Análisis de bases matemáticas en tres cursos universitarios de Física

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Santa Esmeralda Tejeda Torres[1], **Rodolfo Rodríguez y Masegosa**[1]
[1]*Departamento de Física, Tecnológico de Monterrey, Av. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, C.P. 64849, Monterrey, N.L.*

E-mail: stejeda@itesm.mx

(Recibido el 2 de febrero de 2017, aceptado el 15 de mayo de 2017)

Resumen
En esta investigación de tipo cualitativo exploratorio se evaluaron las bases matemáticas de estudiantes de primero, segundo y tercer semestre de universidad, con la finalidad de analizar sus dificultades conceptuales en el contexto de una clase de Física universitaria. En este trabajo participaron 297 estudiantes, quienes resolvieron individualmente un examen rápido abierto dentro de su salón de clase de Física, antes de la instrucción en un curso intensivo de verano. Se encontraron dificultades conceptuales asociadas al uso inadecuado de procedimientos algebraicos, secuenciales y de interpretación de cada concepto evaluado. Los hallazgos de esta investigación ofrecen un conocimiento preliminar para el docente de cursos básicos de Física interesado en reforzar los conceptos matemáticos necesarios para el aprendizaje de la materia, así como un panorama inicial al investigador educativo enfocado en profundizar en la traslación conceptual.

Palabras clave: Dificultades conceptuales, Física universitaria, resolución de problemas.

Abstract
In this exploratory qualitative research, we examined mathematical bases of freshman and sophomore students in university, in order to analyze their conceptual difficulties in the context of a university physics class. In this work 297 students participated, who individually solved an open quiz within their physics classroom, before the instruction in an intensive course of the summer. Conceptual difficulties were found associated with the improper use of algebraic, sequential and interpretation procedures for each evaluated concept. The findings of this research offer a preliminary knowledge for the teacher of basic courses of physics interested in improving the mathematical concepts necessary for the learning of the subject, as well as an initial panorama of the educational researcher concentrated on deepening in the conceptual translation.

Keywords: Conceptual difficulties, University Physics, problem solving.

PACS: 01.40.Fk, *01.30.lb*. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La relación cercana entre Física y Matemáticas es una realidad que experimentan cotidianamente los protagonistas del proceso educativo en ciencias. En la literatura existen un cúmulo de investigaciones que abordan el entendimiento y la aplicación de conceptos clave en Cálculo y en Física, o solamente en Física, reportando dificultades conceptuales que limitan el aprendizaje efectivo a corto y mediano plazo [1].

La investigación de las dificultades conceptuales en Física ha motivado numerosas investigaciones sobre la aplicación de la pendiente, la derivada y la integral en Física [2] y [3]. Esta tendencia da por hecho que los estudiantes cuentan con bases matemáticas suficientes para estudiar Física universitaria. En contraste, [4] afirman que la conexión conceptual es un factor adicional a la falta de robustez de conceptos matemáticos. En temas de Física básica como sonido, mecánica de fluidos y electricidad y magnetismo se utilizan conceptos matemáticos básicos como teorema de Pitágoras, cálculo de la integral, despeje en una ecuación con fracciones, uso de logaritmos y obtención de un ángulo. Estos conceptos han sido poco abordados en Educación de la Física.

El docente de Física típicamente asume que el estudiante cuenta con bases matemáticas robustas, aunque al evaluar los contenidos de Física que requieren este conocimiento puede encontrar resultados poco satisfactorios, de los cuales llega a desconocer el verdadero origen. Algunos conceptos matemáticos utilizados en cursos intermedios de Física son: teorema de Pitágoras, cálculo de la integral, despeje en una ecuación con fracciones, uso de logaritmos y obtención de un ángulo. Si bien estos conceptos se aprenden en educación secundaria y preparatoria llega un momento en la universidad donde puede ser necesario que el profesor los retome previo a su clase de Física.

Esta problemática ha sido observada de manera aislada en la práctica docente universitaria, por lo que se decidió indagar cómo los estudiantes resuelven problemas de los conceptos matemáticos previamente mencionados en una clase de Física. En este trabajo se analizan dificultades conceptuales de la resolución de problemas, en atención al nivel de detalle de información que representan estas dificultades para el área de investigación.

II. MÉTODO

A continuación se describen los elementos del método de esta investigación.

A. Contexto

Participaron 297 estudiantes inscritos en el periodo de verano de una institución educativa del noreste de México. Estos estudiantes se inscriben en este periodo para adelantar o repetir una materia, según sea su caso. En esta investigación se aplicó un examen rápido abierto a todos los estudiantes, sin ninguna distinción o excepción.

B. Instrumento de evaluación

Se diseñó un examen rápido con 6 problemas abiertos, con espacio para responder. Se proporcionó espacio en atención a la naturaleza exploratoria de la investigación, ya que no se cuenta con antecedentes de los modelos conceptuales abordados en este trabajo, a saber:

1. Teorema de Pitágoras y cálculo de seno, coseno y tangente de un ángulo.
2. Cálculo de una integral definida.
3. Obtención de la variable independiente "x" de una ecuación fraccionaria lineal.
4. Cálculo del valor de "x" de una ecuación de segundo grado.
5. Solución de una ecuación logarítmica.
6. Solución de una ecuación trigonométrica de primer grado.

C. Metodología

Los estudiantes contaron con 20 minutos para responder el examen rápido. Este examen se aplicó antes de la instrucción. Luego se codificaron los modelos conceptuales en cada problema, se recopilaron estos modelos y se analizaron en función de su significado, modelo conceptual correcto y modelos alternativos.

III. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Los modelos conceptuales encontrados se presentan por problema o ítem. En primer lugar se presenta el ítem 1, que contó con 2 incisos que se presentan por separado.

A1. Cálculo de seno de un ángulo.

Este ítem evaluó la obtención de la función seno a partir de un triángulo (ver Tabla 1).

TABLA I. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 1(a).

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto (seno)	184
Confusión de ángulo por función	65
Confusión con otra función	27
Aplicación repetitiva de seno	19
Sólo ecuación	2

En el análisis se identificaron 4 modelos conceptuales relacionados con la utilización de ángulos, otras funciones o con la aplicación repetitiva del seno. El primer modelo, el de confusión de ángulo por función, muestra que cuando el estudiante lee función lo asocia con un ángulo, no necesariamente con una cantidad decimal que representa un cociente. El segundo modelo, el de confusión de ángulo por función, implica que el estudiante no sabe exactamente qué función se le está pidiendo y calculó de acuerdo a la función que tiene presente.

En tanto, el tercer modelo, de aplicación repetitiva de seno, habla de una aplicación doble de la función seno, es decir, que el solucionador no sabe dónde parar para responder el problema. El último modelo, el de sólo ecuación, se encontró en las respuestas únicamente algebraicas mas no numéricas, se consideró un modelo conceptual alterno debido a que no se especificó la respuesta.

La presencia de estos modelos conceptuales alternativos muestra que el estudiante que cuenta con dificultades conceptuales sabe cómo calcular funciones pero se le dificulta distinguir exactamente cuál función le solicita el problema o hasta dónde terminar su cálculo.

A2. Cálculo del coseno de un ángulo.

Este inciso forma parte del ítem 1 (ver Tabla I), aunque presentó otros modelos conceptuales alternos que no emergieron en la Tabla I.

TABLA II. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 1(b).

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto (coseno)	101
Cuadrante incorrecto	77
Aleatorio	54
Confusión de ángulo por función	23
Confusión con otra función	15
Aplicación repetitiva de coseno	14
Nada	8
Lectura de cateto adyacente	5

De acuerdo a la Tabla II, en la obtención del coseno se identificaron los modelos alternativos: cuadrante incorrecto, aleatorio, confusión de ángulo por función, confusión con otra función, aplicación repetitiva de coseno, nada y lectura de cateto adyacente. El primer modelo alternativo sucedió cuando se utilizó un cuadrante distinto al correcto para calcular la función coseno. Otro modelo fue el aleatorio, que representa los modelos incompletos o incoherentes que no necesariamente constituyen un modelo alternativo completo. Los modelos aleatorio, confusión de ángulo por función y confusión con otra función son similares a los de la Tabla I, resultando más popular en ambos casos "confusión de ángulo por función". Esta dificultad conceptual implica que el estudiante duda si le piden un número o un ángulo.

De la misma forma, el modelo de aplicación repetitiva de coseno es similar al de la aplicación repetitiva de seno (ver Tabla I), por lo que empieza a observarse un patrón de modelos conceptuales alternativos en funciones trigonométricas. Otro modelo conceptual de interés es el de "nada", donde se observó que el estudiante no respondió, situación preocupante para los docentes porque muestra que algunos estudiantes universitarios no conciben a la función coseno. Finalmente, la lectura del cateto adyacente representa un modelo conceptual alternativo relacionado con la lectura de otro elemento característico de una función trigonométrica (cateto adyacente). Si bien este modelo conceptual es de poca frecuencia es una dificultad que puede aparecer en la solución de problemas.

B. Cálculo de una integral definida.

La pregunta o ítem 2 planteó la solución de un problema de integral dada una función. Los resultados se muestran a continuación.

TABLA III. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 2.

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto (integral definida)	137
Aleatorio	120
Nada	39
Error de evaluación	1

El modelo conceptual de integral definida captó a 137 estudiantes, es decir, la mayoría de los participantes, aunque su diferencia ante el modelo aleatorio es de sólo 17 estudiantes (ver Tabla III). Este modelo representa a todos los modelos conceptuales incompletos e incoherentes y permite interpretar que para el estudiante existen más de 100 formas de resolver una integral, de manera alternativa a la manera correcta.

Por otro lado, el segundo modelo alternativo más popular fue el de "nada", que operativamente representa al espacio en blanco que 39 estudiantes dejaron al enfrentar el problema. Finalmente, el modelo de error de evaluación apareció en la resolución de 1 participante, se incluye a manera de respuesta posible.

Los resultados de este ítem muestran menos modelos conceptuales que las Tablas I y II, aunque evidencian mayor dispersión en las concepciones de los estudiantes sobre la integral, agrupadas en el modelo aleatorio. Otra situación de interés es el modelo "nada", ya que implica que varios estudiantes universitarios carecen de un modelo conceptual, ya sea alternativo o correcto, de la integral.

C. Obtención de la variable independiente "x" de una ecuación fraccionaria lineal.

En este ítem se planteó un problema de ecuación lineal en forma de 2 fracciones. Los resultados se muestran a continuación.

TABLA IV. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 3.

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto	217
Aleatorio	47
Nada	22
Fórmula general	11

El modelo conceptual correcto de este ítem fue el más popular de esta investigación, con una frecuencia de 217 (ver Tabla IV). Se trató de una pregunta de despeje presentada en forma de fracción. Se identificaron 3 modelos conceptuales alternativos, desde el modelo aleatorio hasta el uso del modelo de fórmula general. El modelo aleatorio apareció con una frecuencia considerable, mientras que el modelo "nada" o espacio en blanco fue presentado por 22 estudiantes. Finalmente, el modelo de fórmula general atrajo a 11 estudiantes, aunque no era la manera más indicada de resolver el problema.

D. Cálculo del valor de "x" de una ecuación de segundo grado.

En este problema se planteó una ecuación de segundo grado. Los resultados se presentan a continuación.

TABLA V. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 4.

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto	157
Fórmula general	74
Aleatorio	61
Nada	5

Este ítem presentó modelos conceptuales con comportamientos muy marcados. Por ejemplo, el modelo de obtención de raíces por factorización fue el más popular, pero dio cabida a modelos conceptuales alternativos como fórmula general, aleatorio y nada. El modelo de fórmula general pudo haber funcionado para los estudiantes que lo presentaron, más no fue aplicado de manera apropiada. Por otro lado, el modelo aleatorio incluyó errores de planteamiento, álgebra y aritmética. Por último, el modelo de "nada" apareció con una pequeña frecuencia.

E. Solución de una ecuación logarítmica.

En este problema se planteó una ecuación logarítmica, con el argumento en función de x. Los modelos conceptuales identificados se presentan a continuación.

TABLA VI. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 5.

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto (obtención del argumento del logaritmo de base 10)	105
Nada	89
e^2	37
Aleatorio	14
Separación de argumento de logaritmo	13
Logaritmo como logaritmo natural	5

El análisis de este ítem arrojó modelos conceptuales típicos (ver Tabla VI). El primer modelo "nada" implica que el estudiante no concibe un problema de logaritmo de base 10. En tanto, el modelo e^2 invita a pensar que el estudiante confunde al logaritmo con logaritmo natural. Por otro lado, el modelo aleatorio apareció en 14 de 297 estudiantes, lo que significa que los estudiantes se comprometieron más con responder, en caso de haberlo hecho.

De manera interesante, en este problema apareció el modelo "separación de argumento de logaritmo", modelo que no tiene cifras críticas pero posee una frecuencia alta. Por último, el logaritmo como logaritmo natural es una dificultad típica, asociada a una falta de memoria.

F. Solución de una ecuación trigonométrica de primer grado.

En este problema se planteó una ecuación trigonométrica mediante una función con argumento en función de x.

TABLA VII. Frecuencia de modelos conceptuales del ítem 6.

Modelo conceptual	*Frecuencia*
Correcto (Obtención del ángulo dado el seno de una función)	159
Nada	66
Aleatorio	51
Separación de argumento	16
Confusión de grados con radianes	5

Este ítem consistió en presentarle al estudiante un problema de obtención de ángulo dado el seno de una función cuando el argumento es algebraico. Al analizarlo se encontraron los modelos conceptuales siguientes: nada, aleatorio, separación de argumento y confusión de grados con radianes (ver Tabla VII). En este ítem el modelo correcto visiblemente atrajo a la mayoría de los estudiantes, mientras que el modelo aleatorio representa una colección variada de modelos alternativos, que por su frecuencia mínima no se presentan individualmente.

Los 2 últimos modelos están más relacionados con la pregunta inicial. Por ejemplo, el modelo "separación de argumento" sucedió cuando el alumno separó el argumento algebraico de la función, como si este argumento multiplicara a la función seno. Por último, el modelo "confusión de grados con radianes" apareció en las respuestas de 5 estudiantes, aunque en el problema se marcó claramente el dato de grados. Este problema deja en claro que los estudiantes carecen de habilidades algebraicas relevantes para el aprendizaje de la Física.

IV. CONCLUSIONES

Esta investigación cualitativa reportó varios hallazgos sobre dificultades conceptuales concretas de bases matemáticas para el aprendizaje de la Física. Su carácter exploratorio permitió recolectar, clasificar e interpretar modelos conceptuales no abordados previamente de esta manera en la literatura. Los hallazgos por ítem se enlistan a continuación:

En el ítem 1 se identificó que a varios estudiantes se le dificulta distinguir exactamente cuál función le solicita el problema o hasta dónde terminar su cálculo, así como interpretar si la función seno es un número o un ángulo.

En el ítem 2 se observó que varios estudiantes dudan de cómo completar una integral y/o carecen de bases algebraicas indispensables. Esto es, si bien pueden plantear una integral algo sucede cuando desarrollan la integral que terminan por resolverla incorrectamente.

En el ítem 3 se encontró que los estudiantes son hábiles al resolver ecuaciones lineales en forma de fracción. Este resultado contrasta con la manera elaborada de resolver el problema, puesto que se les presentó de una forma en que podían cancelar el denominador de ambos lados y pocos lo notaron.

En el ítem 4 se planteó una función cuadrática sencilla a los estudiantes y se preguntó por sus raíces. La mayoría de los participantes resolvió correctamente este ítem, otros aplicaron la fórmula general para resolver el problema pero sus bases algebraicas no les permitieron resolver correctamente el problema.

En el ítem 5 se identificó que los estudiantes pueden confundir el logaritmo con el logaritmo natural, así como a pensar que el logaritmo se puede separar de su argumento, es decir, que su argumento es un factor y no un elemento indispensable del logaritmo.

En el ítem 6 se encontró que los estudiantes carecen de habilidades algebraicas y de concepción del argumento como parte de la función, ya que lo siguen manejando como un factor de multiplicación. Siendo el seno una función tan usada, puede argumentarse que los alumnos están más acostumbrados a encontrar el valor de una función que a plantearlo y resolverlo como una ecuación, usando las propiedades naturales de una función trigonométrica.

La aportación de esta investigación consiste en presentar una clasificación de modelos conceptuales básicos para la Enseñanza de la Física, que ahora se disponen como herramientas conceptuales para aproximarse a las dificultades conceptuales que ocasionalmente se sale de la mira del docente de Física.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Departamento de Física del Tecnológico de Monterrey por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[4] Tuminaro, J. & Redish, E. F., *Understanding Students' Poor Performance on Mathematical Problem Solving In Physics,* Physics Education Research Conference **720**, 113-116 (2003).

[1] Hake, R., *Six lessons from the Physics Education Reform Effort*, Latin American Journal of Physics Education **1***,* 24-31 (2007).

[2] McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. & van Zee, E. H. *Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics,* American Journal of Physics **55** *(6),* 503-513 (1987).

[3] Beichner, R. J., *Testing student interpretation of kinematics graphs*, American Journal of Physics*,* **62** *(8).* 750-762 (1994).