tradicionales de lápiz y papel.

En 2003 Solis [18] presentó una investigación realizada en un ambiente gráfico de simulación. El objetivo de su trabajo se centró en el estudio del entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de la observación de situaciones visuales y analíticas que se presentaron en las estrategias de los estudiantes cuando resuelven problemas. Para llevar a cabo el estudio creó un ambiente gráfico acentuando la idea de simulación, usando calculadoras graficadoras.

Las actividades se implementaron con estudiantes de la Universidad Autónoma de Chiapas que ya sabían resolver ecuaciones lineales de primer orden, pero cuando se les presentó la actividad que contenía las ecuaciones y sus gráficas no intentaron resolver algebraicamente, su atención se centró en los comportamientos gráficos. El diseño y la aplicación se llevó a cabo en dos partes: primeramente un grupo que cursaba ecuaciones diferenciales respondió un

cuestionario. En segundo lugar otro grupo distinto participó en una entrevista clínica donde se tuvieron hojas divididas en dos columnas; en una de ellas se proponían ecuaciones diferenciales y en la otra gráficas, para que fueran relacionadas. Asimismo, en la solución de las actividades se observó que los estudiantes trasladan las propiedades geométricas de una curva conocida al contexto de las ecuaciones diferenciales.

Además encontró que los alumnos refuerzan sus explicaciones, argumentando a través del registro gráfico, con el uso de dispositivos tecnológicos, donde las funciones son graficadas y vistas de manera global, sin poder analizarse el proceso de construcción. Por otra parte a las explicaciones que conforman el argumento de los estudiantes se les llamó comportamiento tendencial de las funciones convirtiéndose en un organizador de los contenidos del cálculo.

Otras observaciones importantes que se desprenden de esta investigación son:

- Las calculadoras y otras herramientas que grafican funciones hicieron que los estudiantes fijaran su atención en la forma global de la gráfica, favoreciéndose así estos argumentos gráficos
- El método estándar de solución para las ecuaciones en cuestión no favoreció el análisis gráfico
- Los estudiantes pudieron construir un método de solución de un tipo particular de ecuaciones diferenciales a partir de reconocer patrones analíticos

En este paso por el uso de la calculadora graficadora nos damos cuenta que en su evolución, ya no solamente predomina el registro gráfico donde el estudiante obtenía un primer acercamiento a la forma de la gráfica; ahora hace conjeturas, puede pensar recursivamente, su apreciación numérica aumenta, etc.

En el siguiente apartado incluimos una teoría de la ME en la que se han basado estudios que también utilizan como tecnología la calculadora graficadora.

III. SISTEMAS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

En el marco de los sistemas semióticos de representación Hitt [19] analiza la construcción de conceptos desde una teoría de las representaciones por parte de los estudiantes, particularmente sobre la problemática del uso de la calculadora gráfica para la construcción de conceptos en el aula de matemáticas. Comenta que es necesario hacer un uso reflexivo de la tecnología y además en el desarrollo de habilidades matemáticas, el empleo de diferentes representaciones constituye una herramienta fundamental para la resolución de problemas. Un grupo de estudiantes presentó dificultades al tratar de resolver la ecuación $\tan(x)=x$, esto fue porque los alumnos no tomaban la pantalla como si fuera una ventana en donde solamente estaban observando una parte de la gráfica y además tuvieron dificultad en interpretar lo que percibían en esa ventana, pues algunos estudiantes consideraron a las

asíntotas como parte de la gráfica de la función, proponiendo más intersecciones [15].

Otros estudios relevantes dan pie a reafirmar el uso de la calculadora graficadora desde la perspectiva de los registros de representación, por ejemplo Janvier [20] habla de los procesos de traslación (directo e indirecto), interesándole las traslaciones indirectas que son en donde se presentan las mayores dificultades; para subsanarlas propone un puente de apoyo (registros intermedios) en las conversiones entre dos registros de representación, como es el caso del paso del registro gráfico al algebraico en donde es conveniente usar como intermediario el registro tabular, registro que explícitamente nos puede proporcionar la calculadora y que nos hará más fácil la construcción de la expresión algebraica correspondiente a la gráfica presentada.

Podemos concluir que estas herramientas proporcionan un ambiente ideal para que los estudiantes integren las representaciones numérica, gráfica y simbólica de las relaciones matemáticas; teniendo como soporte actividades didácticas que favorezcan el aprendizaje conceptual.

IV. USO ESPECÍFICO DE SOFTWARE Y SU IMPLEMENTACIÓN EN EL USO DE LA COMPUTADORA

Los investigadores en ME también han utilizado computadoras y una amplia gama de software de matemáticas como por ejemplo: Derive, Cabri (incluido en algunas calculadoras), Logo, etc., para el aprendizaje de las matemáticas.

En su investigación González [21] desarrolló una introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales usando como recurso didáctico el paquete matemático Maple para reforzar definiciones, teoremas, comportamiento gráfico de soluciones y que pudieran ser llevadas a cabo por el estudiante con un mínimo conocimiento del paquete; haciendo énfasis en la representación gráfica de soluciones. La experiencia se realizó en la carrera de Ingeniería informática de la UCLA en Venezuela. La utilización de Maple se debió a su potencial de graficación ya que es especialmente versátil para los efectos de visualización del campo direccional así como para las particularidades del problema, según las condiciones iniciales.

Sacristán [4] utilizó Logo en una investigación con el objetivo estudiar el infinito matemático para ello construyó un ambiente o micromundo computacional, en donde los estudiantes, mediante actividades de programación pudieron construir y explorar diferentes tipos de representaciones (simbólica, gráfica y numérica) de procesos infinitos, en específico sucesiones y series infinitas. La población estuvo conformada por cuatro parejas de estudiantes (15-18 años) que a través de estudios de caso, analizó como las herramientas del micromundo fueron utilizadas en la estructuración de las actividades y a su vez de cómo dieron sentido a los procesos estudiados. El marco teórico fue de tipo constructivista enfatizando la importancia de las representaciones en el proceso de

aprendizaje. La autora comenta que la computadora al permitir el uso de representaciones simbólicas, numéricas y visuales dinámicas, puede ser utilizada como un medio de exploración donde los estudiantes pueden expresar ideas. Las actividades de construcción en Logo por parte de los alumnos incluyeron modelos gráficos de algunas sucesiones infinitas y sus series correspondientes.

Los alumnos pudieron investigar el comportamiento de procesos infinitos como la velocidad de convergencia y fue un aspecto importante para que encontrarán explicaciones y construyeran significados del por qué algún proceso era convergente o divergente. Al explorar la sucesión y serie armónica los estudiantes observaron el lento comportamiento de convergencia de la sucesión, la divergencia de la serie y el efecto de la velocidad de convergencia de la sucesión en el comportamiento de la serie correspondiente. Coordinaron el elemento visual con el numérico y lo complementaron con el análisis de la fórmula matemática.

Díaz [22] desarrolló una propuesta metodológica para la enseñanza avanzada de la geometría empleando el ambiente computacional Cabri-Géomètre. En lo teórico se argumentó que en la currícula tradicional el sujeto interactúa con los objetos geométricos a través de imágenes fijas, sin ser posible alterarlas en posición o magnitud dentro de una misma construcción teniendo que ser reconstruidas para dar más información gráfica; convirtiéndose este proceso en laborioso, no pudiéndose apreciar cambios graduales a los elementos de la imagen.

Bretscher [23] realizó una investigación con 23 estudiantes de una escuela primaria privada, con altos promedios en matemáticas. Los alumnos trabajaron en parejas una secuencia con 5 lecciones usando cabri-géomètre. Surgiendo tres estrategias de enseñanza para facilitar la génesis instrumental de los estudiantes en el cabri y más generalmente en el software de geometría dinámica.

En este mismo sentido, Soury-Lavergne [24] mencionó en su investigación cómo con el uso del modo drag del cabri géomètre en un ambiente de geometría dinámica elaborando y probando actividades se logra la iniciación de alumnos de 11 años en el razonamiento deductivo. Trabajándose la identificación de las propiedades geométricas de las figuras contrariamente a sus propiedades gráficas. Así mismo comenta que el drag tiene un rol crucial para el éxito de las actividades, debiéndose tener mayor atención en el modo que los estudiantes deben usarlo.

Tinoco [3] diseñó estrategias didácticas para la enseñanza de la variación lineal, utilizando también cabri-géomètre. Investigó los efectos de la aplicación de las estrategias en el uso de las gráficas y sobre el nivel de conceptualización de la variación lineal. Como referente teórico utilizó los registros semióticos de representación, en donde para la comprensión del objeto matemático se requiere de la articulación de al menos dos registros de representación. En este sentido el estudiante puede exteriorizar las diferentes representaciones mentales que tiene del concepto, preservando su significado.

El estudio se llevó a cabo con un grupo de 38 estudiantes (15-18 años) en Cuautla, México. Se diseñaron dos construcciones con el software en las que los alumnos pudieron explorar y descubrir las propiedades de las gráficas de la variación lineal, relacionándolas con su expresión algebraica correspondiente. Al final se encontró en los estudiantes un avance significativo en la deducción de la expresión algebraica que correspondía a una gráfica dada, repercutiendo en el nivel de conceptualización de la variación lineal.

La investigación de Camacho y Depool [25] se centró en torno a dos aspectos principales: el curricular y el actitudinal. Previo al estudio del cálculo diferencial los autores intentaron introducir el concepto de integral definida como área bajo una curva desde la perspectiva gráfica y numérica utilizando Derive, analizando la viabilidad de esta modificación, así como las posibles dificultades que surgieron en su implementación. En lo actitudinal se analizaron los posibles cambios de las actitudes de los estudiantes que desarrollaron secuencias de aprendizaje utilizando el software. Se usó una adaptación de la escala de actitudes de Artigue y Lagrange, conservando la categorización inicial. Se tomó una muestra de 58 estudiantes que conocían Derive divididos en dos grupos. Un experimental de 14 alumnos y otro de control con 44. El primer grupo trabajó en una sala con 15 computadoras y el segundo con métodos tradicionales.

Al finalizar el trabajo los investigadores aplicaron un cuestionario de 32 preguntas, agrupadas en tres partes y con sus respectivos indicadores. Después de un análisis cuantitativo, los autores encontraron lo reportado por otros investigadores en cuanto a que las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y sobre si mismos juegan un papel importante en el desarrollo de respuestas afectivas a situaciones matemáticas y que las emociones que experimentan al someterlos a un tratamiento donde se utilicen nuevas tecnologías son positivas. Además el uso de programas de álgebra simbólica con el empleo de actividades de enseñanza específicas, crean un entorno de aprendizaje útil para la enseñanza de las matemáticas y pueden resultar determinantes para separar los aspectos actitudinales de los procedimentales.

En O'Farrill, Rodríguez, Durán, Vázquez y Díaz [26] se muestra un proyecto de investigación pedagógica para transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina matemática básica en una carrera de ingeniería con base en el uso de la informática. El trabajo se centró en perfeccionar la asignatura Álgebra Lineal para el perfil de una carrera de Ingeniería informática en Cuba, introduciendo la tecnología informática como tecnología educativa para el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje que desarrollen en los estudiantes capacidades para aprender a aprender.

Usaron como indicador del desarrollo de los estudiantes su desempeño en la resolución de problemas matemáticos. Por lo que proponen el desarrollo de una enseñanza sistémica a través de la resolución de problemas, considerando que de esta manera los estudiantes tienen la posibilidad de emplear sus estructuras cognitivas. Los

temas a desarrollar a través de la resolución de problemas fueron: sistemas de ecuaciones lineales, cambios de base y aplicaciones lineales, y diagonalización. Propusieron la discusión de la modelación del problema, usando Derive desarrollaron un software educativo en el que han estado trabajando para el rediseño de la asignatura.

De las investigaciones mencionadas en esta sección, podemos observar que el empleo de la tecnología y los software usados, no siempre son suficientes y no necesariamente garantizan el éxito. Balacheff [27] propone que en el diseño de ambientes tecnológicos para la educación, se contemple al estudiante como eje central y tener como objetivo el conocimiento siendo la interacción la base del diseño de este entorno. Cuando habla de conocimiento se refiere a las construcciones intelectuales que la sociedad ha institucionalizado y las construcciones intelectuales que se producen en el ser humano como resultado de resolver problemas o realizar tareas.

V. APLICACIÓN DE TUTORIALES

En el uso de los tutoriales para la enseñanza de la matemática tenemos la investigación de Melgarejo [28] que se centró en el planteamiento de un modelo para la evaluación del aprendizaje y la propuesta de otro modelo para la estrategia pedagógica basado en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales y en la teoría matemática de los conjuntos de frontera imprecisa. Su objetivo fue mostrar la utilidad de los anteriores modelos en la implementación de un tutorial inteligente para el tema de trazado de curvas.

La investigación se realizó en Cuba con estudiantes universitarios de ingeniería. De los tutoriales que fueron estudiados en la investigación, las estrategias pedagógicas utilizadas se basan en las repuestas de los estudiantes. Se usó el tutorial Salomón basado en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales, pero este tutorial solo es inteligente en la componente pedagógica, el estudio y profundización en las formas de procesar y modelar el conocimiento pedagógico. El funcionamiento del tutorial se explicó teniendo en cuenta la estructuración en: examen inicial, preguntas de comprobación, dominio, simetría, extremos, concavidad-convexidad, asíntotas, monotonía y trazado de curvas.

El tutorial se validó, en lo didáctico, en dos fases: una como tutorial en donde los alumnos solo tomaron clases en la computadora. La otra utilizándolo como consulta donde los alumnos recibieron las clases en el aula. Como conclusión los investigadores vieron que el uso del tutorial resulta efectivo en el proceso de enseñanza/aprendizaje de los alumnos, además que brinda más ventajas con los alumnos buenos y regulares cuando es usado como tutorial.

También sobre tutoriales, Fernández y Lima [29] analizaron la tecnología empleada en la enseñanza de las matemáticas y su tendencia. Así mismo describieron un modelo combinado para el diseño de un curso y un modelo de tutoriales para computadoras personales. Los investigadores tomaron como base resultados de

investigaciones pedagógicas sobre las dificultades en matemáticas que presentan los estudiantes de nivel medio que optan por ingresar a carreras universitarias. Dividieron la realización de tutoriales en cuatro temas centrales: Preparación para los exámenes de ingreso, introducción al cálculo Diferencial e Integral, Estadística paramétrica y Estadística no paramétrica.

Consideraron que un sistema tutorial de enseñanza necesita representar el conocimiento y modelar tal estructura a través de principios y estrategias de desarrollo de hipertextos. Uno de los modelos para el diseño del contenido de un curso combina tres componentes fundamentales: exposición, red de preguntas y monitor de solución de problemas; incluyendo módulos para el administrador del aprendizaje, el generador del aprendizaje, la estrategia de aprendizaje, el modelo del estudiante e historial y perfil del estudiante. Los investigadores concluyeron que utilizar multimedia e hipermedia en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática, y en particular el cálculo, benefician al estudiante en cuanto al incremento de retención, de motivación, mayor individualización y flexibilidad en los periodos de formación entre otros.

Otros investigadores [29] realizaron un proyecto cuyo objetivo fue estructurar clases con el empleo de asistentes matemáticos y de una colección de tutoriales para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, orientados al trabajo en un ambiente de red. En la elaboración de la propuesta metodológica de los sistemas de clase se tuvieron cinco etapas: Análisis de necesidades educativas, selección del software matemático a utilizar, diseño de los trabajos científicos a realizar, desarrollo de los trabajos y su validación. Los temas abordados con el uso de asistentes matemáticos fueron: Trigonometría, funciones elementales, métodos numéricos, cálculo, entre otros. Los tutoriales incluyeron un juego de temarios, textos, gráficos, ejemplos de soluciones de problemas de tipo tradicional. Los investigadores concluyeron que la articulación de la informática en la escuela debe comenzar con la capacitación de los profesores y las experiencias adquiridas fueron en el diseño y estructuración de los contenidos a abordarse en la clase computarizada.

En el mismo rubro Cuevas, Mejía y Andreu [30] introdujeron y propusieron un Sistema Tutorial Inteligente (STI), como un colaborador del profesor que comparte con él las tareas docentes con un planteamiento didáctico transparente en su diseño. El STI incluyó la creación de un banco de problemas y está enfocado para apoyar la enseñanza de un curso tradicional de cálculo diferencial. Como referente teórico los investigadores mencionaron que uno de los usos de la computadora es en los sistemas tutoriales, cuyas ventajas principalmente son: La instrucción individualizada e interactiva, el poder trasladar la experiencia de un grupo interdisciplinario de profesionales y científicos de la enseñanza a un programa de computadora, eliminar algunos problemas causados por la comunicación directa entre el alumno y el profesor.

El planteamiento o estructura didáctica del sistema, siguió el modelo didáctico propuesto por Cuevas, Mejía y

Andreu [30]. En la propuesta didáctica, se sugirió que cada vez se enseñe un concepto trascendente en el curso y se propongan actividades posteriores que involucren al concepto para la comprensión de otros conceptos más complejos. Otra parte importante es intentar situar el concepto en diferentes registros de representación promoviendo la articulación entre ellos. Al final los autores recomiendan que para iniciar un tema o dar un concepto matemático es conveniente hacerlo partiendo de uno o varios problemas que constituyan el llamado proyecto de acción y cuya solución lleve a los estudiantes a la adquisición de los conceptos matemáticos propuestos.

Hasta el momento hemos presentado investigaciones de diversos tipos, iniciando con calculadoras graficadoras, pasando por software, utilizando otras herramientas tecnológicas (computadoras), estudios basados en la teoría de los sistemas semióticos de representación y la inclusión de tutoriales; percatándonos que aún hay mucho más que trabajar con la ayuda de estas herramientas y así encontramos diversas recomendaciones como menciona Abaira [31], del por qué las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Abaira toma en cuenta las consideraciones que el NCTM [32] menciona en relación con este tema entre las que se encuentran:

Los estudiantes deben disponer de calculadoras adecuadas.

En todos los salones de clase debe existir una computadora. Todos los estudiantes deben tener acceso a una computadora para el trabajo individual y por equipo.

Los estudiantes deben aprender el manejo de la computadora como herramienta para el proceso de información y la realización de cálculos en la investigación y resolución de problemas.

Asimismo, la investigadora comenta que los estudiantes deben estar en condiciones de usar los recursos tecnológicos y que los profesores deben tener una amplia formación para decidir cuándo usar las nuevas tecnologías y cómo. Por lo que la formación de maestros en las nuevas tecnologías para la educación matemática debe contemplar tres líneas:

- Formación general en nuevas tecnologías educativas.
- Formación específica en nuevas tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas.
- Formación específica en nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas.

Como ejemplo Abaira [31] presentó el caso de la Universidad de León. Donde la única asignatura incluida en los planes de estudio para maestro es *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación* que es insuficiente para proporcionar la formación en matemáticas y su didáctica que precisan los profesores. Por lo anterior en un primer intento de investigar sobre este tema, dicha universidad ofertó una asignatura de libre configuración. La población con la que se trabajó fue de 30 alumnos, no resultando significativa para poder recomendar a las autoridades la inclusión de esta asignatura en los planes de estudio.

VI. AMBIENTES CAS Y GÉNESIS INSTRUMENTAL

A continuación presentamos investigaciones que fueron realizadas con el fundamento teórico de la aproximación instrumental, entendida como el proceso en el cual el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias [33], pasando por las etapas de descubrimiento, selección, personalización y transformación [34]. Lo que permite el desarrollo de esquemas de utilización. Por lo que este proceso puede enriquecer o empobrecer la herramienta si no hay una tarea específica. Así mismo se enfatiza la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje. Primeramente partimos de investigaciones que reportan beneficios en el aprendizaje de las matemáticas, con el uso de ambientes CAS.

En este sentido Pierce y Stacey [35] propusieron un marco común (la terminología y las herramientas) para mejorar la investigación en el aprendizaje del álgebra en ambientes CAS. Argumentando la necesidad de construir una visión algebraica en los estudiantes, especialmente basada en la manipulación simbólica. La visión algebraica como competencia se aborda a través de dos aspectos: Expectativas algebraicas y la capacidad de enlazar representaciones.

Siguiendo esta evolución sobre el uso de la tecnología, otros grupos de trabajo [5] encuentran dificultades en el manejo técnico de la herramienta, lo que conlleva a no poder integrar eficazmente los CAS en la enseñanza de las matemáticas, argumentando que había una gran diferencia entre el discurso de los expertos sobre el potencial de los CAS para el aprendizaje de las matemáticas y la realidad que imperaba en las aulas [2], por lo que proponen tener como sustento teórico la Génesis Instrumental (GI) como una forma de aproximarse al uso de ambientes virtuales de enseñanza/aprendizaje en la computadora y/o calculadora graficadora; por ejemplo:

Camacho [36] presentó dos investigaciones desarrolladas en la GI. La primera sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral definida con el CAS Derive, como mediador en el proceso de enseñanza aprendizaje y la segunda, utilizando el CAS Maple V, con el objetivo de operacionalizar algunos resultados teóricos con estudiantes de primer semestre de universidad sobre la integral definida. Participaron 31 estudiantes en el curso de Cálculo I. Se observó un primer nivel de instrumentación donde los estudiantes descubren los comandos y sus efectos, aunque no tienen en cuenta otras informaciones. En algunos de los estudiantes se observó un atisbo de comprensión de la herramienta y de combinación de los elementos teóricos con los comandos adquiridos.

En este mismo sentido Briceño y Cordero [37] en su investigación cuestionaron el papel que juega el uso de la tecnología en el conocimiento matemático, tratando de responderse preguntas como: ¿De qué manera afecta la actividad matemática? ¿Qué tipo de matemática refleja el uso tecnológico? Para responderse incluyeron la GI en su marco teórico, pretendiendo evidenciar el papel que juega la tecnología en el conocimiento matemático. Con ejemplos

de investigaciones orientadas al estudio del cálculo encontraron que sintomáticamente un alto porcentaje de alumnos responden equivocadamente al usar la calculadora graficadora. Apoyándose en la aproximación socioepistemológica los investigadores consideran a la graficación como una práctica social y se proponen entender como el uso de las gráficas es lo que norma cierta categoría matemática propia del uso de la calculadora graficadora.

Estudiaron una situación de modelación del movimiento en un ambiente tecnológico, con estudiantes de Nivel Medio Superior del CECyT 8, de primero, tercero y quinto semestre. Como objetivo principal tuvieron, entender el papel que juega la tecnología en el conocimiento matemático del estudiante en una situación específica. Así también pretendieron a través de categorías del conocimiento, encontrar indicadores de una integración tecnológica en el estudiante que le permitiera construir conocimiento matemático.

Otra investigación con el mismo sustento teórico la encontramos en Defouad [38], que en su tesis doctoral presenta un estudio de las variaciones de una función. Desde la GI con la calculadora TI-92, mostrándose la complejidad de los procesos de la instrumentación. Los estudiantes ponderaron la información proveniente de diversas aplicaciones en la calculadora (exploraciones numéricas y gráficas) en la búsqueda de una argumentación.

Desde la perspectiva de una aproximación instrumental Drijvers y Gravemeijer [39] presentaron una investigación relacionando el álgebra computarizada con el pensamiento algebraico, en particular para la resolución de ecuaciones que dependen de parámetros utilizando la calculadora TI89. A los estudiantes se les dieron tareas sobre la expresión algebraica de la ecuación de segundo grado en forma general y ecuaciones con uno de los parámetros generalizado. Se observó cómo interactuaban con la calculadora, primero su visión se limitó al registro numérico, sabían utilizar el comando *SOLVE* pero no pudieron reconocer la generalización.

En las ecuaciones donde un parámetro estaba generalizado, en un principio no tenían claro que se requería despejar la incógnita, finalmente lograron resolver la ecuación con el uso de la TI-89. Los investigadores argumentan “que el entendimiento de los conceptos algebraicos y las técnicas algebraicas computacionales están estrechamente relacionadas” y por medio de una aproximación instrumental se explicitan las dificultades de los estudiantes. Además encontraron que las dificultades técnicas de los alumnos tenían una base conceptual.

VII. CONCLUSIONES

Como pudimos observar el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas partió de su implementación en ingenierías didácticas y se puso de moda, pero no se vio avance más allá del trabajo en actividades. A lo largo de estos diez últimos años, con los ambientes CAS y la teoría

de la GI, vislumbramos que es posible que se pueda generar conocimiento. Escudero [40] comentó que los avances en tecnología demandan que se contemple a los artefactos (computadora), no solo como herramientas didácticas, sino como *recursos productores de conocimiento*. Las investigaciones nos señalan que el uso de la computadora mejora el aprendizaje de los estudiantes pero debemos tener precaución con esta nueva perspectiva, aún debe investigarse lo que cambia y lo que no cambia en nuestras mentes en la interacción con las nuevas tecnologías. Debe pensarse más en las propuestas didácticas y sus consecuencias cognitivas al introducir ambientes tecnológicos, especialmente software en el aula.

Particularmente Artigue [2], comenta que la aproximación instrumental recientemente se ha interesado en los tutoriales, planteándose nuevas preguntas en donde los resultados evidencian que estas tecnologías no solo implementan interacciones matemáticas sino también interacciones didácticas. Esta revisión nos muestra la necesidad de continuar realizando investigaciones que incorporen diferentes aproximaciones teóricas que permitan abarcar aspectos no considerados hasta ahora como son el uso masivo de la tecnología dentro y fuera del aula mediante la incorporación de computadoras, sensores y tecnología móvil.

Con respecto al punto anterior es necesario continuar con la revisión bibliográfica pues aún deben considerarse los avances que han surgido en los años recientes sobre los ambientes virtuales y sus caracterizaciones, como hacen Dieterle y Clark [9] con los ambientes virtuales multiusuario. Es tal el interés de la comunidad mundial que el 17mo. Estudio ICMI [41] está dedicado en su totalidad a la tecnología y la forma en que está modificando la enseñanza actual y futura, en dicho estudio se abordan diferentes temas desde el diseño curricular, la integración de la tecnología en la enseñanza hasta los posibles rumbos que tomará este campo.

REFERENCIAS

- [1] Duval, R., *Semiosis y Noesis*. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología de Educación Matemática. Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa*, (CINVESTAV-IPN, México, 1993), pp. 118-142.
- [2] Artigue, M., *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*, International Journal of Computers for Mathematical Learning 7, 245-274 (2002).
- [3] Tinoco, G., *La computadora como herramienta para mejorar la interpretación de gráficas de variación lineal*. En Farfán, R. M., Lezama, J. y Reséndiz, E. (Eds.), *Resúmenes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa México*, (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México, 1997), p. 201.
- [4] Sacristán, A., *Investigando el comportamiento de procesos infinitos a través de modelos y representaciones en un micromundo computacional*. En R.M. Farfán (Ed.),

- Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **12**, 115-119 (1999).
- [5] Artigue, M., *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*, International Journal of Computers for Mathematical Learning **7**, 245-274 (2002).
- [6] García, R. y Sánchez, D., *La enseñanza de conceptos físicos en secundaria: diseño de secuencias didácticas que incorporan diversos tipos de actividades*, Latin American Journal of Physics Education **3**, 62-67 (2009).
- [7] Talero, P. H., *Experimentos virtuales de Física. Mecánica*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 591-730 (2011).
- [8] Meisner, G. W., Hoffman, H. and Turner, M., *Learning Physics in a Virtual Environment: Is there Any?*, Latin American Journal of Physics Education **2**, 87-102 (2008).
- [9] Dieterle, E. and Clark, J., *Multi-user virtual environments for teaching and learning*. En M. Pagani (Ed.), Encyclopedia of multimedia technology and networking (2nd ed.) (Idea Group, Inc., USA, 2009).
- [10] Penglase, M. and Arnold, S., *The graphics Calculator in Mathematics Education*, Mathematics Education Research Journal **8**, 58-90 (1996).
- [11] Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. y Dick, T., *Research on technology in mathematics education*. En F. Lester Jr., Second Handbook of research on mathematics teaching and learning. Vol. 2, (Information Age Publishing, Charlotte, N.C., USA, 2007), pp. 1169-1207.
- [12] Ruthven, K., *The influence of graphics calculator use on translation from graphic to symbolic forms*, Educational Studies in Mathematics **21**, 431-450 (1990).
- [13] Del Puerto, S. y Minnaard, C., *El uso de la Calculadora Gráfica en el aprendizaje de la matemática*. En C. Barceló i Vidal (Ed.), *Homenatge al professor Lluís Santaló*. Universidad de Girona. Recuperado de http://www.udg.edu/Portals/88/Santaló/llibre_homenatge/L_a_calculadora_como_recurso_didactico_paper97.pdf. (2002). Consultado 5 octubre de 2011.
- [14] Ortiz, B., *Incorporación de la calculadora gráfica en el aula de matemática. Una Discusión actual hacia la transformación de la práctica*, Revista Sapiens **7**, 139-157 (2006).
- [15] Guin, D. y Trouche, L., *The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: the case of calculators*, International Journal of Computers for Mathematics learning **3**, 195-227 (1999).
- [16] Arnold, S. M., *Mathematics Education for the Third Millennium: Visions of a Future for Handheld Classroom Technology*. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.) MERGA27: Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. (MERGA, Sydney, 2004).
- [17] Cedillo, T., *Potencial de los sistemas algebraicos computarizados como herramienta para la enseñanza – aprendizaje del álgebra escolar*. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Dr_Tenoch_Conferencia.pdf. (2006). Consultado 5 de octubre de 2011
- [18] Solís, M., *Predicción y simulación: nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **16**, 386-392 (2003).
- [19] Hitt, F., *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana **10**, 213-224 (2003).
- [20] Janvier, C., *Traslation Processes in Mathematics Education*. En C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics, (USA, 1987), pp. 27-32.
- [21] González, Z., *Una introducción a las ecuaciones diferenciales apoyo computacional con Maple*. En R.M. Farfán, J. Lezama y E. Reséndiz (Eds) Resúmenes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa México (p. 223). (México, 1997).
- [22] Díaz, E., *El cabri-gèometrè: un muestrario de los problemas que resuelve y las preguntas que plantea*. En R.M. Farfán, J. Lezama y E. Reséndiz (Eds.), *Resúmenes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, (CLAME, México, 1997), p. 293.
- [23] Bretscher, N., *Dynamic Geometry Software: The Teacher's Role in Facilitating Instrumental*. En M. Joubert (Ed.), Proceedings of the British Society into Learning Mathematics **28**, 1-6 (2008).
- [24] Soury-Lavergne, S., *Deductive Reasoning and Instrumental Genesis of the Drag Mode in Dynamic Geometry*. En M. Chaleyat-Maurel (Ed.), Group 1-Theme 1: Integration of technology into school and other learning environments. ICME 11 (ICMI, México, 2008).
- [25] Camacho, M. y Depool, R., *Un Análisis Comparativo de las Actitudes de Estudiantes de Primero de Ingeniería hacia el uso de Ordenadores y Programas de Cálculo Simbólico para el Aprendizaje de los Conceptos de Cálculo*. En G. L. Beitía (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **14**, 611-618 (2001).
- [26] O'Farrill, Y., Rodríguez, C., Durán, M., Vázquez, M. y Díaz, M., *Álgebra lineal, informática y resolución de problemas*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **13**, 159-162 (2000).
- [27] Balacheff, N., *Knowledge, the keystone of TEL design (Les Cahiers Leibniz No. 127)*, (Laboratoire Leibniz-IMAG., Grenoble, Francia, 2005).
- [28] Melgarejo, L., *Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en Tutoriales Inteligentes*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **1**, 51-75 (1998).
- [29] Fernández, F. y Lima, S., *Entrenando con Multimedia en P.C. Sistemas Tutoriales para matemática y el cálculo*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **12**, 105-108 (1999).
- [30] Cuevas, C., Mejía, H. y Andreu, M., *CALCDIFE-II Propuesta de un entorno computacional inteligente para la enseñanza del cálculo diferencial*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **13**, 541-547 (2002).
- [31] Abaira, C., *Nuevas Tecnologías para la Educación Matemática: una asignatura pendiente*, Educación en Ciencias **3**, 44-49 (1999).

- [32] *National Council of Teachers of Mathematics*. Página Web de Illuminations Resources for Teaching Math. Recuperada de <http://illuminations.nctm.org/> (2009). Consultado 3 de octubre de 2011.
- [33] Rabardel P., *Les hommes et les technologies – approche cognitive des instruments contemporains*, (Armand Colin, Paris, 1995).
- [34] Trouche, L., *Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects*. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, (Springer Verlag, New York, 2005), pp. 9-40.
- [35] Pierce, R. y Stacey, K., *Monitoring Progress in Algebra in a CAS Active Context: Symbol Sense, Algebraic Insight and Algebraic Expectation*, *International Journal for Technology in Mathematics Education* **11**, 3-12 (2004).
- [36] Camacho, M., *La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso del CAS*. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* pp. 97-110. (2005).
- [37] Briceño, E y Cordero, F., *El uso de las gráficas bajo una perspectiva instrumental Un estudio socioepistemológico*. En M. Chaleyat-Maurel (Ed.), *Topic Study Group 16: Research and development in The Teaching and learning of calculus*. ICME 11 (ICMI, México, 2008).
- [38] Defouad, B., *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de premièreS* [Tesis Doctoral], (Université Paris 7, Francia, 2000).
- [39] Drijvers, P. y Gravemeijer, K., *Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes*. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, (Springer Verlag, New York, 2005), pp. 163-19.
- [40] Escudero, C., *Una mirada alternativa acerca del residuo cognitivo cuando se introducen nuevas tecnologías. El caso de la resolución de problemas en ciencias*. En A. San Martín (Ed.), *Convergencia Tecnológica: la producción de pedagogía high tech.*, (CINVESTAV, México, 2009).
- [41] Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (Eds.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, (Springer, London, 2010).

Usando el patrón de interferencia de la doble rendija para obtener el espesor de una lámina delgada transparente



Julio Guevara

*Departamento de Ingeniería Ambiental, Física y Meteorología,
Universidad Nacional Agraria La Molina, Av. La Molina S/N,
Lima 12, Perú.*

E-mail: jcgueinj@lamolina.edu.pe

(Recibido el 10 de Marzo de 2014, aceptado el 27 de Junio de 2014)

Resumen

Este artículo describe el uso del patrón de interferencia generado por la doble rendija para determinar el espesor de un medio delgado transparente. Luego se compara el valor del espesor de la lámina transparente medida con el valor obtenido en la medición del espesor con un micrómetro. Los resultados indican que este procedimiento es adecuado para la medición de los espesores de materiales transparentes teniendo como aplicación la medición de los espesores de las películas delgadas.

Palabras claves: Interferometría, medición de espesores, películas delgadas.

Abstract

This paper examines the use of the interference pattern generated by the double slit for determining the thickness of a thin transparent medium. Then compares the value of the thickness of the transparent sheet measured with the value obtained in the thickness with a micrometer measurement. The results indicate that this method is suitable for measuring the thickness of transparent materials having application as measuring the thickness of thin films.

Keys words: Interferometry, thickness measurement, thin film.

PACS: 07.60.Ly, 06.90.+v, 42.25.Hz

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los métodos ópticos utilizados en metrología requieren de un análisis del patrón de interferencia el cual consiste de una sucesión de zonas claras y oscuras que se observan sobre una pantalla colocada en la región de interferencia. El uso de esta técnica permite examinar la variación del patrón de interferencia que es generada por la diferencia de fase y que es proporcional al espesor de la lámina sin la necesidad de un contacto directo con el elemento a estudiar.

Un típico ejemplo de un patrón de interferencia es el producido por el interferómetro de Young. Este interferómetro consiste en iluminar dos rendijas muy estrechas y separadas por una distancia muy pequeña. La fase del patrón de interferencia es proporcional a la separación de las rendijas e inversamente proporcional a la distancia de la rendija a la pantalla de observación. Las franjas son contadas manualmente para determinar el orden de la franja para realizar una medición cuantitativa.

El uso de la interferencia de la luz en la medición del espesor de medios transparentes es rápido, preciso y no destructivo. De esta manera, la interferometría se utiliza como un método cuantitativo para la determinación de los parámetros ópticos de los materiales tales como el de las

películas delgadas, las fibras ópticas, las fibras de polímero y guías de onda.

La determinación del espesor de una lámina delgada a través del patrón de interferencia puede ser obtenida a partir de diferentes técnicas interferométricas.

Matsuo *et al.* [1] determinaron los valores del espesor y el índice de refracción de películas de polipropileno y otras utilizando técnicas interferométricas. Harrick [2] usaron espectrofotómetros IR para estimar el espesor y el índice de refracción de las películas a partir de los patrones de interferencia obtenidos. Hernández *et al.* [3] utilizan un interferómetro de Michelson para medir el espesor de película. Ellos reemplazaron uno de los dos espejos por un sustrato conteniendo la película. Hamza *et al.* [4] utilizan un interferómetro de Lloyd's para determinar los mismos parámetros de las películas delgadas con diferentes espesores. Rao [5] describe un método para calcular el espesor o el índice de refracción de películas delgadas usando las franjas de difracción de Fraunhofer de la doble rendija.

El presente trabajo se centra en aplicar el método propuesto por Rao [5] en la medición del espesor de una lámina transparente de acetato utilizando el patrón de interferencia producido por la doble rendija. Mostrando la facilidad de este método para determinar el espesor de la lámina.

II. TEORIA

La Interferencia de ondas luminosas es un fenómeno que pone de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz y es la superposición de dos o más ondas vectoriales.

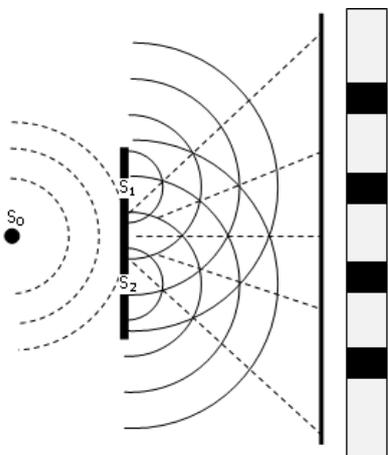


FIGURA 1. Experimento de Young de la doble rendija.

La interferencia óptica corresponde a la interacción de dos o más ondas de luz que producen una intensidad luminosa resultante que se desvía de la suma de las intensidades luminosas componentes Hecht [6]. La figura 1 muestra la configuración general para producir interferencia luminosa de dos rendijas S_1 y S_2 . La fuente S_0 es una fuente puntual de luz monocromática cuyos frentes de onda llegan a las dos ranuras para crear fuentes secundarias S_1 y S_2 . Las ondas secundarias que salen desde las dos fuentes S_1 y S_2 tienen una diferencia de fase constante en el tiempo lo cual produce una serie de franjas brillantes y oscuras. Las zonas de claro y oscuro se denominan patrón de franjas de interferencia.

A. Interferencia de la doble rendija

Con la ayuda del principio de superposición, es posible calcular las posiciones de los máximos (regiones brillantes) y mínimos (regiones oscuras) usando las siguientes condiciones:

- (a) La luz de las rendijas S_1 y S_2 son coherentes, es decir, existe una relación constante en la diferencia de fase entre las ondas de las dos fuentes.
- (b) La luz de las rendijas S_1 y S_2 son de la misma longitud de onda.

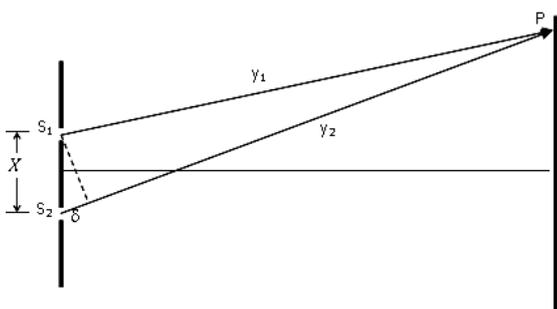


FIGURA 2. Formación del patrón de interferencia en la doble rendija.

En la figura 2, sean y_1 y y_2 las ondas que se generan en cada rendija y cada onda tiene una frecuencia ω y una amplitud a y llegan a la pantalla en un punto P suficientemente distante de las rendijas, entonces:

$$y_1 = a \text{sen}(\omega t - kx_1) \text{ desde } S_1, \quad (1)$$

y

$$y_2 = a \text{sen}(\omega t - kx_2) \text{ desde } S_2. \quad (2)$$

La diferencia de fase entre las dos ondas en P está dada por

$$\delta = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1). \quad (3)$$

La diferencia de fase δ surge de la diferencia de camino $x_2 - x_1$, y depende solo de x_1 , x_2 y de la longitud de onda λ y no de la variación del comportamiento de la fuente.

La superposición de las dos ondas y_1 y y_2 en P da como resultado:

$$A = y_1 + y_2 = a[\text{sen}(\omega t - kx_1) + \text{sen}(\omega t - kx_2)]. \quad (4)$$

Escribiendo $x \equiv (x_1 + x_2)/2$ como la distancia promedio entonces la intensidad luminosa, que es el cuadrado de la amplitud, es:

$$I = A^2 = 4I_0 \text{sen}^2(\omega t - kx) \cos^2 \delta/2. \quad (5)$$

Donde $I_0 = a^2$. Si consideramos:

$$\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1. \quad (6)$$

Las ondas se refuerzan mutuamente para dar una interferencia constructiva y la diferencia de camino es:

$$x_1 - x_2 = n\lambda, n=1,2,\dots \quad (7)$$

Ahora, si consideramos

$$\cos \frac{\delta}{2} = 0. \quad (8)$$

Las ondas se cancelan para dar una interferencia destructiva y por lo tanto la diferencia de camino es:

$$x_1 - x_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda, n=0,1,2. \quad (9)$$

Hay dos puntos importantes a recordar a cerca de la intensidad del patrón de interferencia, estos son:

- La intensidad varía con el $\cos^2 \frac{\delta}{2}$
- Los máximos ocurren para diferencia de camino nulos con números enteros de la longitud de onda, mientras que los mínimos representan diferencias de camino de los números impares de la mitad de la longitud de onda.

B. Difracción de la doble rendija

Para formar el patrón de difracción de Fraunhofer de la doble rendija, consideremos que cada una de las dos rendijas se compone de infinitas franjas estrechas que actúan como fuentes de ondas secundarias. Entonces la

amplitud resultante en un punto P es la superposición de las ondas secundarias de ambas rendijas. Esto viene dado por Hecht [6]:

$$A = \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \frac{d}{2} \cos[\omega t - k(L - x \text{sen}\theta)] + \int_{\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2} + \frac{X}{2}} \frac{d}{2} \cos[\omega t - k(L - x \text{sen}\theta)]. \quad (10)$$

Donde d es el ancho de cada rendija, X es la separación entre las rendijas y L es la distancia del punto medio de la rendija al punto P. k y ω son el número de onda y la frecuencia de la onda y α es una constante. La evaluación de esta integral en la aproximación de Fraunhofer, es entonces:

$$A = 2ad \cos(\omega t - kL) \frac{\text{sen}\left[\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right]}{\left[\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right]} \cos\left[\frac{kX}{2} \text{sen}\theta\right]. \quad (11)$$

Por tanto la intensidad resultante es:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\text{sen}^2\left[\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right]}{\left[\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right]^2} \cos^2\left[\frac{kX}{2} \text{sen}\theta\right]. \quad (12)$$

Donde I_0 es la intensidad máxima del patrón de interferencia. Este resultado es el producto de dos funciones. La primera es el cuadrado de la función sinc correspondiente a la difracción de una rendija. La segunda es el término correspondiente al patrón de interferencia de la doble rendija. Estas dos funciones son mostradas en la figura 3a y 3b. La interpretación física de esta última relación es que el patrón de interferencia de la doble rendija está modulado por el patrón de intensidad de la difracción en cada rendija. El resultado de la modulación lo vemos en la figura 3c. Ambas funciones seno y coseno tienen máximos y mínimos para ciertos valores de θ . En particular, y para pequeños ángulos, $\text{sen}\theta \approx \theta$, los máximos de intensidad para la doble rendija ocurren para ángulos de:

$$\theta = \frac{n\lambda}{a}, n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Mientras que los mínimos en el patrón de difracción ocurren para ángulos de:

$$\theta = \frac{n\lambda}{d}, n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

Claramente se observa que un máximo del patrón de interferencia ocurre en un mínimo del patrón de difracción.

III. MATERIALES Y METODOS

Si la doble rendija se hace sobre un medio transparente se puede considerar que una porción del medio transparente expuesto a la luz incidente actúa como una sola rendija y el patrón obtenido será la combinación del patrón de difracción de una sola rendija y del patrón de interferencia de la doble rendija. K. Rao [5], determinó que el espesor para un medio transparente se puede calcular de la siguiente expresión:

$$t = \frac{\lambda}{[(N^2 - \text{sen}^2 \alpha_{n+1})^{0.5} - \cos \alpha_{n+1}] - [(N^2 - \text{sen}^2 \alpha_n)^{0.5} - \cos \alpha_n]}. \quad (15)$$

Donde α_n y α_{n+1} son dos ángulos sucesivos de dos mínimos de franjas centrales.

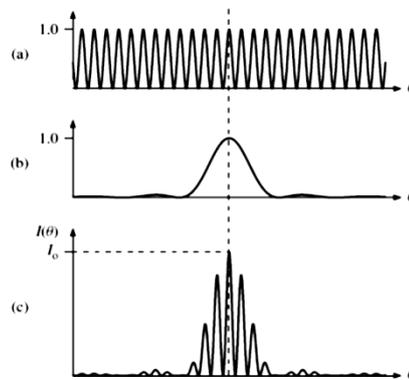


FIGURA 3. a) Patrón de interferencia de la doble rendija, se aprecia el cuadrado de la función coseno. b) El cuadrado de la función sin correspondiente al patrón de difracción de una rendija. c) Patrón de interferencia de la doble rendija modulado por el patrón de difracción de una rendija.

La Figura 4 muestra la disposición experimental utilizado para calcular el espesor de una lamina transparente delgada.

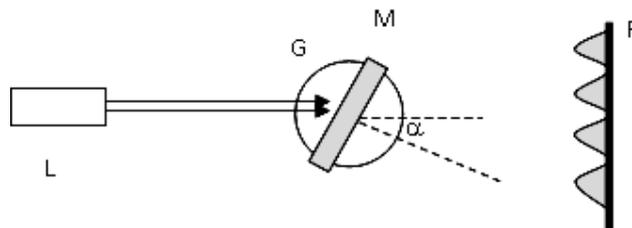


FIGURA 4. Disposición experimental. L: laser de He-Ne, M muestra, G: goniómetro y P: pantalla.

Como material para medir el espesor se utilizó una lámina de acetato empleada en la preparación de transparencias que se utilizan en las presentaciones, un laser de He-Ne de 632,8 nm un porta muestra para sujetar la lámina y un goniómetro.

Sobre la lámina transparente se elaboró una doble rendija de tal manera que diera una franja central oscura que satisficiera la ecuación 3. Esto último se consiguió a través de varios ensayos.

Para medir los ángulos sobre la doble rendija hecha sobre la lámina transparente se colocó esta sobre un soporte y a su vez se ubicó sobre un goniómetro de tal manera que se pudiera medir los ángulos al momento de hacer incidir la luz sobre la muestra. La doble rendija fue iluminada con un laser de He-Ne de 632.8 nm y los patrones de interferencia producidos por la doble rendija fueron proyectados sobre una pantalla ubicada a 0,5 m de la muestra.

El valor del índice de refracción de la lámina transparente se consiguió a través de la medición del ángulo de polarización.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El índice de refracción de la lámina transparente medida a través del ángulo de polarización fue de 1,48.

En la Tabla I se muestra los valores de los ángulos medidos para dos sucesivos mínimos de la franja central evaluados por la expresión:

$$(N^2 - \text{sen}^2 \alpha_n)^{0,5} - \cos \alpha_n. \tag{16}$$

TABLA I. Variación del ángulo de incidencia sobre la lámina transparente.

	Ángulo	$x_n = (N^2 - \text{sen}^2 \alpha_n)^{0,5} - \cos \alpha_n$	$x_{n+1} = (N^2 - \text{sen}^2 \alpha_{n+1})^{0,5} - \cos \alpha_{n+1}$	$t = \lambda / (x_{n+1} - x_n)$ (cm)
1	7°	0,482		
2	13°	0,488	0,482	0,011
3	18°	0,496	0,488	0,008

Luego, con los valores de la tabla I se tomo un valor promedio para obtener el espesor de la lámina transparente aplicando la ecuación 15. Como resultado se obtuvo un espesor de la lámina transparente de 0,0095 cm.

Para validar el resultado anterior se midió el espesor de la lámina transparente con un micrómetro. La medición obtenida con este instrumento fue de 0,01 cm. Así, el valor del espesor medido con el método interferométrico está en concordancia con el valor medido con el micrómetro. La tabla II resume esta última información.

TABLA II Comparación de los espesores de la lámina transparente.

	Espesor medido con el método de interferencia (cm)	Espesor medido con un micrómetro (cm)
	0,0095	0,01

De la tabla II podemos observar que la desviación entre el valor medido por el micrómetro y el método de interferencia no es más del 5%. Además podemos concluir que el valor medido por el método interferométrico nos da un valor superior que el obtenido por el micrómetro.

V. CONCLUSIONES

La precisión de los límites de este método depende directamente de la longitud de onda de la fuente que se utiliza.

El método interferométrico permite de una manera simple determinar el espesor de medios transparentes delgados. En especial este procedimiento podría aplicarse a la medición de películas delgadas obtenidas por evaporación.

Una ventaja de usar el patrón de interferencia en la medición de los espesores para medios transparentes delgados es la utilización de materiales sencillos, pues solo basta tener un laser y un goniómetro.

VI. REFERENCIAS

[1] Matsuo, M, *et al.*, *Interferometric method for determining the distribution of graft concentration in radiation-induced graft copolymer*, J. Appl. Polym. Sci. 7, 1833-1852 (1963).
 [2] Harrick, N, *Determination of Refractive Index and Film Thickness from Interference Fringes*, Applied Optics **10**, 2344-2349 (1971).
 [3] Hernández, M, *et al.*, *Interferometric thickness determination of thin metallic films*, Superficies y Vacío **9**, 283-285 (1999).
 [4] Hamza, A, *et al.*, *Refractive index and thickness determination of thin-films using Lloyd's interferometer*, Optics Communication **225**, S432 (2003).
 [5] Krishna Rao, K. V., *Simple Method of Determining the Thickness or the Refractive Index of Thin Films*, American Journal of Physics, **28**, 447 (1960).
 [6] Hecht E., *Optics*, (Addison Wesley, USA, 2002).

Matriz no trivial con autovalores de Stern-Gerlach construida a través de la solución para un problema inverso del álgebra matricial



J. D. Bulnes

Grupo de Mecânica Quântica, Informação Quântica e Física Aplicada, Universidade Federal do Amapá, Rod. Juscelino Kubitschek, Km. 2, Jardim Marco Zero, CEP. 68903-419, Macapá, AP, Brasil.

E-mail: bulnes@unifap.br

(Recibido el 27 de Febrero de 2014, aceptado el 15 de Junio de 2014)

Resumen

En este artículo, después de identificar un problema inverso del álgebra matricial, construimos una matriz no hermiteana cuyos autovalores coinciden con los del hamiltoniano para el experimento Stern-Gerlach, con partículas moviéndose en el plano vertical.

Palabras clave: Matriz hamiltoniana, efecto Stern-Gerlach, problema inverso.

Abstract

In this article, after identifying an inverse problem in the matrix algebra, we construct a non-hermitian matrix whose eigenvalues are equals to the eigenvalues of the Hamiltonian for the Stern-Gerlach experiment with particles moving in the vertical plane.

Keywords: Hamiltonian matrix, Stern-Gerlach effect, inverse problem.

PACS: 02.10.Yn, 02.30.Zz, 03.65.Aa,

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La identificación (en los años 1920) de que el álgebra matricial ofrece un conjunto de conceptos y herramientas matemáticas adecuadas para modelar varias propiedades y aspectos esenciales de los fenómenos que se manifiestan a escala microscópica, a través de la llamada ‘mecánica matricial’, esencialmente desarrollada por Heisenberg, fue muy importante para el establecimiento del modelo mecánico cuántico.

Como sabemos, en la mecánica cuántica a un determinado sistema microscópico le corresponde un operador autoadjunto, directamente relacionado con la energía del sistema, el hamiltoniano (cuántico), cuyos autovalores corresponden, precisamente, a las energías accesibles a ese sistema. En algunos casos simples, el espectro energético para un sistema cuántico es encontrado a través del uso del ‘principio aditivo de la energía¹’ y no a través de la solución del correspondiente problema de autovalores y autovectores. La afirmación anterior llega a ser más evidente en el caso del hamiltoniano de Stern-Gerlach, en que el uso de tal principio constituye un recurso

con el que se evita abordar el problema de la determinación de las autofunciones analíticas correspondientes, las que están completamente ausentes en los libros [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Por otro lado, el problema que acaba de ser mencionado en el párrafo anterior es uno, entre muchos, que son de interés en el álgebra matricial: Determinar los autovalores y autovectores de una matriz conocida. Si interpretamos el problema anterior como un *problema directo* entonces, de manera inmediata, podemos identificar el correspondiente *problema inverso*: Determinar la matriz (inicialmente desconocida) que, por exigencia, presente autovalores previamente definidos². Un caso particular del problema inverso anterior es el siguiente: Construir dos matrices, A y B , de manera que los autovalores de una de ellas sean los correspondientes a los de la otra disminuidos (o incrementados) en una cantidad previamente definida.

En este artículo, habiendo identificado el problema inverso y el caso particular mencionados, así como sus soluciones, procedemos a incorporarlos en un contexto mecánico cuántico con el propósito de construir una matriz no hermiteana que presente los autovalores completos del hamiltoniano de Stern-Gerlach. De esa manera, mostramos que no solamente las matrices hamiltonianas se relacionan

¹ En virtud del cual a cada término en el hamiltoniano (para una interacción específica) corresponde un sumando (una energía) en los autovalores, aparte del término de energía cinética.

² La solución para este problema se presenta de manera esquemática en el Apéndice I, en la parte final de este trabajo.

con la energía de un sistema cuántico, lo que, en principio, no podía ser descartado; sin embargo, no se conocían ejemplos específicos de esa situación.

El artículo es presentado en el siguiente orden: En la sub-sección A de la sección I presentamos las expresiones matemáticas que definen los autovalores completos de Stern–Gerlach (es decir, dependientes del gradiente del campo magnético) encontrados en [7]. En la sección II presentamos la solución al caso particular del problema inverso que ha sido definido. En la sección III, trabajando con el ‘hamiltoniano reducido’ de Stern–Gerlach y dentro de un contexto mecánico cuántico, incorporamos la solución encontrada en la sección II. En la sección IV calculamos las autofunciones analíticas de la matriz no hermiteana encontrada en la sección III. Finalmente, presentamos nuestras conclusiones y un apéndice.

A. Autoenergías completas de Stern–Gerlach

Con relación al efecto Stern–Gerlach, para el caso de partículas eléctricamente neutras de espín $\frac{1}{2}$ moviéndose inicialmente a lo largo de la dirección X y posteriormente, cuando ingresan a la región donde actúa el campo magnético, de manera que sus trayectorias se encuentran en el plano vertical $Y = 0$, fue mostrado en [7] que el gradiente intenso del campo magnético no solamente produce la separación espacial de las partículas del haz inicial, sino que también contribuye a las energías de las partículas haciendo con que los niveles energéticos se desplacen (con relación a los niveles energéticos que aparecen en la literatura); otro asunto que tampoco es discutido en los textos de mecánica cuántica [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Los autovalores del ‘hamiltoniano reducido’ de Stern–Gerlach (correspondiente a una partícula descrita en el párrafo anterior) encontrados en [7] son los siguientes,

$$E_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \mu_B B_0 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)}. \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{p_x^2}{2m} - \mu_B B_0 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)}. \quad (2)$$

Donde ξ_0 es el primer máximo de la función de Airy, α corresponde a la magnitud del gradiente del campo magnético y los demás parámetros son definidos de la manera usual. Notar que, en (1) y (2), el término que contiene el gradiente es dimensionalmente correcto; es decir, tiene unidades de energía, algo que no fue destacado debidamente en [7]. La presencia de \hbar en los términos correspondientes en (1) y (2) hace que los mismos sean pequesísimos, inclusive para un gradiente muy intenso. Las expresiones anteriores, que son exactas, ponen en evidencia la contribución explícita (de la magnitud) del gradiente del campo magnético a las energías en el efecto Stern–Gerlach; resultados que fueron destacados recientemente [8].

II. LA SOLUCION AL CASO PARTICULAR DEL PROBLEMA INVERSO

Formalicemos matemáticamente el problema matricial definido en la sección I: dada una matriz A , con autovalores a_k , construir una matriz B , del mismo tamaño que A , de manera que sus autovalores sean los de A disminuidos (o aumentados) en una misma constante q ; es decir, si,

$$A\bar{x}_k = a_k \bar{x}_k \quad (3)$$

se quiere construir una matriz M tal que,

$$(A + M)\bar{y}_s = B\bar{y}_s = b_s \bar{y}_s. \quad (4)$$

Con $b_s = a_s \pm q$. A continuación vamos a considerar el caso $b_s = a_s - q$. Para resolver el problema propuesto es suficiente asumir que $M = -qI$, donde I es la matriz identidad; en ese caso, tenemos,

$$(A - qI)\bar{y}_s = b_s \bar{y}_s \rightarrow A\bar{y}_s = (b_s + q)\bar{y}_s \quad (5)$$

Los números $b_s + q$ son, de acuerdo con (5), autovalores de la matriz A , independientemente de que ella sea hermiteana o no; de esta manera, podemos escribir, $b_s = a_s - q$ para los autovalores de la matriz B .

III. LA SOLUCION AL PROBLEMA INVERSO Y UNA MATRIZ CON AUTOVALORES DE STERN-GERLACH

En esta sección adaptamos la solución encontrada en la sección II a un contexto cuántico; particularmente, a uno relacionado con la matemática del efecto Stern–Gerlach, lo que permitirá construir una matriz no hermiteana cuyos autovalores sean los dados en (1) y (2).

Consideremos el ‘hamiltoniano reducido’ de Stern–Gerlach; esto es,

$$H_{red} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_z^2) I + \mu_B (B_0 + \alpha z) \sigma_3 \quad (6)$$

donde I es la matriz identidad y σ_3 es la tercera matriz de Pauli. Los autovalores de la hamiltoniana (6) están dados en (1) y (2), como se mostró en [7].

Dentro del contexto que estamos considerando, vamos a definir la matriz A como aquella que resulta de tomar $\alpha = 0$ en (6); es decir,

$$A = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_z^2)I + \mu_B B_0 \sigma_3 \quad (7)$$

matriz que, en consecuencia, tendrá como autovalores,

$$a_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \mu_B B_0 \cdot \quad (8)$$

$$a_2 = \frac{p_x^2}{2m} - \mu_B B_0 \cdot \quad (9)$$

Que se obtienen de (1) y (2) haciendo, aquí también, $\alpha = 0$. Los autovalores (8) y (9) están de acuerdo con la física del efecto Stern-Gerlach: la componente homogénea del campo magnético B_0 produce la separación energética de las partículas, pero no su separación espacial. A continuación, identificamos el número (arbitrario) q , en (5), con la expresión $\xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)}$, de esa manera la matriz B queda definida así,

$$B = A - qI = \begin{pmatrix} H_{1,1} & 0 \\ 0 & H_{2,2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Siendo,

$$H_{1,1} = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_z^2) + \mu_B B_0 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)}. \quad (11)$$

$$H_{2,2} = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_z^2) - \mu_B B_0 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)} \quad (12)$$

De manera explícita podemos escribir,

$$B = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_z^2)I + \mu_B B_0 \sigma_3 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{1/3} I. \quad (13)$$

Que, de acuerdo con la sección II, tiene como autovalores,

$$E_1 = a_1 - q \quad (14)$$

$$E_2 = a_2 - q \quad (15)$$

Observe que el resultado (14) es el mismo que el dado en (1); similarmente, el (15) es el mismo que el dado en (2).

De esta manera hemos construido una matriz, la B , que presenta los mismos autovalores que los del 'hamiltoniano reducido' Stern-Gerlach, (6). Puede apreciarse directamente que la matriz (13) no depende de la variable z , contrariamente a lo que se observa en el hamiltoniano (6); que presenta una dependencia (de la magnitud) del gradiente del campo magnético que es proporcional a la

potencia 2/3, a diferencia de la contribución lineal en (6) y que no se trata de una matriz hermiteana, sino diagonal.

El tercer sumando en (13), que tienen unidades de energía, puede ser interpretado como el correspondiente a la interacción entre el momento magnético y el gradiente del campo magnético; así, surge la pregunta: La matriz B podría considerarse como una hamiltoniana Stern-Gerlach? Para intentar responder esta pregunta será conveniente calcular antes las autofunciones de B , lo que será realizado en la siguiente sección.

IV. CÁLCULO DE LAS AUTOFUNCIONES DE B CON AUTOVALORES PREDEFINIDOS

En esta sección obtenemos las autofunciones exactas de la matriz (13); entonces, resolvamos el problema,

$$B\phi = E\phi. \quad (16)$$

Usando la matriz (13). Las ecuaciones diferenciales que se obtienen están desacopladas,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right) + \left[\mu_B B_0 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)} \right] \phi_1 = E\phi_1 \quad (17)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \right) - \left[\mu_B B_0 + \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)} \right] \phi_2 = E\phi_2. \quad (18)$$

Vamos a buscar una solución con la forma,

$$\phi_1(x, z) = \exp\{ip_x x / \hbar\} Q(z). \quad (19)$$

Pues de esa manera, conseguiremos que el autovalor correspondiente sea el dado en (14). Sustituyendo (19) en (17) encontramos la ecuación,

$$Q''(z) - \eta Q(z) = 0. \quad (20)$$

Donde el coeficiente η está definido de la siguiente manera,

$$\eta = \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{p_x^2}{2m} + \mu_B B_0 - \xi_0 \left(\frac{\mu_B^2 \alpha^2 \hbar^2}{2m} \right)^{(1/3)} - E \right). \quad (21)$$

Entonces, exigiendo, de acuerdo con lo discutido en la sección II y la adaptación presentada en la sección III, que el valor de E esté dado por (14), resulta que $\eta = 0$; en consecuencia, encontramos que $Q(z) = \kappa z + \lambda$, con lo cual tenemos que

$$\phi_1(x, z) = (\kappa z + \lambda) \cdot \exp\{ip_x x / \hbar\} \quad (22)$$

es la autofunción de B que está asociada con el autovalor (14). Procediendo similarmente encontramos que,

$$\phi_2(x, z) = (-\kappa z + \lambda) \cdot \exp\{ip_x x / \hbar\} \quad (23)$$

es la autofunción asociada con el autovalor (15). Notar que las funciones (22) y (23) no son de cuadrado integrable y no son linealmente independientes; es decir, la matriz B no tiene asociada una base propia.

V. CONCLUSIONES

Hemos identificado el siguiente problema del álgebra matricial: Construir dos matrices de manera que los autovalores de una de ellas sean los de la otra disminuidos en una cantidad definida anticipadamente. Ese problema y su solución fueron adaptados al contexto matemático del modelo cuántico para el efecto Stern-Gerlach, lo que hizo posible construir una matriz no hermiteana, en (13), cuyos autovalores coinciden con los del ‘hamiltoniano reducido’ de Stern-Gerlach, dados en (1) y (2). Ese resultado muestra, como primera conclusión, que no solamente las matrices hamiltonianas (que son hermiteanas) están relacionadas con las energías del efecto Stern-Gerlach.

La matriz construida en (13) es diagonal, pero esa no es la razón por la que ella no podría ser considerada como una ‘hamiltoniana’. A este propósito recordemos el caso del hamiltoniano hiperfino para un núcleo con momento magnético μ en un campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{k}$, apuntando en la dirección Z (solamente presentamos la parte del hamiltoniano correspondiente a la interacción magnética),

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma_n \hbar B_0 I_3 \quad (24)$$

donde $I_3 = (1/2)\sigma_3$. La matriz (24) tampoco es hermiteana, sino diagonal, pero, a diferencia de la matriz B , ella tiene asociada una base propia. Es evidente, a partir de los resultados mostrados en la sección IV, que las autofunciones de B no son de cuadrado integrable y no son linealmente independientes. De ello se concluye que no podríamos considerar a la matriz B como un ‘observable (no estándar) de energía’ porque a través de ella sería formalmente imposible escribir algunos estados que son admitidos por el modelo cuántico, como aquellos que no tienen una energía definida (que se escriben como una combinación lineal de los elementos de la base propia del operador de energía). Concluimos que la matriz B es una ‘falsa hamiltoniana’.

REFERENCIAS

- [1] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M., *Mecánica Cuántica, Física* Vol. III (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1971).
- [2] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F., *Quantum Mechanics*, Vol. I (Hermann & Wiley, Paris, 1977).
- [3] Ballentine, L., *Quantum Mechanics: A Modern Development*, (Word Scientific, Singapore, 1998).
- [4] Sakurai, J. J., *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1994)
- [5] Merzbacher, E., *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1970).
- [6] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory*, (Pergamon, Bristol, 1965).
- [7] Díaz Bulnes, J., Oliveira, I. S., *Construction of Exact Solutions for the Stern-Gerlach Effect*, *Brazilian Journal of Physics* **31**, 488 (2001).
- [8] Hsu, C. Bailey., Berrondo, Manuel, Van Huele, Jean-François S., *Stern-Gerlach dynamics with quantum propagators*, *Phys. Rev. A* **83**, 012109 (2011).

Apéndice A

El problema de construir una matriz que, por exigencia, tenga asociados autovalores previamente definidos es resuelto de manera simple. Denominemos por A la matriz 2×2 que, por ahora, es desconocida. La exigencia que asegura la existencia de una solución no trivial para el problema (*directo*) de autovalores y autovectores de la matriz A ; es decir,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (25)$$

donde λ es un autovalor, asegura también la solución al problema *inverso* que estamos considerando, siendo que en (25) deben considerarse conocidos los autovalores y desconocida la matriz. Posteriormente, considerando la situación en que despejamos, a partir de (25), el elemento (1,1) de A , que denotamos por a , él aparecerá escrito en términos del autovalor y de los demás elementos de la matriz, entonces debe exigirse una condición que asegure que la constancia de a . Si consideramos el caso no degenerado, debe exigirse la igualdad de las expresiones que definen el valor de a para cada uno de los autovalores λ , con lo cual se obtendrá una ecuación algebraica de segundo grado para otro elemento de la matriz. Los valores de cada uno de los elementos de A se obtienen a través de cálculos algebraicos simples.

A preliminary determination of the kinetics parameters of doped NaCl: Ca, Mn single crystals during fading stage



Alejandro Ortíz Morales^{1,2}, Claudio Furetta²

¹Unidad Interdisciplinaria de Ingeniería y Tecnologías Avanzadas, Departamento de Ciencias Básicas, IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2580, Colonia La Laguna Ticomán, C.P. 07340, México D.F., México.

²Unidad de Irradiación y Seguridad Radiológica, Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional, Autónoma de México, A.P. 70-543, 04510 México D.F., México.

E-mail: alortiz@unam.mx

(Received 14 February 2014, accepted 20 June 2014)

Abstract

Thermoluminescent (TL) kinetics parameters of NaCl single crystals doped with Ca and Mn as impurity ions at two concentration: CaCl₂ (1%) MnCl₂ (0.1%) and CaCl₂ (1%) MnCl₂ (0.3%), are analyzed. The crystals were exposed to gamma photons of ⁶⁰Co source, and the fading at room temperature was monitoring during 120 days. The kinetic parameters, activation energy E and the frequency factors s , of the TL glow curves were determined using the computerized glow curve deconvolution program (CGCD) using general order. The results show that the activation energy increases as the elapsed time from irradiation increases too, indicating a trap distribution occurred in the double doped sodium chloride crystals

Keywords: Thermoluminescence, kinetics parameters, sodium chloride.

Resumen

Se analizaron los parámetros termoluminiscentes cinéticos (TL) de NaCl monocristales dopados con Ca y Mn como iones impuros en dos concentraciones: CaCl₂ (1%) MnCl₂ (0,1%) y CaCl₂ (1%) MnCl₂ (0,3%). Los cristales fueron expuestos a fotones gamma de una fuente de ⁶⁰Co y el desvanecimiento a temperatura ambiente fue monitoreado durante 120 días. Los parámetros cinéticos, la energía de activación E y los factores de frecuencia s , de las curvas de resplandor TL se determinaron utilizando el programa computarizado de resplandor de curva deconvolucionada (CGCD) usando orden general. Los resultados muestran que la activación de la energía aumenta conforme incrementa demasiado el tiempo transcurrido desde la irradiación, lo que indica que ocurrió una distribución atrapada en los cristales de cloruro de sodio dopados dobles.

Palabras clave: Termoluminiscencia, parámetros cinéticos, cloruro de sodio.

PACS: 78.55.Fv; 78.60.Kn; 76.30.Mi; 76.30.Lh

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

The main dosimetric and optical characteristics of NaCl doped with CaCl₂ and MnCl₂ have been recently reported [1]. This double doped phosphor has been considered for this study due to the effective atomic number, Z_{eff} , equal to 15.71 for A and 15.74 for B preparations respectively, the which is similar to the atomic number of bones; because its atomic number, this phosphor could be used in clinical applications, i.e. radiotherapy and radiodiagnostic. In previous work [1] it was observed that the TL signal decay at room temperature was about 20% and 30%, respectively for preparations A and B, at the end of the monitored period, i.e. 120 days.

To get more information about the fading mechanism, a study about the kinetics parameters has been carried out

during the fading period to investigate the behavior of the trapping centres using the Computerized Glow Curve Deconvolution (CGCD) applied at various periods of time during fading experiment at room temperature.

The determination of the kinetics parameters during fading allows to check if the TL emission is due to a distribution of trapping levels or to a single level: i.e. if the activation energy remains quite constant during the fading period, it means that only one trap centre is responsible of the corresponding TL emission. On the contrary, if the activation energy increases as the elapsed time from irradiation increases too, this is an indication of a trap distribution are present [2, 3]. The aim of this paper is the determination of the kinetics parameters, E [eV] and s [s⁻¹] during fading stage and verifies if the TL emission is due to a distribution of trapping levels or to a single level.

II. MATERIALS AND METHODS

Single crystals of NaCl, double doped with calcium (1%) and manganese in different concentrations (0.1% and 0.3%), were grown using the Czochralsky method at the Crystal Growth Laboratory of the Physics Institute of UNAM. Two different double doped preparations for NaCl single crystals were obtained: $\text{CaCl}_2(1\%)\text{MnCl}_2(0.1\%)$ and $\text{CaCl}_2(1\%)\text{MnCl}_2(0.3\%)$, indicated in this paper as preparations A and B, respectively. The final concentrations in each preparation were determined by atomic absorption spectrophotometry.

The obtained samples were totally transparent, having size dimensions of about $4 \times 4 \times 0.3$ mm. The composition of the co-doped NaCl samples is given in Table I. In the same table are also given the values of the effective atomic number (Z_{eff}). Before irradiation the samples were annealed at 770 K during 1 hour. After cooling down to room temperature (RT) the samples, inserted in black bags to avoid any light effect, were irradiated to a test dose of 5 Gy at, $t=0, 30, 60$ and 120 days.

The samples were exposed to gamma photons from ^{60}Co of a Gammacell 200 irradiator with a dose rate of 0.66 Gy/min. All the samples were read out in only one session at the end of the experimental period. The TL reader system was a Harshaw TLD model 3500; a constant heating rate of $2^\circ\text{C}/\text{sec}$ was used and nitrogen gas was allowed to flux into the reading chamber during the read out to eliminate any spurious signals. The TL emission was integrated from room temperature (25°C) up to 400°C .

TABLE I. Composition of the co-doped NaCl samples and atomic effective number (Z_{eff}).

Dopants	Sample A	Sample B
Na[ppm]	3.88 E-01	3.87 E-01
Cl[ppm]	6.07 E-01	6.07 E-01
Ca[ppm]	3.60 E-03	3.60 E-03
Mn[ppm]	4.30 E-04	1.30 E-04
Z_{eff}	15.71	15.73

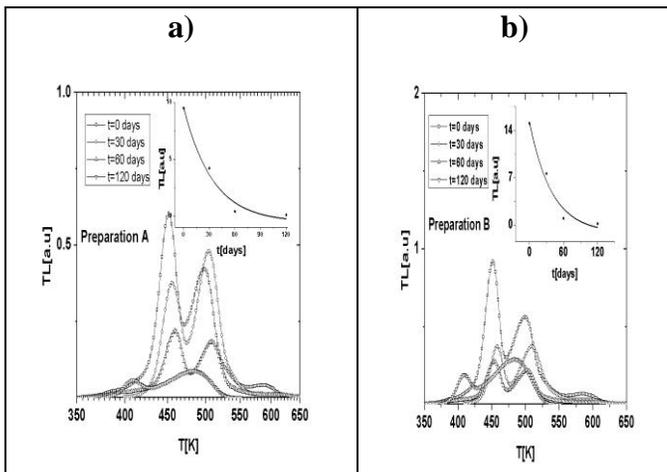


FIGURE 1. Glow curves of fading from NaCl, a) preparation A, and b) preparation B, the inset shows for both curves the fading

of signal TL as a function of time.

The glow curves for sodium chloride crystals double doped are shown in Figure I (a,b); the reference glow curves for each preparation have been obtained immediately after irradiation ($t = 0$ days). The TL glow curves for both preparations are roughly similar. The glow curve of preparation A shows two well resolved peaks, at 459 K and 509 K respectively. On the ascending part of the first peak a small shoulder appears at about 399 K. On the descending tail of the second peak a shoulder appears at about 615 K.

The glow curve of preparation B is quite similar to the previous one: the first peak appears at 455 K and the second at 505 K. As before, two shoulders appear in the low and high temperature regions. In both cases the first peak is always much higher than the second one.

The kinetic parameters, *i.e.*, the activation energy (E) of the traps involved in TL emission, the order of the kinetics (b) and the frequency factor (s) have been obtained using the Computerized Glow Curve Deconvolution (CGCD) program. The algorithm of the deconvolution program is based on the generalized-order kinetics equation (1) [4, 5].

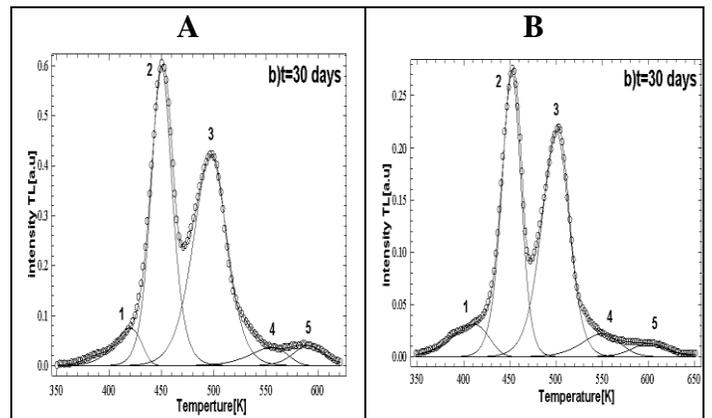
$$I(T) = I_M \frac{b}{(b-1)} \exp\left(\frac{E}{kT} \frac{T-T_M}{T_M}\right) \left[(b-1)(1-\Delta) \frac{T^2}{T_M^2} \exp\left(\frac{E}{kT} \frac{T-T_M}{T_M}\right) + Z_M \right]^{\frac{-b}{b-1}} \quad (1)$$

Where I_M and T_M are the TL peak maximum intensity and peak maximum temperature, respectively, E (eV) the activation energy, b the kinetic order, and

$$\Delta_M = \frac{2kT_M}{E}, \quad \Delta = \frac{2kT}{E} \quad \text{and} \quad Z_M = 1 + (b-1)\Delta_M,$$

with the pre-exponential factor given by

$$s = \frac{\beta E}{kT_M^2} \frac{1}{Z_M} \exp\left(\frac{E}{kT_M}\right).$$



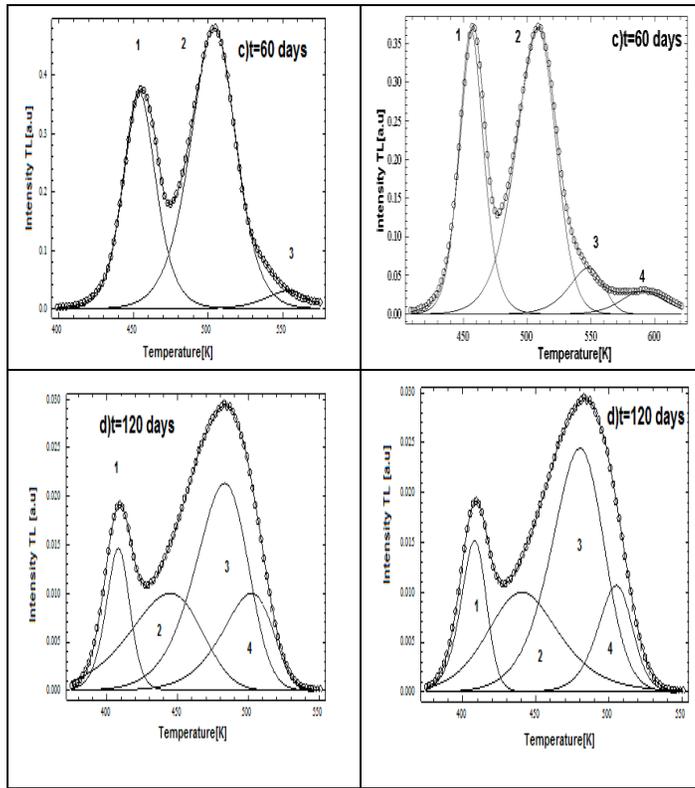


FIGURE II. Deconvolution of glow curves as continuous lines, the experimental curves are indicate as open circles. NaCl:Ca,Mn (preparations A in left column, and B in right column) exposed to 5 Gy and 0.66 Gy/min dose rate.

The curve fitting procedure was performed using the goodness of the fit was tested with the figure of merit (FOM) [6] given by:

$$FOM = \sum \frac{|Y_{Exp} - Y_{Fit}|}{A} \quad (2)$$

Where Y_{Exp} , Y_{Fit} are the experimental and fitted data of the glow curve, respectively, and A is the integral of the fitted glow curve. A FOM equal or less than 5 % means a very good fit [6].

III. DISCUSSION

The behavior of the TL signals as a function of the elapsed time from irradiation, for preparations A and B, is regular: both first and second peak decrease as a function of the elapsed time from irradiation. The second peak for preparation A seems to increase after 30 days from irradiation. Always for the same preparation, after 120 days of storage, the two main peaks disappear and only one large peak is present with a very little peak on the low temperature side. A similar behavior can be observed for preparation B. Furthermore, in both preparations the peak

A preliminary determination of the kinetics parameters of doped NaCl... temperatures at the maximum are not stable and a little shift may be observed.

TABLE II. Kinetics parameter of NaCl: Ca, Mn (preparation A) exposed at 5 Gy, and 0.66 Gy/min dose rate.

Peak	T_M [K]	E [eV]	s [s ⁻¹]	b
Fading t = 0 days, FOM = 0.05				
1	410	0.73	8.65E+07	1.01
2	452	2.20	8.83E+23	1.62
3	500	1.82	3.93E+17	1.54
4	550	1.46	2.41E+12	1.32
5	600	2.41	2.81E+19	1.99
Fading t = 30 days, FOM = 0.04				
1	420	1.06	7.55E+11	1.01
2	450	2.62	6.66E+28	1.92
3	498	1.56	7.96E+14	1.37
4	540	2.84	6.78E+25	1.99
5	585	2.68	1.97E+22	1.99
Fading t = 60 days, FOM = 0.03				
1	453.75	2.35	3.38 E+25	1.99
2	504	1.85	5.46 E+17	1.61
3	554	2.11	2.52 E+18	1.16
Fading t = 120 days, FOM= 0.02				
1	408	2.11	4.15E+25	1.58
2	444	0.78	7.50E+07	1.36
3	483	1.17	2.38E+11	1.10
4	507	2.99	1.74E+29	1.98

TABLE III. Kinetics parameter of NaCl: Ca, Mn (preparation B) exposed at 5 Gy, and 0.66 Gy/min dose rate

Peak	T_M [K]	E [eV]	s [s ⁻¹]	b
Fading t = 0 days, FOM = 0.05				
1	410	0.73	8.65E+07	1.01
2	452	2.20	8.83E+23	1.62
3	500	1.82	3.93E+17	1.54
4	550	1.46	2.41E+12	1.32
5	600	2.41	2.81E+19	1.99
Fading t = 30 days, FOM = 0.04				
1	420	1.06	7.55E+11	1.01
2	450	2.62	6.66E+28	1.92

3	498	1.56	7.96E+14	1.37
4	540	2.84	6.78E+25	1.99
5	585	2.68	1.97E+22	1.99
Fading t = 60 days, FOM = 0.04				
1	456	2.50	1.16E+27	1.75
2	508	1.65	3.60E+15	1.34
3	548	2.15	1.08E+19	1.21
4	590	2.49	2.78E+20	1.99
Fading t = 120 days, FOM = 0.02				
1	408	1.99	1.21E+24	1.42
2	440	0.95	9.38E+09	1.98
3	480	1.26	2.40E+12	1.32
4	505	2.24	5.35E+21	1.43

Which means a lost percent per day of 2.49 and 2.19 respectively for both samples.

TABLE IV. Fading parameters of preparation A and B.

Preparation	A	B
Φ_0 [u ²]	9.04±0.28	15.76±2.02
λ [months ⁻¹]	0.03±0.02	-0.03±0.08

The variation of the activation energy values when the elapsed time from irradiation increases may indicate a trap distribution in the doped NaCl single crystals. Activation energies and temperatures at the maximum of the peak 1 and peak 2 for samples A and B respectively during fading at RT are reported in Table II and III.

VI. CONCLUSIONS

The more evident result of this study is the variation of the activation energy during the storage of the samples at room temperature. The variation is not very large but, any way, it could indicate a more complex structure of the trapping centres and a possible distribution of traps, *i.e.* a continuous or quasi-continuous trapping distribution could be supposed. Furthermore, it seems that in both preparations, in the time interval from 60 to 120 days, there is a transfer of trapped charges from the first peak, *i.e.* E increases, to the second peak, *i.e.* E decreases; in other words, an increase of the activation energy means that the trapping levels are far from the conduction band and a decrease of the E value means trapping levels more closed to the conduction band. All the previous effects need a more accurate fading experiment, using for instance different temperatures of storage. The Fading model is the simplest case, which represents the usual problem of fading correction during storage of previously irradiated, and is useful just to predict the loss of TL signal as function of elapsed time in some experimental situations.

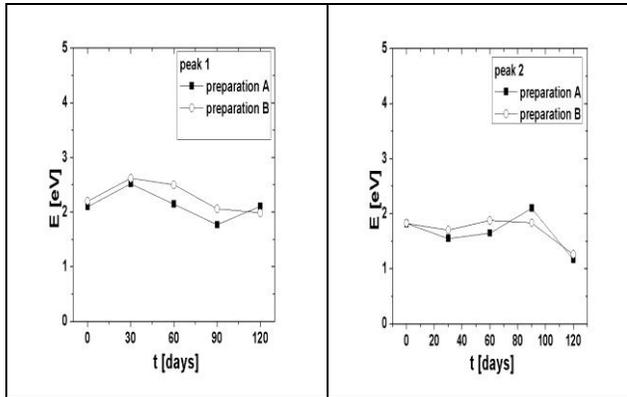


FIGURE III. Activation energy for preparations A and B as a function of the elapsed time from irradiation; t = 0, 30, 60, 90, 120 days.

A. Fading theoretical model

Kitis *et al.*[7] developed some useful expressions for fading correction in practical situations, for our experimental purpose was initial and instantaneous irradiation followed by fading at room temperature, give that;

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp[-\lambda t]. \quad (3)$$

Where Φ is the total area of the peak[u²], and λ is the escape probability per unit of time.

Using the previous equation one obtains:

$$\lambda_A = 24.96E - 03d^{-1},$$

$$\lambda_B = 21.99E - 03d^{-1}.$$

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank to Benjamin Leal Acevedo and Francisco Garcia for their technical assistance in irradiation samples.

REFERENCES

- [1] Ortiz Morales, A., Furetta, C., Kitis, G., Negrón Mendoza, A., Cruz Zaragoza, E., *Thermoluminescent properties of NaCl monocrystal double doped with CaCl₂ and CdCl₂*. Radiation Effects & Defects in Solids **161**, 383-393 (2006).
- [2] Furetta, C., Kitis, G., Weng, P. S., Chu, T. C., *Thermoluminescence characteristics of Mg₄BO₇: Dy,Na*.

Nuclear Instruments and Methods, In: *Physics Research A* **420**, 444-445 (1999).

[3] Furetta, C., *A fading based method for checking the presence of closely overlapping peaks in thermoluminescent (TL) materials*, *Radiation Effects & Defects in Solids* **162**, 319–323 (2007).

[4] May, C. E., Partridge, J. A., *Thermoluminescent kinetics of alpha-irradiated alkali halides*, *Journal of Chemical Physics* **40**, 1401-140 (1964).

[5] Kitis, G., Gomez Ros, J., Tuyn M., *Thermoluminescence glow-curve deconvolution functions*

A preliminary determination of the kinetics parameters of doped NaCl... for first, second and general orders of kinetics, *Journal of Applied Physics* **31**, 2636-2641 (1998).

[6] Balian, H. G., Eddy, N. W., *An improved criterion over the normalized Chi-squared test for assessing goodness of fit of gamma ray spectral peaks*, *Nucl. Instrum. Methods* **145**, 389–395 (1977).

[7] Kitis, G., Furetta, C., *Simulation of competing irradiation and fading effects in thermoluminescence dosimetry*, *Radiation Effects & Defects in Solids* **160**, 285-296 (2005).

Spatial frequency response of a human eye apodized with the stiles crawford effect of the first kind in coherent illumination



Nachieketa K Sharma¹, K. Mishra², S. K. Kamilla³, Jatadhari K Sharma⁴

^{1,2,3}Department of Physics, ITER, Siksha 'O' Anusandhan University, Bhubaneswar-751030, Odisha, India.

⁴Old Maharshi Vidyamandir, Balangir-767001, Odisha, India.

E-mail: nachikk.sharma@gmail.com

(Received 3 February 2014, accepted 20 June 2014)

Abstract

A beam of light passing near the centre of the pupil of a human eye stimulates the retina more than an identical beam making an entry from the edges of the pupil. This is Stiles-Crawford effect of the first kind (SCE I). This diminution in the effective brightness of a beam is retinal in origin. But in the computation of how the human eye responds to different spatial frequencies in the object, often the SCE I is incorporated as a pupil apodization. We have shown here that in the absence of aberrations and defocus this response is predominantly governed by the coherence of the incident beam rather than the beam's pupil entry point, a characteristic of the traditional Stiles Crawford effect.

Keywords: Stiles-Crawford effect, Apodization, Coherent illumination, Frequency response.

Resumen

Un haz de luz que pasa cerca del centro de la pupila de un ojo humano estimula la retina más que un haz idéntico que haga un registro de los bordes de la pupila. Este es el efecto de Stiles-Crawford de la primera clase (SCE I). Esta disminución en el brillo eficaz de un haz es retinal en origen. Sin embargo, en el cálculo de cómo el ojo humano responde a diferentes frecuencias espaciales en el objeto, a menudo el SCE I es incorporado como una apodización pupilar. Hemos demostrado que en ausencia de aberraciones y desenfoques, esta respuesta se rige principalmente por la coherencia del haz incidente más que del punto de entrada de la pupila del haz; una característica del tradicional efecto Stiles Crawford.

Palabras clave: Efecto Stiles-Crawford, apodización, iluminación coherente, frecuencia de respuesta.

PACS: 01.40.gb, 01.40.-d

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

All the photoreceptors (both rods and cones) in the retina of a human eye share the same light coming from a single pupil. Still the light coming from different parts of the pupil stimulates the photoreceptors, especially the cones not in the same degree. Rather a beam passing near the edge of the pupil appears dimmer than a beam entering centrally. This is Stiles-Crawford effect of the first kind [1]. Observation of the effect in cones only in a retinal region populated with equal density of rods and cones clearly showed that it is retinal in origin and is primarily cone-specific. Thus, the extra retinal factors like the passage of light from the pupil to the retina had no role to play in the diminution of effective brightness [2].

The same kind of diminution in the effective brightness in an image is also observed when the light admitting pupil is covered with a filter which becomes more and more opaque from the centre toward the edge [3]. This is known as apodization.

Due to this outward resemblance between the retinal Stiles-Crawford effect and pupil apodization, the SCE I has been modeled as a pupil apodization in studying retinal light distributions in many imaging situations [4, 5, 6, 7, 8].

In all these diffraction computation of the light distribution Fourier theory is employed, that is, any complex object can be broken down into its simplest sine wave components which are imaged separately. This paper very methodically attempts a build up involving Stiles-Crawford effect of the first kind, apodization, spatial frequency approach, Fourier analysis and synthesis, coherent imagery, finally leading to computation of visual response of a human eye to a rectangular grating stimulus in coherent illumination in presence of Stiles-Crawford effect of the first kind.

II. STILES-CRAWFORD EFFECT OF THE FIRST KIND

The Stiles-Crawford effect of the first kind (SCE I) was first reported in 1933 [1]. It is an experimental observation that

light passing near the edges of a pupil is less efficient in stimulating the retina than is light entering through the centre.

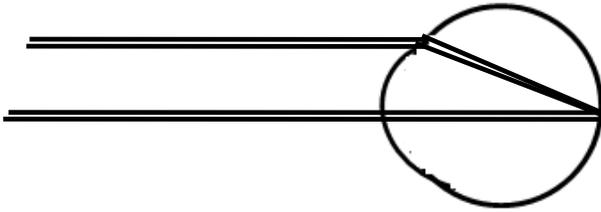


FIGURE 1. A wide pupil admitting both axial and peripheral rays.

The SCE I visibility curve is found out by using oblique rays and adjusting the light in them to match the brightness produced by a constant beam passing through the centre of the pupil. For an illustration, one can say that to match the apparent brightness of a beam entering the eye through a 10 mm² pupil, the light entering through a 30 mm² pupil is to be reduced by only a factor of two instead of the expected three [9]. This lack of reciprocity between pupil area and light needed for equal brightness was found to be present prominently in photopic vision [2]. A bundle of rays passing through the centre of the pupil strikes the retina head-on. But an identical bundle of rays entering near the edge of a fully dilated pupil of approximately 4 mm radius will make an angle of nearly 10⁰ at the retina, which lies at a distance of 22.2 mm from the pupil [10]. Thus changing the pupil entry point is equivalent to varying the angle of incidence at which a ray strikes the retina. This is how the visibility curve of figure 2 was obtained [1, 11].

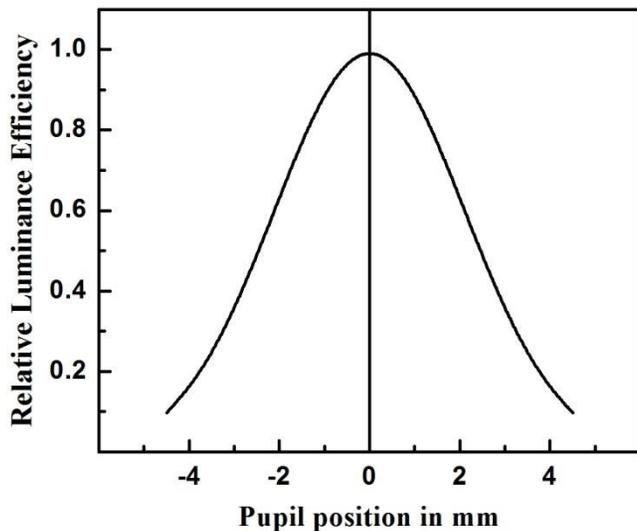


FIGURE 2. Relative luminous efficiency for light rays as a function of pupil location of the incident beam.

The equation characterizing SCE I visibility is thus given as

$$\ln \frac{\eta_o}{\eta_r} = \rho r^2. \quad (1)$$

Where η_o and η_r are the luminous efficiencies of light entering centrally and at r distance from the peak of visibility ($r = 0$). ρ is the shape parameter which is equal to 0.115 [11, 12]. The significance of SCE I lies in the supposed difference between using coherent or incoherent light as incident illumination, for the simple reason that this difference can be used as a tool for controlling visual response of the retina.

How to incorporate the directional sensitivity of the retina, now that it is known to be present in a human eye as revealed through the SCE I? One way is to treat the photoreceptors as optical waveguides as the directional sensitivity is a known feature of waveguides [13, 14, 15].

The main feature of a waveguide model is that light is accepted only at a single aperture and is guided from there into the interior space of the receptor (Fig. 3). The waveguide model demonstrates directional sensitivity in addition to the existence of modes [16].

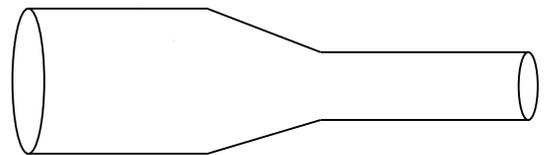


FIGURE 3. Waveguide model of a cone receptor.

But the other way is to treat the SCE I as a pupil apodization.

And the remarkable thing is that in the absence of aberrations, both the approaches (retinal waveguiding and pupil apodization) give identical results [13]. We will consider the second approach of pupil apodization in computing visual response.

III. APODIZATION

For a round pupil like the eye and in the absence of aberrations, the pattern in the plane of focus is the familiar Airy disc (figure 4), whose diameter is related directly to the wavelength and inversely to the pupil aperture [17]. In order to remove the undesired second hump of the Airy disc a pupil that becomes gradually less transparent (figure 4) from the centre toward the edge is employed [3]. And this is mainly used to resolve binary stars (where a weak companion star is present next to a brighter star) [18].

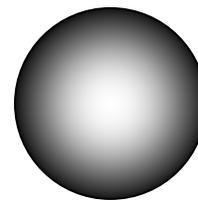


FIGURE 4. Visual sensitivity against pupil entry point of light; apodizing filter; a radially symmetric neutral density wedge in the pupil plane.

As the visibility curve of the SCE I is obtained against variable pupil entry point, naturally it has resemblance with apodization in spite of the fact that it is being retinal in origin. So it can be modelled as pupil apodization while calculating the visual response of a humane eye to a grating stimulus. So the methods to obtain the visual response of a humane eye can be outlined as: a) to choose the type of illumination from among completely coherent, incoherent, partially coherent b) to choose a stimulus or a test target from a sinusoidal, square, rectangular, triangular, saw-tooth grating c) to model SCE I as pupil apodization. The approach is frequency response techniques and the tool is Fourier theory.

IV. SPATIAL FREQUENCY APPROACH

The image quality of a human eye is ascertained by determining its response to spatial frequency supplied in the form of a grating stimulus. The properties of a grating are specified by its waveform, contrast, spatial frequency, orientation, and phase. The waveform of a grating refers to the grating's intensity distribution. When the intensity alternates abruptly between high and low it is a square-wave grating. But when the grating's intensity alternates more gradually between high and low it is a sine-wave grating.



FIGURE 5. Sine wave and square wave grating.

The spatial frequency of a grating is specified either in number of cycles (one white bar plus one black bar) per unit distance across the grating or cycles per degree of visual angle. The visual angle of an object is the angle between two lines that extend from the observer's eye, one to one end of the object and the other to the other end of the object [19-20].

How the spatial frequency of a grating stimulus is determined by a human eye? Evidence suggests that there are spatial frequency channels, each of which is sensitive to a narrow range of frequencies [21]. Thus, we are able to detect spatial frequency present in a grating stimulus. But, how to get from a collection of different spatial frequencies the perception of the original stimulus? Here comes the mathematical tool of Fourier analysis and Fourier Synthesis.

V. FOURIER ANALYSIS AND SYNTHESIS

According to this analysis, any intensity pattern can be broken into a number of sine-wave components. For example, the square-wave grating of the figure can be broken down into a sine-wave with a frequency equal to that of the square-wave plus sine waves with amplitudes equal to one third and one fifth the amplitude of the square wave, and with frequencies three and five times the frequency of the square wave, respectively. Evidence supports the idea that actually the visual system breaks a stimulus (let a square-wave grating) down into spatial frequency components [22, 23].

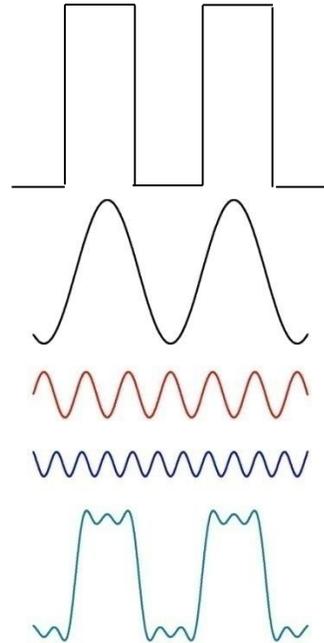


FIGURE 6. The sine-wave components for the square-wave grating at the top of the figure, determined by Fourier analysis. The intensity of the square wave grating is broken down to sine wave components.

The visual system first carries out a Fourier analysis by breaking a scene (here a square wave grating) into a number of sine-wave components. Next, this information is contained in the firing of spatial frequency detectors (neurons). Finally, the information contained in the neurons is combined through the Fourier synthesis (sine components combined to obtain square-wave).

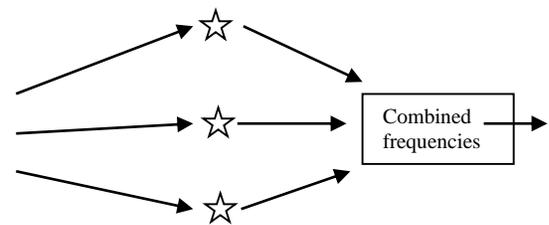


FIGURE 7. Diagram showing how a scene is broken down into spatial frequency components by Fourier analysis and then

VI. COHERENT IMAGERY

When the periodic grating (be it the sine-wave or the square-wave) is illuminated by a perfectly coherent light the image formation on the retina takes the following route. Since the grating is illuminated by a plane wavefront, the image formed in the plane of the eye's pupil will be the Fraunhofer diffraction pattern as shown in Fig. 8 [24]. And the amplitude distribution in this diffraction image is the Fourier transform of the grating's amplitude function.

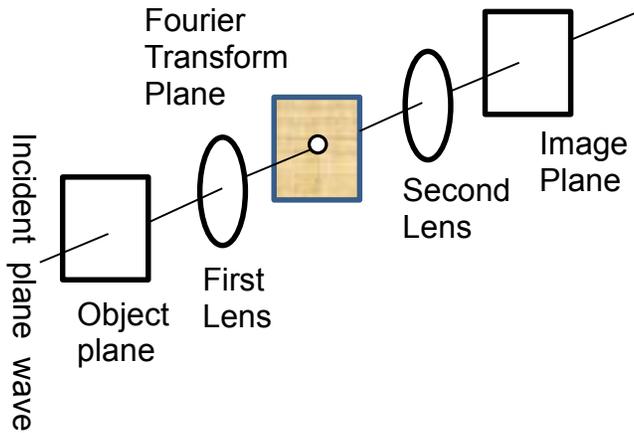


FIGURE 8. The spatial frequency components of the object placed in the object plane are displayed in the Fourier transform plane. The small hole filters out the high frequency components.

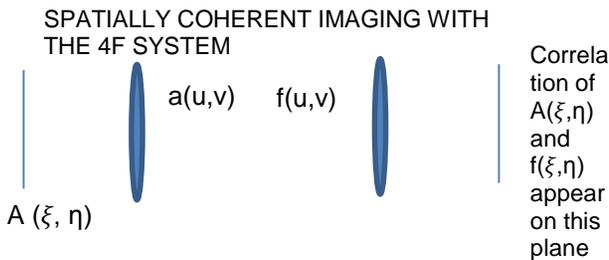


FIGURE 9. The Fourier transform of $A(\xi, \eta)$ is formed as $a(u, v)$ on the back focal plane of the lens. A transmission mask containing the Fourier transform of the second function $f(\xi, \eta)$ is placed on this plane as $f(u, v)$. Thus, the product $a(u, v)f(u, v)$ lies on the front focal plane of the second lens. So the Fourier transform of $a(u, v)f(u, v)$ equivalent to the convolution of $A(\xi, \eta)$ and $f(\xi, \eta)$ is obtained on the back focal plane.

The Fraunhofer diffraction pattern of a point object can also be expressed in terms of the spatial frequency domain. A grating with sinusoidal intensity pattern with a spatial period p (in mm) may also be said to have a spatial frequency of $1/p$ cycles/mm. In the spatial frequency domain, the way of

describing the performance limitation of an eye is to state the demodulation experienced by a sinusoidal grating target in the process of being imaged. When this quantity is plotted against spatial frequency we obtain the modulation transfer function. The mathematics of coherent image formation can be outlined as follows

A plane wavefront illuminates a sinusoidal grating. Hence in the plane of the eye's pupil is formed Fraunhofer diffraction pattern. The amplitude distribution in this diffraction image is the Fourier transform of the target amplitude function. If $A(\xi, \eta)$ is the distribution of amplitude in the object, the distribution of amplitude in the disturbance in the plane of the pupil is given by

$$a(u, v) = \text{FT of } A(\xi, \eta). \quad (2)$$

Naturally, only that portion of a (u, v) that is transmitted by the pupillary aperture OPENING can be effective in the formation of the image amplitude distribution $A'(\xi, \eta)$, which is again the FT of the pupil amplitude function.

Thus $A'(\xi, \eta) = \text{IFT of modified amplitude function}$

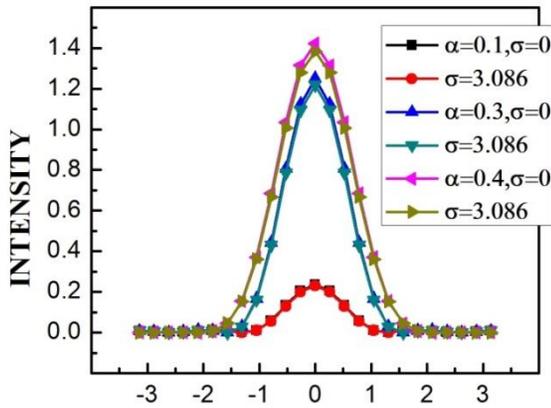
$$[= a(u, v)f(u, v)]. \quad (3)$$

Finally, the image intensity distribution $B'(\xi, \eta)$ is the product of the image amplitude distribution with its complex conjugate.

When it is coherent, the amplitude of light emerging from the plane of the periodic grating is being spatially Fourier analyzed (displayed as a diffraction image in the plane of the pupil), filtered, and then resynthesized as a distribution of amplitude of light in the retinal plane. Ultimately the amplitude is squared at each point in the image and this constitutes the image intensity pattern. It is seen that filtering the spatial frequency in the domain of amplitude of light will lead to results which, when looked at in the realm of the intensity pattern, may be non-linear. As an example, consider the case of an amplitude distribution that is sinusoidal. When squared this becomes an intensity distribution that is also sinusoidal but has twice the frequency.

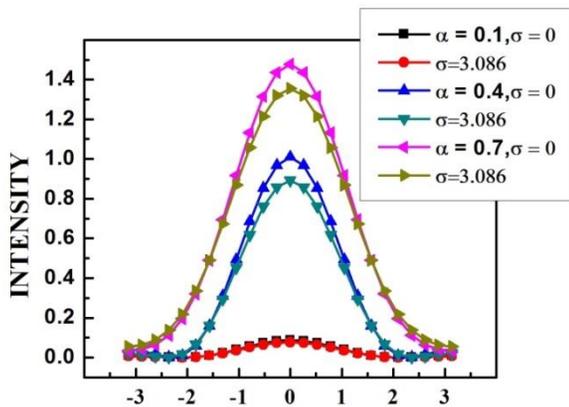
VII. RESULTS AND DISCUSSION

For different duty cycle ($\alpha=0.1, 0.3, 0.4, 0.7$) of the periodic grating target with a rectangular profile we have calculated the intensity distribution in the image by incorporating the Stiles Crawford effect of the first kind (SCE I), as a pupil apodization with the beam hitting the pupil having spatial coherence. And the results are illustrated in Fig.10 and 11. From the figure it is evident that when $\sigma=3.086$, that is the SCE I apodized eye's, intensity distribution is almost identical without SCE I apodization ($\sigma=0$) for both low ($\omega=0.5$) and high ($\omega=1.0$) normalized spatial frequency. In an earlier work we have studied the coherent response of a SCE I apodized human eye in coherent illumination by taking a sinusoidal grating [25].



REDUCED DISTANCE for $\omega = 0.5$

FIGURE 10. Variation of intensity with reduced distance for low normalized spatial frequency.

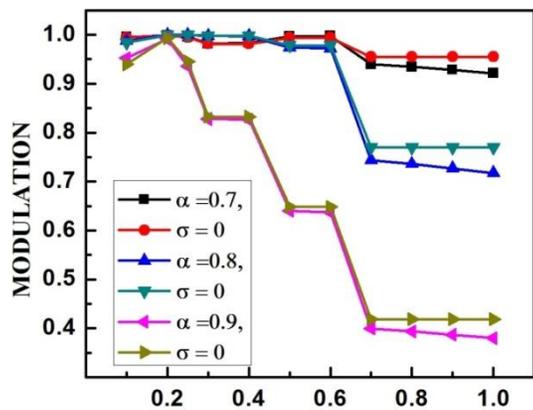


REDUCED DISTANCE for $\omega = 1.0$

FIGURE 11. Variation of intensity with reduced distance for high normalized spatial frequency.

Similarly the modulation's response to spatial frequency is studied for a SCE I apodized human eye side by side with an eye without SCE I apodization.

Again for coherent illumination we do not find any modification in the modulation even for different duty cycle of a rectangular periodic object as revealed in Fig. 12.



NORMALIZED SPATIAL FREQUENCY

FIGURE 12. Frequency response of a SCE I apodized human eye in coherent illumination as shown from the variation of modulation with normalized spatial frequency for different duty cycles.

VIII. CONCLUSION

So, we see that for coherent illumination the treatment of Stiles Crawford effect of the first kind as a pupil apodization did not lead to any modification either in the modulation or in the intensity distribution in the image of an object of rectangular periodicity indicating the dominance of the coherence of the incident beam over the pupil entry point of the beam, a characteristic of traditional Stiles Crawford effect.

REFERENCES

- [1] Stiles, W. S. & Crawford, B. H., *The luminous efficiency of rays entering the eye pupil at different points*, Proc. R. Soc. B **112**, 428-450 (1933).
- [2] Flamant, F. & Stiles, W. S., *The directional and spectral sensitivities of retinal rods to adapting fields of different wavelengths*, J. Physiol. **107**, 187-202 (1948).
- [3] Jacquinot, P., Bougron, P., and Dossier, B., *Calcul et realisation des distributions d'amplitude pupillaire, permettant a suppression des franges laterale dans les figures de diffraction*, In: La Theorie des Images Optiques, P. Fleury, A. Marechal, and C. Anglade, eds. (Editions de la Revue d'Optique, 1949), pp. 183-193.
- [4] Westheimer, G., *Retinal light distributions, the Stiles-Crawford effect and apodization*, J. Opt. Soc. Am. A **30**, 1417-1421 (2013).
- [5] Westheimer, G., *Specifying and controlling the optical image on the retina*, Prog. Retinal Eye Res. **25**, 19-42 (2006).
- [6] Metcalf, H., *Stiles-Crawford apodization*, J. Opt. Soc. Am. **55**, 72-74, 1411-1416 (1965).
- [7] Carroll, J. P., *Apodization model of the Stiles-Crawford effect*, J. Opt. Soc. Am. A **70**, 1155-1156 (1980).
- [8] Atchison, D. A., Joblin, A. and Smith, G. *Influence of Stiles-Crawford effect apodization on spatial visual performance*, J. Opt. Soc. Am. A **19**, 1073-1083 (2002).
- [9] Troland, L. T., *On the measurement of visual stimulation intensities*, J. Exp. Psychol. **2**, 1-34 (1917).
- [10] Emsley, H. H., *Visual Optics* Vol. 1. , 5th ed. (Hatton, UK, 1955).
- [11] Applegate, R. A. & Lakshminarayanan, V., *Parametric representation of Stiles-Crawford functions: normal variation of peak location and directionality*, J. Opt. Soc. Am. A **10**, 1611-1623 (1993).
- [12] Artal, P., *Incorporation of directional effects of the retina into computations of optical transfer functions of human eyes*, J. Opt. Soc. Am. A **6**, 1941-1944 (1989).
- [13] Vohnsen, B., *Photoreceptor waveguides and effective retinal image quality*, J. Opt. Soc. Am. A. **24**, 597-607 (2007).
- [14] Snyder, A. W., and Pask, C., *The Stiles-Crawford effect-explanation and consequences*, Vision Res. **13**, 1115-1137 (1973).
- [15] Vohnsen, B., Iglesias, I., and Artal, P., *Guided light and diffraction model of human eye photoreceptors*, **22**, J. Opt. Soc. Am. A **22**, 2318-2329 (2005).
- [16] Stiles, W. S., *The directional sensitivity of the retina*,

- Ann. R. Coll. Surg. Engl. **30**, 73-101 (1962).
- [17] Born, M., & Wolf, E., *Principles of Optics*, 7th (expanded edition) (Reissued by Cambridge University Press, 1997).
- [18] Pattnaik S., Kamilla, S. K., Roy, G. S., Nayak, M. K., Das, R., and Sharma, N. K., *Binary star system-a spectral analysis*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 438- 442 (2011).
- [19] Westheimer, G., *Retinal light distribution for circular apertures in Maxwellian view*, J. Opt. Soc. Am. **49**, 41-44 (1959).
- [20] Hopkins. H., *21st Thomas Young Oration (The application of frequency response techniques in optics)*, Proc. Phys. Soc. **79**, 889-919 (1962).
- [21] Campbell, F. W., & Robson, J. G., *Application of Fourier analysis to the visibility of gratings*, J. Physiol., **197**, 551-566 (1968).
- [22] Goodman, J. W., *Introduction to Fourier optics*, 3rd ed., (Viva books, USA, 2007)
- [23] Goldstein, E. Bruce, *Sensation and Perception*, 4th ed., (Brooks/Cole Publishing Company, USA, 1996).
- [24] Ghatak, A., *Optics*, 5th ed., Tata McGraw-Hill (2009).
- [25] Sharma, N. K., Roy, G. S., Kamilla, S. K., Mishra, K., and Pattnaik, S., *Coherent sine wave response of a human eye in the presence of the Stiles-Crawford effect of the first kind*, J. Pure & Appl. Phys. **23**, 51-58 (2011).

Space science and astronomy awareness



Somoye, E. O.^{1,*}, Akala, A. O.², Ogwala, A.¹, ¹Adeniji-Adele, R. A.¹,
Iheonu, E. E.^{1,3}, Onori, E. O.¹

^{1,*}Department of Physics, Lagos State University, Ojo, Lagos.

²Department of Physics, University of Lagos, Akoka, Lagos.

³Nigerian Building and Road Research Institute, P.M.B. 1055,
Ota, Ogun State, Nigeria.

E-mail: femi2000somoye@yahoo.com

(Received 14 February 2014, accepted 30 April 2014)

Abstract

The aim of this paper is to create awareness of space science and the quest for the knowledge of the universe including both the physical and chemical processes taking place in it among African youths. This paper was presented at a seminar early 2013 at the Lagos State Government Ministry of Science and Technology annual Youth Programme in Lagos, Nigeria. Space science has been a major driver of technological advancement in virtually all areas of human life ranging from socio-economic transformation to human capital development.

Keywords: Space science; Awareness; Development.

Resumen

El objetivo de este trabajo es crear conciencia de la ciencia espacial y la búsqueda del conocimiento del universo que incluye tanto los procesos físicos y químicos que tienen lugar en ella entre los jóvenes africanos. Este documento fue presentado en un seminario a principios de 2013 en el Ministerio de Estado de Programa Anual de Ciencia y Tecnología en Lagos para Jóvenes, en Nigeria Gobierno de Lagos. La ciencia espacial ha sido un gran impulsor de los avances tecnológicos en prácticamente todas las áreas de la vida humana, desde la transformación socio-económica para el desarrollo del capital humano.

Palabras clave: Ciencia espacial; conciencia; desarrollo.

PACS: 01.40.Gm, 01.40.gb, 01.40.ek

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

This topic is very apt and timely. This is because space science and astronomy education is increasingly becoming the centre of attraction in Africa [1]. Mckinnell [2] pointed out that space science is an important driver for scientific enquiry, knowledge creation, technology development, human capital development and a vehicle for stimulating interest, awareness, understanding and appreciation of science among the youth and the general public. Space science will help African countries to develop and use science and technology for socio-economic transformation and full integration into the world economy.

For according to Doherty [3], the leading socio-economic problems that continue to cripple much of Africa include hunger, extreme poverty, erosion of natural resources and natural disasters.

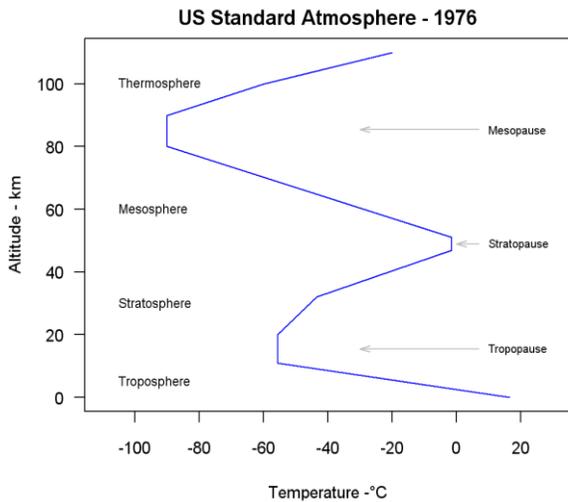
II. THE VASTNESS OF THE UNIVERSE

We will use the simplest definition of space in the context of our interest and purpose.

SPACE is the region beyond the terrestrial earth. Thus SPACE SCIENCE can be defined as the quest for space knowledge.

The universe is very vast, it contains so many galaxies. Our own galaxy, the MILKY-WAY is one of a system of galaxies spread over a region of space with a linear diameter of about 3 million light years. A LIGHT YEAR is the distance it takes light to travel in a year. The speed of light is about 1 billion km hr⁻¹. Multiplied by the number of hours in a year, a light year gives us the diameter of this aggregation of galaxies, and there are many others. Each galaxy is made up of several stars and each star with its planet.

We certainly cannot fully understand all that this vast universe contains. But even in the space between our planet and our own star – the sun, there's a lot we need to be aware of. It is interesting to know that the quest to know about the sun and other stars has been with us many centuries back. The holy writ contains activities of astrologers in the days of the Lord Jesus Christ.



D Kelly O'Day - <http://chartsgraphs.wordpress.com> 01/31/2011

FIGURE 1. Variation of altitude with temperature in the atmosphere.

III. QUEST FOR KNOWLEDGE OF SPACE IN MODERN TIMES

The quest to conquer the space beyond the earth, in modern times, started with the flying of kite to measure the pressure above the earth surface. Next came the use of balloons to measure not only pressure but also temperature and humidity of the atmosphere. A look at the variation of altitude with temperature (Figure 1) reveals why it is thought that the higher you go, the cooler it becomes.

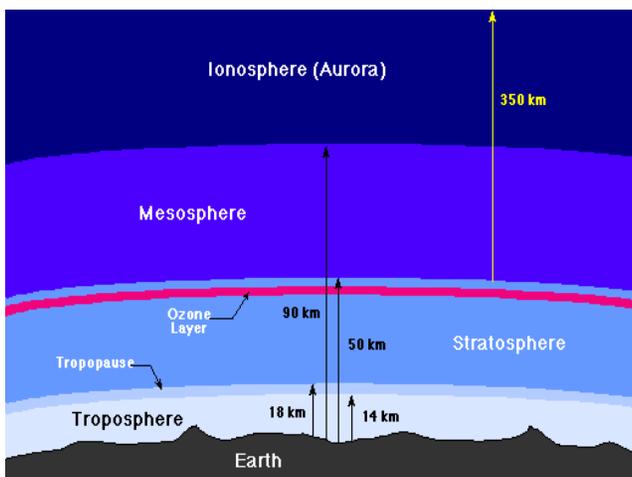


FIGURE 2. Layers of the atmosphere.

In the 19th century, observations of the variation of earth's magnetic field made Schuster and Stewart to suggest that current flow around 100km. In the early 20th century Marconi succeeded in transmitting radio signals across the Atlantic. Kennedy and Heaviside adduced the reason for this

to the conducting layer in the upper atmosphere. The decisive experiments that confirmed the existence of this conducting layer are those of Appleton and Barnett and Breit and Tuve in 1925. While Appleton and Barnett used continuous waves, Breit and Tuve used pulse signal.

Thereafter the equipment of Breit and Tuve called the IONOSONDE was used to probe the upper atmosphere. But the ionosonde is limited to an altitude of 400 km.

In the mid 20th century, satellite was launched and placed right there in the atmosphere. We are familiar with natural satellite of our planet *i.e.* the moon which revolves round the earth in about 28 days.

When Arthur C. Clarke initially had the idea of an artificial satellite being put in the atmosphere, it was thought to be impractical. The geostationary satellite which is the most common of artificial satellites is the one that has the same period of rotation around the earth. This period determines its height by Newton's law of gravitational attraction. Satellites are used for different purposes like communication, monitoring of weather, observation or research, intelligence report. For example, the Canadian satellite "ALOUETTE" was launched in September 1962.

This satellite was placed in a nearly circular orbit at a height of just over 1000km [4] for the purpose of observing the upper atmosphere above 300 km.

IV. SOME OCCURENCES IN THE SPACE BETWEEN EARTH AND THE SUN

It is the purpose of this paper to intimate the youth with the benefits derivable in the vast space above us. For instance, in the space between the earth and the star closest to us *i.e.* the sun, there is a lot more than the visible ray and the warmth that emanate from it. And this star is just one of the aggregate of stars that make up our own galaxy *i.e.* the MILKY WAY. The X-ray and Ultraviolet ray responsible for the ionization of the upper atmosphere are radiations from the sun. This makes the upper atmosphere a conducting layer as a result of which HF radio signals are reflected to distant places. Also, from the sun flow streams of charged particles at an alarming rate. They are referred to as SOLAR WIND. When there is a sudden brightening of the sun, a phenomenon called SOLAR FLARE, there is a greater intensity of charged particles from the sun, the ionization of the upper atmosphere is affected and in the D region, absorption increases leading to fade out of radio signals.

The earth's magnetic field is increased suddenly, it decreases over about a period of 24 hours before returning to normal. These occurrences have attendant effects, some of which are damaging of satellites and disabling of power grid on the earth. This is more prominent during high solar activity. A magnetic index of observing solar activity is the sunspot that appears on the surface of the sun. The sunspots are sometimes many and sometimes few. The year in which the maximum numbers exist over a period of 11 years is known as the year of maximum SOLAR ACTIVITY. The

study of solar activity is necessary in order that warning can be given in advance.

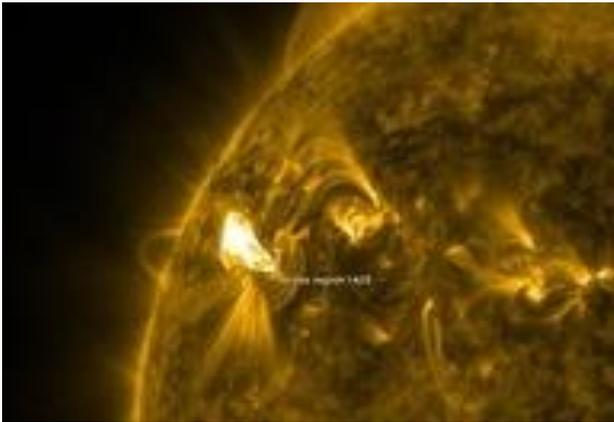


FIGURE 3. Huge solar flare of 2012.

In Figure 3 is shown the dissipative tendencies of solar flares. According to Joseph Kunche, a space weather scientist at the National Oceanic and Atmosphere Administration (NOAA) in the U.S, the massive solar flare eruption of March 6, 2012 is a solar tempest that was capable of interfering with satellites in orbits and power grids when on reaching the earth. Some high precision GPS users could also be affected. It is also capable of affecting communications on airplanes that fly over the polar caps. Powerful solar storms can be hazardous to astronomers in space.

The only palatable thing in the phenomenon of solar flare as seen in Figures 4 is the aurora. Aurora is a spectacular display of coloured lights in various complicated forms, often moving and changing rapidly [5].

Aurora actually means dawn, so named because it is of a reddish color like when the sun is rising at dawn. It occurs near the geographic poles. The one in the Northern hemisphere is called AURORA BOREALIS and the one in the Southern hemisphere AURORA AUSTRALIS. They are caused by burst of charged particles from the sun, the same phenomenon responsible for magnetic storms.



FIGURE 4. A predominantly red aurora astralis.

It is also possible that the occurrence of magnetic storm and other atmospheric events may be linked to the phenomenon of earthquakes. Pullinets *et al.* [6] carried out some research

on the possible link between day-to-day variability of upper atmosphere and earthquake occurrences.

VI. BENEFITS OF SPACE SCIENCE

OTHER BENEFITS of space science include, but are not limited to:

1. Location of earth resources of food, water and marine life;
2. Use of satellites to monitor weather conditions. Weather forecast is made possible by the use of thermometer and barometer since there is a high correlation between pressure and weather. The instruments have to be placed in-situ i.e. in the place of occurrence which is in space. The use of satellites facilitate weather forecast.
3. Improvement of communication signals through the use of satellites. Signals which are obstructed by houses, hills, forests as well as the curvature of the earth are transmitted over a wider coverage area through satellites from where they are amplified and transmitted back to earth.
4. Tracking devices such as GPS devices are used to retrieve stolen automobiles. They can be built into items such as cell phones, laptops computers etc. The GPS is a satellite based navigation system. This system consists of 24 satellites in 6 orbital planes i.e. 4 satellites in each orbital plane. They operate in circular orbits at a height of about 20,200km and an inclination angle of 55° . Each satellites orbit the earth twice in a day. In this way they can locate where each GPS in being used – that the satellite can actually find the location of the device anywhere in the world since the satellite is able to read the GPS signal;
5. Accurate survey of land. The coordinates of the corner points of a land is accurately determined;
6. Expansion of knowledge;
7. Exploration of the unknown;
8. Providing a driving force for technological advancement and hence improve earth based productivity;
9. Development and occupation of new frontiers with access to extra-terrestrial resources and unlimited energy;
10. Strengthening of national prestige, self-esteem;
11. Security: reconnaissance satellites are used for military/intelligence purposes such as observing enemy locations or troop movement [7];
12. Providing opportunity for international cooperation and understanding;
13. Helps to monitor how green house gases and pollutants deplete the ozone layer that shield us from fatal rays. This has led to a great deal of global warming. Oladiran (2010) reported a rise of about 0.80°C in the temperature of earth surface. Rise in temperature is causing ice cap melting around the polar regions. As a result there is a rise of about 0.2 m in sea level. This in turn causes flooding. We are witnesses of the magnitude of flooding that occur in our nation last year;

14. Global Navigation Satellite Systems (GNSS), such as Global Positioning System (GPS) can be used to increase food security, manage natural resources, provide efficient emergency location services, improve surveying and mapping, and provide greater precision and safety in land, water and air navigation systems;
15. Observations of (i) birds capable of disrupting flight (Ajewole, 2011) (ii) ash plume hazardous to aircraft due to the 2010 eruptions of EYJAFJALLAJOKULL in Iceland. The eruption occurred beneath glacial ice. The cold water from the melting ice chilled the lava quickly causing it to fragment into very small particles of glass (Silica) and ash, which were carried into the eruption plume. Due to the extremely fine structure of the ash particles and the large volume of steam produced from the glacial meltwater and ash plume was rapidly sent into the upper atmosphere (Wikipedia).

VII. SUGGESTIONS ON THE WAY FORWARD

1. Awareness of space science should be created by different arms of government of African countries just as the ministry of Science and Technology of Lagos State of Nigeria is creating.
2. Astronomy/space science should be included in the curriculum of both primary and post primary education;
3. Training of professionals in astronomy/space science and related fields;
4. Astronomy and space science observatories which should be equipped with (a) magnetometer (b) ionosondes/digisondes (c) GPS receivers (d) powerful optical telescopes (e) back scatter and forward scatter radar (f) winds equipment.

We cannot afford to continue to pay lip-service to the necessity of space technology.

REFERENCES

- [1] Tessema, S. B., Tsidu, G. M., Wandemagegn, T. W., Bedri, K., Dامتie, B., Yizengaw, E. and Fekade, G. A., *The experience of space science and astronomy education and research in Ethiopia*. AGU CHAPMAN Conference on Hemispheric Dependence of Space weather, Addis-Ababa, Ethiopia, 12 – 16 November, (2012).
- [2] Mckinnell, L. A. 2012. *An overview of South African space agency*. AGU CHAPMAN Conference on Hemispheric Dependence of Space weather, Addis-Ababa, Ethiopia, 12 – 16 November, (2012).
- [3] Doherty, P. H., *Scientific Exploration using GNSS systems in Africa*. AGU CHAPMAN Conference on Hemispheric Dependence of Space weather, Addis-Ababa, Ethiopia, 12 – 16 November, (2012).
- [4] Rishbeth, H. and Garriot, O. K., *Introduction to Ionospheric Physics*, (Academic Press, New York, 1969).
- [5] Ratcliffe, J. A. and Weekes, K., *The ionosphere*, In “Physics of the upper atmosphere” (J. A. Ratcliffe eds., Academic press, New York, 1960), Ratcliffe, J. A., *Sun, Earth and Radio: An introduction to the ionosphere and magnetosphere*, (World University Library, 1970).
- [6] Pullinets, S. A., Kotsarenko, A. N., Ciraolo, L. and Pullinets, I. A., *Special cases of ionospheric day-to-day variability associated with earthquake preparation*. Adv. Space Res. **39**, 970 – 977 (2007).
- [7] Ndu, F. O. C., Ndu, L. O. Olanrewaju, A. O. and Somoye, Femi. 2007. *Basic Science: An integrated science course for junior secondary school 1*, Longman Plc, Nigeria (2007).

Investigation of structure and properties of Graphene



Hosseinpour, Mansoureh, Hosseinpour, Maryam
Shahid Beheshti University, Department of Physics, Evin,
1983963113 Tehran, Iran.

E-mail: Hosseinpour.mansoureh@gmail.com

(Received 11 January 2014, accepted 27 June 2014)

Abstract

In this paper, we investigate the Graphene from structural and its properties. We try to show crystal structure of Graphene and a comparison between Graphene and other two-dimensional semiconductors.

Keywords: Thermal conductivity-graphene-chirality.

Resumen

En este trabajo, investigamos estructura y propiedades del grafeno. Tratamos de mostrar la estructura cristalina de grafeno y una comparación entre éste y otros semiconductores de dos dimensiones.

Palabras clave: Conductividad térmica, grafeno, quiralidad.

PACS: 01.40.gb, 01.40.-d

ISSN 1870-9095

INTRODUCTION

Graphite is a three dimensional hexagonal system that has been formed from layers of Carbon atoms. Each of these layers is called graphene. So graphene is single layer graphite. Since the distance between two adjacent layers is about $35/3 \text{ \AA}$ and is so much bigger than the distance between two C-C atoms that is $1/42 \text{ \AA}$, interaction between two adjacent layers in comparison with interaction within in a layer is so petty [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Graphene layers are located next to each other in Graphite by the Vanderwaals's weak power; while the Carbon atoms in Graphene are next to each other with three σ powerful connection with sp^2 hybridation, and $2p_z$ orbital single electron for each atom, is perpendicular with the Graphene layer making π covalent connection and is the reason for electrical conductivity in Graphene [7].

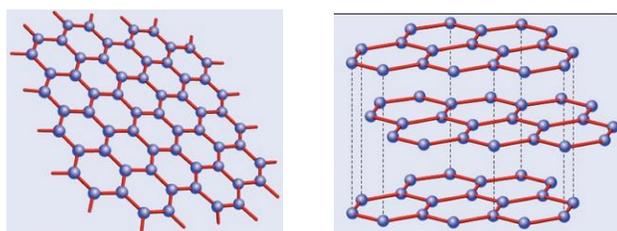


FIGURE 1. Graphene (left), graphite (right).

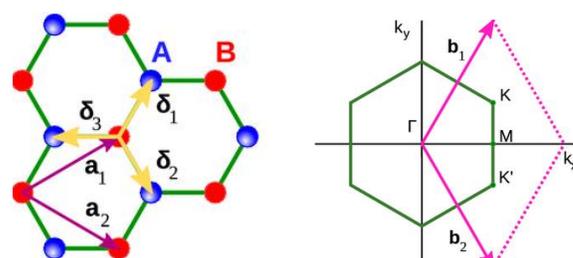


FIGURE 2. First Brillouin region in graphene.

II. CRYSTAL STRUCTURE OF GRAPHENE

Graphene is a single atomic layer of Carbon atoms in a honeycomb hexagonal structure; in the triangular lattice with two atomic basis in per unit cell. This structure has been made from two sub lattice A and B. Unit cell that has been shown in figure (1) with rhombus, includes two atoms that each of them belongs to one sub lattice. Nearest neighbors distance in Graphene is $a \approx 1/42 \text{ \AA}$. Lattice vectors are as follows:

$$\vec{a}_{1,2} = \frac{a}{2} (3, \pm\sqrt{3}). \quad (1)$$

Two dimensional graphite lattice vector and rotors are related as follows:

$$|\vec{a}_{1,2}| = \sqrt{3}a \approx 2/64. \quad (2)$$

Three vectors nearest neighbors as they are shown in figure (1) are as follows:

$$\vec{\delta}_1 = \frac{a}{2}(1, \sqrt{3}) \quad \vec{\delta}_2 = \frac{a}{2}(1, -\sqrt{3}) \quad \vec{\delta}_3 = -a(1, 0). \quad (3)$$

In first Brillouin region inverse space, as it's shown in figure (1), it's hexagonal. Basis vectors of inverse lattice are as follows:

$$\vec{b}_{1,2} = \frac{2\pi}{3a}(1, \pm\sqrt{3}). \quad (4)$$

As can be seen, vectors \vec{b}_1 and \vec{b}_2 in hexagonal inverse lattice are rotated as much as 90° in comparison with vectors \vec{a}_1 and \vec{a}_2 in real lattice. To obtain basis vectors of inverse lattice as it's common in two dimensional lattices, do as follows:

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \hat{z}}{A} \quad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \hat{z}}{A}. \quad (5)$$

A is area of unit cell in real space. Two particular point k and k' in figure (3) are known as Dirac points. Other points of this hexagon according to the position they have are corresponding to one of these two points. The position of Dirac points in momentum space are as follows:

$$\vec{K} = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{\pm 2\pi}{3\sqrt{3}a} \right). \quad (6)$$

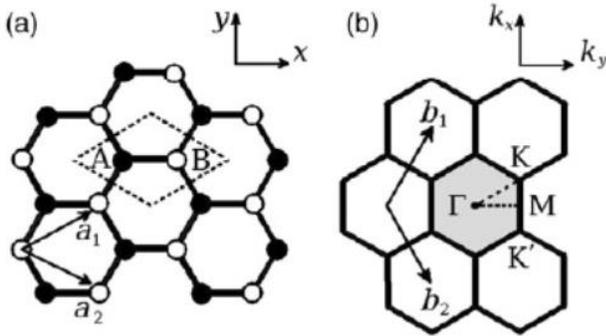


FIGURE 3. Cell diagram of Graphene.

Each atom has been bonded to its own nearest neighbors by σ strong bonds that make 120° angle in graphene page σ results sp^2 hybridization for three capacity electrons of $2s$, $2p_x$ and $2p_y$ orbitals. The fourth capacity electron is in orbital $2p_z$ and it is perpendicular to Graphene page. Thus the one weak π bond is formed by overlap of $2p_z$ with other $2p_z$ orbitals. Transport properties of Graphene are determined by these delocalized π electrons.

Graphite crystal structure that includes Graphene layers, is accompanied with within layers strong correlation of Graphene and weak bonds between layers. It seems that the origin of this weak correlation between layers is weak Van Der Waals's interaction. (Distance between the layers is $0/34$ nm that is so much more than the distance between nearest neighbors of a layer $a_{c-c} = 0/142$ nm.) [9].

III.COMPARISON OF GRAPHENE AND OTHER 2-DIMENSIONAL SEMICONDUCTORS

Graphene is a two dimensional semi-conductor with zero band-gap, but there are many quality differences between Graphene and other two dimensional semi-conductors that among them we can mention the following:

1. Two dimensional semi-conductor systems including big band-gap, are usually more than one electron-volt and electrons and holes in them are under examination in the structure with the electron or hole pattern. Graphene is a semi-conductor, lacking band-gap. In this system carriers in Dirac points switch from kind of electronic to hole or vice versa. The result of zero energy-gap in Graphene is acquiring metallic nature and chemical potential is always perched in Valence-band or conduction band against that, two dimensional semi-conductors, turned to insulation below a certain voltage and Fermi level situates in energy-band.

2. Graphene systems are chiral but there is no chirality in two dimensional semi-conductors and the wave function of system is non-chiral and is in $\psi(r,z) \sim e^{iq.r} \xi(z)$ form. q and r respectively are wave vector and position vector and $\xi(z)$ is wave vector that is limited in order to z . chirality in Graphene results special transport behavior in structure[15].

3. Dispersion relation of energy in single layer graphene is changed linear with momentum while the dispersion relation of energy is square for two dimensional semi-conductor with momentum [8]. This difference results fundamental differences in transport properties of both systems.

4. Graphene is an ideal two dimensional system, it means since the Graphene layers have the thickness of an atom, carriers are limited in two dimensions but in the structures of two dimensional semi-conductors, by the effect of applied limitation with electric field, dynamics quantum considered, two dimensional. So the result of two dimensional semi-conductors is quasi-two dimensional system. And the average thickness is always from 5nm to 50nm [14].

5. Graphene has a high thermal conductivity and special electronic and mechanical properties. Graphene itself is a semi-conductor but in comparison with the other semi-conductor, is an alternative for silicon because of its special properties and will be used as an ideal material in electronic. As electronic components got smaller, local heating is more important problem and silicon specially will have problem. Materials like Graphene has higher thermal conductivity and can effectively remove this wasted heat.

REFERENCES

[1] Ghosh, S., Calizo, I., Teweldebrhan, D., Pokatilov, E. P., Nika, D. L., Balandin, A. A., Bao, W., Miao, F., and Lau, C. N., *Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in*

- nanoelectronic circuits*, Applied Physics Letters **92**, 151911 (2008).
- [2] Balandin, A. A., Ghosh, S., Bao, W., Calizo, I., Teweldebrhan, D., Miao, T. and Lau, C., Phys. Rev. **76**, 205423 (2007).
- [3] Stauber, T., Peres, N. M. R. and Guinea, F., Nano Letters, **8**, 3 (2008).
- [4] Saito, R., Dresselhaus, M. S., Dresselhaus, G., *Physical properties of carbon nanotubes*, (Imperial College Press, London, UK, 1998).
- [5] Hiramatsu, M., Hori, M., *Carbon nanowalls synthesis and emerging applications*. (Springer, UK, 2010).
- [6] Dresselhaus, M. S., Dresselhaus, G., Avouris, P., *Carbon nanotubes*, (Springer, UK, 2001).
- [7] Molitor, F., Guttinger, J., Stampfer, C., Droscher, S., Jacobsen, A., Ihn, T., Ensslin, K., J. Phys: Condens. Matter. **23**, 243201 (2011).
- [8] Castro Neto, A. H., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S., Geim, A. K., *The electronic properties of graphene*. Rev. Mod. Phys. **81**, 109–162 (2009)
- [9] Abergel, D. S. L., Apalkov, V., Berashevich, J., Ziegler, K., Chakraborty, T., *Properties of graphene: a theoretical perspective*, Advances in Physics **59**, 4 (2010).
- [10] Wallace, P. R., *The Band Theory of Graphite*, Phys. Rev. **71**, 622–634 (1947).
- [11] Bena, C., Montambaux, G., *Remarks on the tight-binding model of graphene*, New J. Phys. **11**, 095003, (2009).
- [12] Reich, S., Maultzsch, J., Thomsen, *Tight-binding description of graphene*, Phys. Rev. B **66**, 035412 (2002).
- [13] Semenoff, G. W. *Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449–2452 (1984).
- [14] Das Sarma, S., Adam, S., Hwang, E. H., Rossi, E., *Electronic transport in two-dimensional graphene*, Rev. Mod. Phys. **83**, 407–470 (2011).
- [15] Katsnelson, M. I., Novoselov, K. S., Geim, A. K. *Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene*, Nature Physics **2**, 620-625 (2006).
- [16] Ashcroft, N. W., Mermin N.D., *Solid State Physics*, (Harcourt College Publisher, New York 1976).
- [17] Ziman, J. M., *Principles of the theory of solids*, (Cambridge University Press, UK, 1979).
- [18] Trushin, M., Schliemann, J. *Minimum Electrical and Thermal Conductivity of Graphene: A Quasiclassical Approach*, Phys. Rev. Lett. **99**, 216602 (2007),
- [19] Tan, Y. W., Zhang, Y. Bolotin, K., Zhao, Y. Adam, S., Hwang, E. H., Das Sarma, S., Stormer, H. L., Kim, P. *Measurement of Scattering Rate and Minimum Conductivity in Graphene.*, arXiv: 0707.1807 (2007).
- [20] Dyakonov, M. I., Khaetskii, A.V., *Relaxation of nonequilibrium carrier-density matrix in semiconductors with degenerate bands*, Phys. JETP **59**, 1072 (1984).