Aportes de Penrose y Rindler a la teoría de twistores

Rubén Sánchez Sánchez, **César Mora**
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Naciona, Unidad Legaria, Calzada Legaria 694, Colonia: Irrigación. Alcaldía: Miguel Hidalgo., C.P. 11,500, Ciudad de México

E-mail: rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 2 de febrero de 2018, aceptado el 21 de marzo de 2018)

Resumen

Este documento contiene algunas formas de representar problemas relacionados a la teoría General de la Relatividad, transcribiendo la notación tensorial a la espinorial o a la notación twistorial. En su trabajo, Penrose y Rindler dan argumentos donde se justifica el uso de twistores en lugar de tensores para representar diversas cantidades físicas, que existen en un espacio-tiempo curvo. También pueden estudiar varias propiedades del mismo espacio-tiempo utilizando el formalismo twistorial.

Palabras clave: Enseñanza del espacio-tiempo, formalismo twistorial, enseñanza de la Física Teórica.

Abstract

This document contains some ways of representing problems related to the General theory of Relativity, transcribing tensor notation to spinorial or twistorial notation. In the their work, Penrose and Rindler give us several arguments that justify the use of twistors instead of tensors to represent various physical quantities, which exist in a curved time-space. Several properties of the space-time itself can be studied using twistorial formalism.

Keywords: Space-time teaching, twistorial formalism, Theoretical Physics teaching.

PACS: 01.30.Ee, 01.30.-y **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En los siguientes párrafos veremos el aporte que han tenido tanto Roger Penrose como Wolfgang Rindler a la Teoría General de la Relatividad, mediante la introducción de uso de twistores. Es muy interesante el analizar el trabajo teórico hecho por Penrose y Rindler, y repasar las contribuciones importantes que tiene a la Teoría de Campos en espacios-tiempos curvos. Roger Penrose y Wolfgang Rindler [1, 2] nos muestran la importancia del formalismo spinorial y twistorial dentro del desarrollo de la Física Teórica, y en particular en el área de la Gravitación.

Dentro de su trabajo se puede observar una descripción matemática de la Relatividad Especial y General, pero dentro del contexto de la matemática spinorial de Cartan y la teoría twistorial. Se indica por ejemplo, como el tensor de curvatura de Riemann puede ser escrito en forma de componentes twistoriales y utiliza este hecho para realizar una clasificación del tensor de curvatura.

También, entre otras cosas, ha aportado una descripción detallada del modelo Cosmológico. Da una descripción bastante ilustradora de lo que es el infinito conforme, trata las congruencias nulas, y ofrece muchos otros temas de interés que involucran la teoría clásica de campo de gravedad, que Einstein formuló en pasado siglo XX.

Para describir el trabajo de Penrose y Rindler, debemos explicar qué es un twistor y cuales son sus propiedades geométricas más importantes. Debemos de hacer un resumen especial para tratar a los componentes más básicos y elementales de un twistor: los espinores. Estos son unas cantidades matemáticas introducidas por primera vez en el estudio de la geometría por el matemático Élie Cartan [3].

Con el objeto de identificar el aspecto gráfico del twistor, Penrose y Rindler introducen una construcción geométrica que se conoce como la congruencia de Robinson. Penrose y Rindler dan las condiciones necesarias para poder describir las propiedades del espacio-tiempo utilizando twistores, revisando las condiciones necesarias para su existencia, y viendo los requerimientos matemáticos para tener campos twistoriales de manera local. También encuentran el aparato matemático necesario para poder darle una estructura diferencial, tal y como se hace con los campos vectorial y tensoriales de la matemática más convencional. Esto hace posible tener la clasificación espinorial del tensor de curvatura en general, y de su componente conforme, pudiendo así realizar una

clasificación espinorial de las soluciones, que se corresponde a la clasificación hecha por A. Z. Petrov [4]. A esto, se une otra clasificación del tipo de curvatura hecha por Jerzy F. Plebański Rosiński [5].

En su trabajo, también se abordan temas como los del infinito, el infinito conforme, y otra propiedades globales que puede tener el espacio-tiempo curvo. Por ejemplo se puede abordar el estudio de la Cosmología vista desde el punto de vista twistorial y espinorial.

En las siguientes secciones trataremos de resumir o comentar brevemente algunas de las partes más esenciales del trabajo de Penrose y Rindler para darnos una buena idea de su importancia e indicaremos aspectos matemáticos de los twistores que nos ayuden a entender varios conceptos, magnitudes o cantidades físicas, en el desarrollo de un problema relacionado con la Teoría General de la Relatividad Clásica de Einstein.

II. ESPINORES

Uno de los conceptos básicos que hay que entender antes de introducir es concepto de twistor, es comprender que se enteinde por un espinor. Los espinores son cantidades que fueron introducidas primeramente por el matemático francés Élie Cartan. Básicamente un espinor es un vector bidimensional sobre el campo complejo [6].

Las transformaciones espinoriales estan en el grupo de simetría llamado SU(2). Este tipo de transformaciones se interpretean como restringidas de Lorentz cuando se hace una correspondencia entre los espinores y las coordenadas dadas por un 4-vector del espacio-tiempo. Este vector se escoje de manera que este situado sobre lo que se conoce en Relatividad General como el cono de luz, para un punto origen dado, del espacio-tiempo, que se corresponde en la tería con el sitio donde se encuentra un observador *O*.

A. Correspondencia entre las coordenadas del espacio tiempo y los espinores

Denotemos por un momento por *X*, *Y*, *Z* y *T* las coordenadas normales del espacio y el tiempo en un espacio de Minkowski, y hagamos la siguiente correspondencia con las coordenadas contravariantes de un 4-vector: $x^0=T$, $x^1=X$, $x^2=Y$, $x^3=Z$.

Dados dos 4-vectores $A^{\mathbf{a}}=(A^0, A^1, A^2, A^3)$ y $B^{\mathbf{a}}=(B^0, B^1, B^2, B^3)$ podemos el 4-vector que va de *A* a *B* encontrar su diferencia en el espacio-tiempo realizando la siguiente operación

$$A^{\boldsymbol{a}} - B^{\boldsymbol{a}} = (A^0 - B^0, A^1 - B^1, A^2 - B^2, A^3 - B^3). \quad (1)$$

Definimos la separación al cuadrado entre ambos puntos por la función métrica

$$\Phi(A,B) = (A^0 - B^0)^2 - (A^1 - B^1)^2 - (A^2 - B^2)^2 - (A^3 - B^3)^2. \quad (2)$$

El cono de luz del punto A, son todos los puntos B del espacio de Minkowski (que modela al espacio-tiempo) que satisfacen la condición

$$\Phi(A,B) = 0.$$

Los rayos de luz son los generadores del cono de luz (según el libro). Los rayos de luz que pasan por *O*, pueden ser parametrizados por ς, que se encuentra en un campo complejo (más el punto al infinito) donde

$$\varsigma = \frac{X+iY}{T-Z} = \frac{T+Z}{X-iY}. \quad (3)$$

Todos los puntos que Penrose llama esfera anti-celestial se caracterizan por tener los siguientes restricciones en sus valores

$$T = 1, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Penrose y Rindler denotan por el símbolo S^+, a esta esfera. Y representa el frente de onda esférico de la luz que parte del punto *O* del observador, suponiendo que éste a prendido una linterna al tiempo inicial T=0. Por otro lado existe la esfera celestial S^-, que corresponde a

$$T = -1, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Físicamente, representa la situación de que hay un observador en *O*, y este ve la luz proveniente de la esfera celeste cuya luz está por llegar a *O*, y se encuentra a un tiempo T=-1, antes de que el observador periba la luz que le llega al tiempo T=0. Ambas esferas se relacionan con lo que se conoce como mapeo antipodal.

Cuando existe una transformación de Lorentz restringuida, existe una transformación del tipo siguiente, que cambia el punto ς por el punto $\tilde{\varsigma}$, de tal forma que existe la transformación

$$\varsigma \to \tilde{\varsigma} = \frac{\alpha\varsigma+\beta}{\gamma\varsigma+\delta}, \quad (4)$$

donde los coeficientes griegos $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ pueden fromar la siguiente matriz de transformación, que pertenece a SU(2), y se escribe

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1; \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}). \quad (5)$$

La matriz se llama matriz-espín en el libro, y provee los movimientos conformes en S^+. La matriz actúa sobre el vector bidimensional complejo

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^0 \\ \kappa^1 \end{pmatrix}, \qquad \varsigma = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\kappa^0}{\kappa^1}. \quad (6)$$

El polo de bandera, o 4-vector nulo que corresponde a este vector-espín tienelas siguientes coordenadas, según el escrito

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa^0\bar{\kappa}^0 + \kappa^1\bar{\kappa}^1), & X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa^0\bar{\kappa}^1 + \kappa^1\bar{\kappa}^0), \\ Y &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\kappa^0\bar{\kappa}^1 - \kappa^1\bar{\kappa}^0), & Z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa^0\bar{\kappa}^0 - \kappa^1\bar{\kappa}^1). \end{aligned} \quad (7)$$

B. Álgebra de los espinores

De acuerdo al libro, cada espinor $\kappa^A = (\kappa^0, \kappa^1)$, se puede representar por una bandera nula que es un vector nulo futuro adicionado con un 2-plano asociado a él.

Existe un espinor particular ε^{AB}, que tiene la particularidad de actuar como una especie de espinor métrico, ya que los índices espinoriales pueden subir o bajar, empleando este espinor en particular de modo que

$$\kappa^A = \varepsilon^{AB}\kappa_B, \qquad \kappa_A = \varepsilon_{AB}\kappa^B. \tag{8}$$

Dado un tensor de tres índices espinoriales tendríamos por ejemplo que sus índices se suben y bajan de acuerdo a los siguientes ejemplos

$$\psi^{ABC} = \varepsilon^{AD}\psi_D{}^{BC}, \quad \psi_{ABC} = \psi_A{}^D{}_C\varepsilon_{DB}, \quad \psi^A{}_B{}^C = \psi^{ADC}\varepsilon_{DB}. \tag{9}$$

Ahora si el vector espín κ^A, vive en el espacio espinorial Denotado por el símbolo Ω^A, (también a veces llamado espacio celestial)

$$\kappa^A = (\kappa^0, \kappa^1) \in \Omega^A. \tag{10}$$

entonces habrá un espacio complejo conjugado (llamado a veces espacio infernal) $\Omega^{A'}$, donde estará el vector complejo conjugado al primero denotado por

$$\kappa^{A'} = (\kappa^{0'}, \kappa^{1'}) \in \Omega^{A'}.$$

Al multiplicar ambos vectores de espín, obtenemos un 4-vector del espacio de Minkowski $\mathbb{M} = \Omega^a$, que también podemos llamr espacio terrestial. De manera que tenemos la igualdad siguiente

$$\kappa^A\kappa^{A'} = \kappa^a \in \Omega^a. \tag{11}$$

Así, que al generalizar este hecho tenemos los siguientes reemplazos, entre índices tensoriales y espinoriales

$$a = AA', \quad b = BB', \quad c = CC', \quad \ldots$$

Además tenemos las siguientes relaciones entre el tensor espinorial antisimétrico ε^{AB} y el tensor métrico g^{ab}

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'} = g^{ab}, \quad g_{ab} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}, \\ &\varepsilon_A{}^B\varepsilon_{A'}{}^{B'} = g_a{}^b, \quad g^a{}_b = \varepsilon^A{}_B\varepsilon^{A'}{}_{B'}. \end{aligned} \tag{12}$$

También están las relaciones de simetría y antisimetría siguientes

$$g_a{}^b = g^b{}_a, \quad \varepsilon_A{}^B = -\varepsilon^B{}_A, \quad \varepsilon_{A'}{}^{B'} = -\varepsilon^{B'}{}_{A'}. \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{BC}\varepsilon_{AD} + \varepsilon_{CA}\varepsilon_{BD} = 0, \\ &\varepsilon_{AB}\varepsilon_C{}^D + \varepsilon_{BC}\varepsilon_A{}^D + \varepsilon_{CA}\varepsilon_B{}^D = 0, \\ &\varepsilon_A{}^C\varepsilon_B{}^D + \varepsilon_B{}^C\varepsilon_A{}^D = \varepsilon_{AB}\varepsilon^{CD}. \end{aligned} \tag{14}$$

B. Bases de los espinores

Según el texto del libro, siempre que se tiene un espacio espinorial es porque existen dos vectores espinoriales con ciertas particularidades matemáticas, las cuales los convierten en una base del espacio espinorial [6]. Los dos vectores espín deberán de ser linealmente independientes, y además satisfacer ciertas propiedades en una función interna llamada producto interno. Denotemos a estos dos vectores espín por omicron y iota

$$o, \ \iota \in \Omega^A \tag{15}$$

con las siguientes propiedades de producto interno antisimétrico, donde los vectores espín están en un espacio lineal de dos dimensiones.

$$\begin{aligned} &\{o,\iota\} = 1, \quad \{\iota,o\} = -1, \\ &\{\kappa,\kappa\} = 0. \\ &\kappa^0 = \{\kappa,\iota\}, \ \ \kappa^1 = -\{\kappa,o\}, \\ &\kappa = \kappa^0 o + \kappa^1\iota. \end{aligned} \tag{16}$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ son dos escalares del campo complejo y

$$\kappa, \tau, \omega \in \Omega^A.$$

son tres vectores espín de un índice A.

El producto interno espinorial satisfacerá las siguientes propiedades matemáticas formales, las cuales se pueden ver en el volumen 1 de Spinors and space-time

$$\begin{aligned} &(\lambda\mu)\kappa = \lambda(\mu\kappa), \\ &1\kappa = \kappa, \ \ 0\kappa = 0, \ \ (-1)\kappa = -\kappa, \\ &(\lambda+\mu)\kappa = \lambda\kappa + \mu\kappa, \\ &\kappa + \omega = \omega + \kappa, \\ &(\kappa+\tau)+\omega = \kappa + (\tau+\omega), \\ &\lambda(\kappa+\tau) = (\lambda\kappa) + (\lambda\tau), \\ &\{\kappa,\tau\} = -\{\tau,\kappa\}, \\ &\lambda\{\kappa,\tau\} = \{\lambda\kappa,\tau\}, \\ &\{\kappa+\tau,\omega\} = \{\kappa,\omega\} + \{\tau,\omega\}, \\ &\{\kappa,\tau\}\omega + \{\tau,\omega\}\kappa + \{\omega,\kappa\}\tau = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Dada la base espinorial, podemos expresar las componentes del espinor antisimétrico

$$\varepsilon^{AB}$$

como sigue

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{AB}, \quad \varepsilon_A{}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &\varepsilon_A{}^0 = -\iota_A, \quad \varepsilon_A{}^1 = o_A, \quad \varepsilon_0{}^A = o^A, \quad \varepsilon_1{}^A = \iota^A. \end{aligned} \tag{18}$$

Una proposición importante, para que dos vectores espinoriales α^A, β^A sean múltiplos uno del otro es que satisfagan la propiedad de producto interno siguiente

$$\alpha_A\beta^A = 0. \tag{19}$$

C. Tetrada nula del espacio-tiempo

Dado un marco espinorial como en (15), de la subsección anterior, se puede construir una tetrada en el espacio tiempo, la característica que tiene esta tetrada es que su 4-norma es cero en el espacio de Minkowski. Entonces tenemos la siguiente correspondencia, dada en el libro

$$l^a = o^A o^{A'}, \quad n^a = \iota^A \iota^{A'}, \\ m^a = o^A \iota^{A'}, \quad \bar{m}^a = \iota^A o^{A'}. \tag{20}$$

Con las siguientes propiedades de producto interno

$$l^a l_a = m^a m_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = n^a n_a = 0, \\ m^a \bar{m}_a = -1, \quad l^a n_a = 1, \\ l^a m_a = l^a \bar{m}_a = n^a m_a = n^a \bar{m}_a = 0. \tag{21}$$

Siendo dos de estos 4-vectores reales

$$l^a = \overline{l}^a, \quad n^a = \overline{n}^a. \tag{22}$$

La tetrada de Minkowski, esta relacionada con esta tetrada nula que está definida sobre el cono de luz del origen mediante las relaciones siguientes

$$t^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^a + n^a), \\ x^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^a + \bar{m}^a), \\ y^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(m^a - \bar{m}^a), \\ z^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^a - n^a). \tag{23}$$

La métrica asociada de Penrose y Rindler queda entonces expresada por

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

III. TWISTORES

Una vez que tenemos la posibilidad de tener un espacio espinorial construído a través de una tetrada nula de Minkowski, podemos empezar a estudiar lo que se cono ce como espacio twistorial. Un twistor

$$Z^\alpha$$

es básicamente un par ordenado de dos espinores ω^A y $\pi_{A'}$.

Podemos escribir al twistor básicamente como

$$Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'}). \tag{25}$$

Otra notación abreviada es

$$Z^\alpha = [\omega^A]. \tag{26}$$

Donde las cantidades espinoriales se relacionan según

$$\omega^A = \omega_o{}^A - i x^{AA'} \pi_{oA'}, \\ \pi_{A'} = \pi_{oA'}. \tag{27}$$

donde las cantidades que tiene un subíndice o, tienen una interpretación especial. Primero la cantidad

$$\omega^A,$$

se interpreta como un campo espinorial definido en todo el espacio de Mikowski. El lado dercho de (27), en ambas ecuaciones se considera como campos espinoriales. Las expresiones con el subíndice o,

$$\omega_o{}^A \quad \text{y} \quad \pi_{oA'},$$

son campos espinoriales constantes cuyos valores conciden con los espinores de letra griega similares sin el subíndice o en el punto origen *O*.

$$\omega^A \quad \text{y} \quad \pi_{A'}.$$

Resulta que ambos campos, son solución de la ecuación espinorial diferencial

$$\nabla_{BA'} \omega^C = -i \varepsilon_B{}^C \pi_{A'}. \tag{28}$$

Ecuación que se deduce a partir de la ecuación diferencial espinorial siguiente

$$\nabla_{A'}{}^{(A} \omega^{B)} = 0. \tag{29}$$

En un espacio de Mikowski se cumple la siguinte identidad con el 4-vector de posición

$$\nabla_a x^b = g_a{}^b. \tag{30}$$

Ahora, consideremos la expresión diferencial siguiente

$$\nabla_{A'}{}^A \nabla_{B'}{}^B \omega^C. \tag{31}$$

Siendo el campo espinorial omega una solución de la ecuación (29). La expresión es entonces antisimétrica en *BC*. Pero como estamos considerando un espacio plano de Minkowski, entonces las derivadas pueden conmutar, dando la misma cantidad, entoces la expresión es claramente antisimétrica en *AC*. Es entonces, enteramente antisimétrica en *ABC*, lo cual implica que es igual a cero.

$$\nabla_{A'}{}^A \nabla_{B'}{}^B \omega^C = 0. \tag{32}$$

luego la expresión

$$\nabla_{B'}{}^B \omega^C. \tag{33}$$

es una constante, y como es antisimétrica en *AB*. Podemos decir que es proporcional a

$$\varepsilon^{AB}$$

o bien si pensamos que hay un campo espinorial constante llamado

$$\pi_{A'}$$

Lo podemos considerar proporcional al producto de ambos espinores y a otra constante (-*i*) que nos conviene introducir. Así, escojemos la expresión (28), como una expresión válida y a partir de ahí, deducimos el sistema de ecuaciones (27), como solución de la ecuación diferencial espinorial (29).

A la expresión (29), se le conoce con el nombre de ecuación twistorial, y su solución son los campos espinoriales de (27), que conforman las dos entradas en las ecuaciones de definición de un twistor, que son la ecuación (26), o la (25).

A. Helicidad

La helicidad de un twistor se define luego con la expresión de producto interno twistorial como se expresa en la siguiente relación matemática.

$$s=\frac{1}{2}Z^{\alpha}\bar{Z}_{\alpha}=\frac{1}{2}(\omega^{A}\bar{\pi}_{A}+\pi_{A'}\bar{\omega}^{A'}). \tag{34}$$

Definimos el espacio dual de este twistor como los twistores de la forma

$$W_{\alpha}=(\lambda_{A},\mu^{A'})=[\mu^{A'}]. \tag{35}$$

con solución

$$\begin{aligned}&\lambda_{A}=\lambda_{oA},\\&\mu^{A'}=\mu_{o}{}^{A'}+ix^{AA'}\lambda_{oA}.\end{aligned} \tag{36}$$

y helicidad

$$s=\frac{1}{2}\bar{W}^{\alpha}W_{\alpha}. \tag{37}$$

Así, luego hace la división de un espacio twistorial

$$\mathbb{T}^{\alpha}$$

en nulo s=0,

$$\mathbb{T}^{0}=\mathbb{N}$$

de mano derecha s>0,

$$\mathbb{T}^{+}$$

o de mano izquierda s<0.

$$\mathbb{T}^{-}$$

El twistor describe una particula clásica sin masa de helicidad dada por s. El momemto lineal esta dado por

$$p_{a}\equiv\bar{\pi}_{A}\pi_{A'}. \tag{38}$$

Y su momento angular esta dado por el tensor

$$M^{ab}\equiv i\omega^{(A}\bar{\pi}^{B)}\varepsilon^{A'B'}-i\bar{\omega}^{(A'}\pi^{B')}\varepsilon^{AB}. \tag{39}$$

La transformación de estas cantidades están dadas según

$$\begin{aligned}&p_{a}=p_{oa},\\&M^{ab}=M_{o}{}^{ab}-x^{a}p^{b}+x^{b}p^{a}.\end{aligned} \tag{40}$$

Que son las transformaciones del 4-momento lineal, y del 6-momento angular de la Relatividad Especial.

Para finalizar esta parte de la revisión, nos falta mencionar que podemos construir el vector de espín de Pauli-Lubanski

$$S_{a}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}p^{b}M^{cd}, \tag{41}$$

que es independiente de la posición. Esto es si su valor en el origen lo distingimos con un subíndice o (que denota su valor en el origen O), podemos escribir el hecho de que este vector es constante anotando lo siguiente

$$S_{a}=S_{oa}. \tag{42}$$

Para las partículas que existan físicamente sin masa el vector de Pauli-Lubanski debe de ser múltiplo de su 4-vector de momento lineal, esto es

$$S_{a}=sp_{a}, \tag{43}$$

al número s se le conoce como la helicidad de la partícula. Y a su valor absoluto

$$|s|,$$

o a su múltiplo (dependiendo del sistema de unidades elegido)

$$|s|\frac{2}{h},$$

se le conoce como el *espín* de la partícula. (Aquí vale la pena recalcar que la constante h tiene unidades de acción o unidades de energía-tiempo y es la conocida constante de Planck de la Mecánica Cuántica).

B. Curvatura

Otra cantidad importante que se trata en el trabajo de Penrose y Rindler, y que es de particular interés, es la llamada curvatura del espacio-tiempo, vista como un tensor twistorial local. La curvatura de una variedad diferencial, como lo puede ser el modelo matemático de un espacio-tiempo tiene que ver con el conmutador de dos vectores diferentes y en general linealmente independientes, llamemos a estos vectores $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{u}$. Entonces su conmutador denotado por [$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$], denota la diferencia entre realizar una translación de un punto inicial que podemos llamar O hasta un punto final, que normalmente no es el mismo y depende del orden en que hagamos las traslaciones. Por ejemplo, si iniciamos en O y luego nos desplazamos infinitesimalmente en dirección para lela al vector $\boldsymbol{t}$, llegamos a un punto P, luego nos desplazamos en forma paralela y por una cantidad infinitesimal a lo largo de la dirección indicada por $\boldsymbol{u}$ en P y llegamos a un punto final llamado Q. Si por el contrario invertimos las operaciones de traslación paralela en la dirección indicada por los vectores desde el principio. Primero iniciamos en el punto O, luego nos desplazamos infinitesimanmentel en dirección indicada por $\boldsymbol{u}$, y acabamos en el punto P'. Luego nos desplazamos infinitesimanlmente en la dirección de $\boldsymbol{t}$, y acabamos no en el punto Q, sino en el punto Q', que en general será Q' un punto diferente a Q, no obstante después de que nos hemos desplazado en forma paralela utilizando los mismos vectores pero usándolos de manera invertida. De esta manera el vector $Q'Q$ indica la diferencia que hay entre emplear diferentes métodos para llegar a un punto final. Si los vectores conmutan entonces el espacio de fondo es plano. Pero si esto no es así, indicamos que esta diferencia va a medir el grado de curvatura local que tiene nuestro espacio de fondo, ya que los desplazamientos los hemos efectuado de manera infinitesimal. Entonces tendremos la siguiente expresión matemática que expresa este hecho con el conmutador de $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned}&g^{ab}(t_{a}u_{b}-u_{a}t_{b})=g_{ab}(t^{a}u^{b}-u^{a}t^{b})=(t_{a}u^{a}-u_{a}t^{a})\neq 0,\\&\Leftrightarrow\ [\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}]\neq 0.\end{aligned} \tag{44}$$

Cuando el conmutador se anula se traza un cuadrilátero infinitesimal. Pero en general, cuando no se anula el conmutador tenemos curvatura local y el proceso traza un pentágono infinitesimal. El operador

$$\nabla_{\boldsymbol{t}}\nabla_{\boldsymbol{u}}-\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{t}}-\nabla_{[\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}]}, \tag{45}$$

expresa el incremento en una cantidad infinitesimal cargada por este pequeñísimo pentágono, en un procesp de trasporte paralelo sobre el espacio de fondo. Esta cantidad nos sirve para medir la curvatura local del espacio-tiempo alrededor del punto O. Podemos entonces usar esta magnitud para definir la *curvatura twistorial local* a través de la siguiente expresión.

$$i(\nabla_{\boldsymbol{t}}\nabla_{\boldsymbol{u}}-\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{t}}-\nabla_{[\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}]})Z^{\alpha}=Z^{\beta}K_{\beta}{}^{\alpha}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}), \tag{46}$$

Después de realizar varios calculos podemos encontrar las componentes espinoriales de esta expresión como sigue

$$K_{\alpha}{}^{\beta}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=\begin{pmatrix} K_{A}{}^{B}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}) & K_{AB'}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}) \\ K^{A'B}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}) & K^{A'}{}_{B'}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}, \tag{47}$$

donde se tienen las siguientes componentes espinoriales

$$\begin{aligned} &K_{A}{}^{B}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=it^{p}u^{q}\varepsilon_{P'Q'}\Psi_{PQA}{}^{B}, \\ &K_{AB'}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=t^{p}u^{q}(\varepsilon_{PQ}\nabla_{A}{}^{A'}\bar{\Psi}_{B'P'Q'A'}+\varepsilon_{P'Q'}\nabla^{B}{}_{B'}\Psi_{APQB}), \\ &K^{A'B}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=0, \\ &K^{A'}{}_{B'}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=-it^{p}u^{q}\varepsilon_{PQ}\Psi_{P'Q'}{}^{A'}{}_{B'}. \end{aligned} \tag{48}$$

la dependencia del twistor

$$K_{\alpha}{}^{\beta},$$

en los dos campos vectoriales es bilinear. Así que una cantidad

$$K_{pq\alpha}{}^{\beta},$$

independiente de $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{u}$ puede definirse por la identidad

$$K_{\alpha}{}^{\beta}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})\equiv t^{p}u^{q}K_{pq\alpha}{}^{\beta}.$$

Un razonamiento similar para el operador

$$\nabla_{\boldsymbol{t}},$$

sucede, pues el operador es lineal sobre el campo vectorial $\boldsymbol{t}$, así un operador diferencial

$$\nabla_{p},$$

puede serdefinido sobre los twistores donde

$$i(\nabla_{p}\nabla_{q}-\nabla_{q}\nabla_{p})Z^{\alpha}=K_{pq\beta}{}^{\alpha}Z^{\beta}.$$

Podemos así construir más derivadas de orden alto de estas curvaturas

$$\nabla_{p}\cdots\nabla_{r}K_{st\alpha}{}^{\beta}.$$

Aquí conviene hacer una pausa para mostrar cual es el tensor de curvatura de Riemann

$$R_{abc}{}^{d},$$

y como se descompone en términos espinorales, la descomposición espinorial que se demuestra en el volumen 1 de la misma serie, es la siguiente

$$R_{AA'BB'CC'DD'}=R_{abcd}.$$

Luego, como este tensor es antisimétrico en *ab*, se muestra que se puede descomponer como

$$R_{abcd}=\frac{1}{2}R_{AX'B}{}^{X'}{}_{cd}\varepsilon_{A'B'}+\frac{1}{2}R_{XA'}{}^{X}{}_{B'cd}\varepsilon_{AB}.$$

Invocando ahora, la antisimetría en *cd* del mismo tensor, podemos entonces realizar la siguiente descomposición espinorial

$$\begin{aligned} &R_{abcd}=X_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'}+\Phi_{ABC'D'}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{C'D'}+c.c., \\ &c.c.=\bar{\Phi}_{A'B'CD}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{C'D'}+\bar{X}_{A'B'C'D'}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}. \end{aligned}$$

Aquí *c.c.* denota el complejo conjugado de los dos primeros términos del miembro derecho de la última ecuación. Se han definido los siguientes *espinores de curvatura*

$$X_{ABCD}=\frac{1}{4}R_{AX'B}{}^{X'}{}_{CY'D}{}^{Y'}, \quad \Phi_{ABC'D'}=\frac{1}{4}R_{AX'B}{}^{X'}{}_{YC'}{}^{Y}{}_{D'}.$$

que tienen las siguientes propiedades de simetría

$$X_{ABCD}=X_{(AB)(CD)}, \quad \Phi_{ABC'D'}=\Phi_{(AB)(C'D')}.$$

donde los paréntesis indican cuales grupos de índices espinoriales son simétricos.

También se nos muestra, que introduciendo en este formalismo el siguiente escalar

$$\Lambda\equiv\frac{1}{6}X_{AB}{}^{AB}, \tag{49}$$

se puede demostrar la ecuación

$$X_{ABC}{}^{B}=3\Lambda\varepsilon_{AB}. \tag{50}$$

y la identidad

$$X_{ABCD}=X_{(ABCD)}+\frac{1}{3}\varepsilon_{BD}X_{AEC}{}^{E}+\frac{1}{3}\varepsilon_{BC}X_{AED}{}^{E}. \tag{51}$$

de donde

$$X_{ABCD}=\Psi_{ABCD}+\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}+\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}), \tag{52}$$

Aquí se define la cantidad espinorial que aparece en el twistor de curvatura en el sistema de ecuaciones (45).

$$\Psi_{ABCD}\equiv X_{(ABCD)}=X_{A(BCD)}. \tag{53}$$

Esta cantidad juega un papel muy importante en la teoría y se conoce como el *espinor gravitacional*. Este espinor representa los grados de libertad locales del campo gravitacional libre. Físicamente es la parte de la curvatura

$$R_{abcd},$$

del espacio-tiempo que sobrevive en ausencia de materia y cuando no hay constante cosmológica, la cual podemos convenientemente introducir, siguiendo el volumen 1 como

$$\lambda=\frac{1}{6}\Lambda. \tag{54}$$

Aquí conviene recordar que las ecuaciones de Einstein en el vacío se escriben (en ausencia de constante cosmológica)

$$R_{ab}=0. \tag{55}$$

Esto equivale a tener

$$\Phi_{ab}=\Phi_{ABA'B'}=0, \quad \Lambda=0. \tag{56}$$

Y cuando se toma en cuenta la constante cosmológica se escriben

$$R_{ab}=\lambda g_{ab}. \tag{57}$$

que es equivalente a tener

$$\Phi_{ab}=\Phi_{ABA'B'}=0, \quad \Lambda=\frac{1}{6}\lambda. \tag{58}$$

En el caso general, cuando se tienen fuentes y se toma en cuenta una constante cosmológica diferente de cero tenemos que las ecuaciones de Einstein se escriben

$$G_{ab}+\lambda g_{ab}=-8\pi\gamma T_{ab}. \tag{59}$$

Donde se emplea el llamado tensor de Einstein que a su vez utiliza las dos dualidades del tensor de Riemann

$$G_{ab}\equiv{}^{*}R^{*}{}_{acb}{}^{c}. \tag{60}$$

la dualidad en los dos primeros índices ac, se indica con el asterisco a la izquierda de *R*, y la dualidad sobre los dos restantes y últimos índices (cuando son covariantes ambos)

se indica con el asrterisco a la derecha de *R*. Así tenemos las siguientes definiciones de dualidad para el tensor de Riemann

$$R^*_{abcd} = \frac{1}{2} e_{cd}{}^{pq} R_{abpq} = iR_{AA'BB'CD'DC'},$$

$$^*R_{abcd} = \frac{1}{2} e_{cd}{}^{pq} R_{abpq} = iR_{AB'BA'CC'DD'}, \quad (61)$$

$$^*R^*_{abcd} = \frac{1}{4} e_{ab}{}^{rs} e_{cd}{}^{pq} R_{rspq} = -R_{AB'BA'CD'DC'}.$$

En la ecuación (57) la T_{ab} denota el tensor de momento-energía, o mejor conocido como el tensor de la materia, y gamma γ es una constante. El espinor gravitacional se pueden usar para clasificar los tipos de soluciones a las ecuaciones de Einstein [7].

Si el lector nos ha seguido (con la atención debida), en esta muy breve revisión del trabajo de Penrose y Rindler, se habrá percatado que la aportación de los twistores a la tería de la Relatividad General es muy extensoa, y valiosa; y de hecho, es un material muy recomendado para cualquier especialista en la Relatividad de Einstein que quiera mejorar sus conocimientos, o que los quiera ahondar con el conocimiento de los formalismos espinorial y twistorial, además del conocimiento tradicional tensorial, que las escuelas que enseñan Física Teórica, suelen ver en los cursos de formación de sus estudiantes. Siendo así, entonces que el trabajo de Penrose y Rindler nos dota de una fuente invaluable de conocimiento, en los tratamientos clásicos de campo de gravedad, y posiblemente también juege en un futuro, un papel importante como fundamento, para las teorías que intentan describir el aspecto cuántico de esta interesante fuerza natural que es la gravedad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de esta breve revisión de libro quieren manifestar su agradecimiento por el apoyo otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y por el Instituto Politécnico Nacional y su organismo interno la COFAA, (ambas instituciones de México), en la realización del presente escrito.

REFERENCIAS

[1] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and space-time, Volume 1, two-spinor calculus and relativistic fields*, (Cambridge Monographs on Matematical Physics, Gran Bretaña, Reimpresión de 1992, editores generales: P. V. Landshoff, W. H. McCrea, D. W. Sciama, S. Weinberg).

[2] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and space-time, Volume 2, spinor and twistor methods in space-time geometry*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Gran Bretaña, en el Athenaeum Press Ltd, New Castle upon Tyne. Primera publicación 1984. Reimpreso con correcciones en pasta blanda en 1988. Biblioteca del Congreso, número de tarjeta en el catálogo catalogue 82-19861, ISBN 0 521 25267 9 pasta dura, ISBN 0 521 34786 6 pasta blanda).

[3] Cartan, E., *The theory of Spinors*. (Dover Books on Mathematics, USA, 1981).

[4] Petrov, A. Z., *Einstein Spaces*. (Pergamon, USA, Primera edición 1969).

[5] Plebański R., J. F., *Spinors, Tetrads and Forms, Volume 1*. (Manuscrito original de la Biblioteca del Departamento de Física del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, s/f).

[6] Rindler, W., *What are Spinors?* American Journal of Physics 34, 937-942 (1966), referencia en línea: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1966AmJPh..34..937R>, consultado el 6 de enero de 2018.

[7] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., Herlt, E., Exact Solutions to Einstein's Field Equations, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapure, Sao Paulo, 2003).