

# El jerk, su explicación más allá de la derivada de la aceleración sustentada en una práctica de laboratorio



**J.E. García-Farieta<sup>1,3</sup>, A. Hurtado Márquez<sup>2,3</sup>, Mateo Mancera<sup>2</sup>, Daniel Hernández<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Carrera 45 No. 26 – 85, Bogotá, Colombia.*

<sup>2</sup>*Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, Carrera 3 No.26 A-40, Bogotá, Colombia.*

<sup>3</sup>*Grupo de investigación en física e informática FISINFOR*

**E-mail:** joegarciafa@unal.unal.edu.co

(Recibido el 3 de abril de 2019, aceptado el 20 de mayo de 2019)

## Resumen

Los conceptos y modelos de la cinemática que se abordan en los primeros cursos de física universitaria, son fundamentales como cimientos para explicar un sinnúmero de fenómenos en física clásica. En particular la descripción del movimiento de cuerpos, sin considerar sus causas, se desarrolla tradicionalmente en términos de las variables de posición, velocidad y aceleración. Esta última, pese a ser una función del tiempo, usualmente se asume como nula o como constante. En este sentido, una descripción consistente y general de la cinemática, debe tener en cuenta que la aceleración también puede variar en función del tiempo, y que existen fenómenos cuya cinemática puede ser más compleja. La cantidad asociada al cambio de aceleración en función del tiempo, denominada *jerk*, se omite usualmente en los textos introductorios de física y también en la praxis docente. En esta dirección, se diseñó una práctica de laboratorio en la cual la aceleración puede ser variable, y que evidencia la necesidad de extender las ecuaciones cinemáticas en un orden más de complejidad. Esta práctica resulta ser de utilidad en cuanto contribuye a romper los esquemas tradicionales y sistemáticos que se presentan en diversos textos introductorios de física. A su vez contribuye a promover la creación de prácticas de laboratorio avanzadas sin necesidad de herramientas matemáticas más elaboradas de las que se abordan durante los primeros cursos de licenciatura en física.

**Palabras clave:** Enseñanza de la cinemática, física experimental, concepto de jerk

## Abstract

The concepts and models of kinematics approached in the first courses of university physics, are fundamental as foundations to explain a number of phenomena in classical physics. In particular, the description of bodies in motion, without considering their causes, is traditionally developed in terms of the variables of position, velocity and acceleration. The latter, despite being a function of time, is usually assumed to be null or a constant. In this sense, a consistent and general description of the kinematics, must take into account that the acceleration can also vary depending on time, and that there are phenomena whose kinematics can be more complex. The quantity associated with the change of acceleration as a function of time, called “*jerk*”, is usually omitted in introductory textbooks of physics, as well as in the teaching practice. Following this idea, an experiment in which the acceleration can be variable was designed, and which results evidences the need to extend the kinematic equations into a more complex order. This experiment proven to be useful, since it contributes to breaking the traditional and systematic schemes that appear in different introductory textbooks of physics. At the same time, it contributes to promote the creation of advanced laboratory practices without the need of more elaborate mathematical tools than those introduced during the first undergraduate courses in physics.

**Keywords:** Teaching kinematics, experimental physics, concept of jerk

**PACS:** 01.30.mp, 45.20.D-, 45.50.Dd, 01.40.Fk, 01.40.gb

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La cinemática es usualmente el primer tópico que se aborda formalmente en el estudio y enseñanza de la mecánica clásica. Con el fin de describir el movimiento de los

cuerpos, sin considerar sus interacciones, es posible caracterizar y explicar físicamente un sin número de fenómenos a través de una combinación de movimientos en términos de sus variables cinemáticas. En particular, en lo que respecta al movimiento en una dimensión, los textos

*J.E. García-Farieta, A. Hurtado, M. Mancera, D. Hernández*  
 introductorios de física únicamente abordan, en sus primeros capítulos, los casos con velocidad (constante y variable) y aceleración (constante), y luego utilizan estos resultados para explicar movimientos en dos dimensiones. Sin embargo, estos textos, que incluyen autores como P. Hewitt [1], R. Serway [2], H. Young & R.A. Freedman (libro editado anteriormente por F. Sears & M. Zemansky) [3], D. Halliday & R. Resnick [4], P. Tipler & G. Mosca [5], M. Alonso & E. Finn [6], D. Giancoli [7], han sido ampliamente utilizados en muchos currículos de licenciatura alrededor del mundo, sin mencionar que aún en una dimensión es posible encontrar movimientos que no pueden ser descritos en términos de una aceleración constante. Esta situación se vuelve más compleja, cuando en las prácticas de laboratorio los experimentos de cinemática se diseñan de manera tal que “están en acuerdo” con la descripción teórica que el docente presenta en el aula, bien sea un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) o un movimiento uniformemente acelerado (MRUA).

De otra parte, es bien sabido que algunos fenómenos presentan movimientos más complejos, que no se pueden describir en términos velocidad o aceleración constantes. Estos requieren de al menos una cantidad adicional para dar una explicación aceptable, al menos desde el punto de vista fenomenológico, es decir desde los resultados experimentales sin entrar en una explicación de primeros principios. Con el fin de estudiar el movimiento de un cuerpo, donde se produce un cambio de la aceleración se requiere entonces, considerar el cambio de la misma; la cantidad asociada a este cambio se ha denominado comúnmente como *jerk*. Una posible explicación, a que el jerk haya sido olvidado en las aulas de clase, se debe a la falta de ejemplos donde se aprecie su efecto, sin embargo, en muchas de las prácticas de laboratorio que se realizan en los primeros semestres de licenciatura en física, es relevante, en especial aquellos casos donde se producen cambios de movimiento o de dirección.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, en este trabajo se desarrolla una práctica de laboratorio en donde se evidencia un cambio de aceleración y por ende las ecuaciones cinemáticas deben completarse incluyendo un término adicional debido al cambio de la aceleración en el tiempo. Sin entrar en una descripción dinámica de los cuerpos en movimiento, se ha elegido desarrollar la experiencia desde una perspectiva completamente experimental, utilizando una herramienta de análisis de vídeo, para fortalecer las habilidades experimentales de los estudiantes en cuanto al manejo de datos y análisis de gráficas.

## II. MOTIVACIÓN Y APLICACIONES

El concepto de razón de cambio es primordial en mecánica clásica, particularmente en cinemática donde todas las cantidades se refieren a la medida en la cual una variable se modifica con respecto al tiempo. De esta manera el cambio en la posición  $\vec{r}$  de un cuerpo respecto al tiempo define su velocidad  $\vec{v}$ , y a su vez el cambio de esta cantidad respecto

al tiempo define su aceleración  $\vec{a}$ . En general en los procesos de enseñanza-aprendizaje del movimiento de cuerpos, son estos tres conceptos (posición, velocidad y aceleración), los abordados en la inmensa mayoría de los programas académicos. La primera aproximación al concepto del jerk, denotado como  $\vec{j}$ , es consecuencia de una razón de cambio como se mencionó antes, y corresponde al cambio de la aceleración respecto al tiempo.

En física e ingeniería, es comprensible que el jerk es un concepto particular e importante en la explicación de fenómenos cinemáticos, que ocurren por ejemplo en los parques de diversiones. Debido a que los juegos mecánicos producen cambios bruscos en la dirección y magnitud de la trayectoria de los objetos que por allí se mueven, es evidente que el movimiento no es simple de explicar en términos convencionales de velocidad y aceleración. Además, permiten observar cambios en la aceleración y de ahí el concepto de jerk es completamente razonable. Estos y otros fenómenos pueden ser llevados a las aulas de clase a otra escala y motivar a los futuros docentes y a sus estudiantes a desarrollar prácticas experimentales y/o ayudas didácticas para explicar nuevos conceptos.

Los propósitos anteriormente descritos, generaron la motivación para diseñar una práctica experimental asequible para cualquier laboratorio de física convencional, en donde el jerk es una cantidad relevante a determinar. Con ello, se decidió modificar el experimento tradicional de la máquina de Atwood (con uno de los objetos suspendidos primordialmente de masa variable), lo que evidentemente produce una aceleración variable y por ende existe un jerk asociado. Con el objetivo de estimular el uso de tecnologías en el aula de clase, también se hizo uso de un sensor de fuerza y el software de análisis de video Tracker [8].

Este tipo de estructura didáctica para abordar de una manera distinta las prácticas experimentales [9], ha venido siendo utilizada por el grupo de física e informática, en los primeros cursos de la Licenciatura en Física de la Universidad Distrital en especial en los espacios académicos de Física Matemática Básica y Mecánica Clásica.

## III. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA

Como se mencionó anteriormente, el jerk puede ser definido como la tasa de cambio de la aceleración con respecto al tiempo. Al igual que la velocidad o la aceleración es posible definir un jerk medio  $\vec{j}_{av}$  [ver ecuación (1a)] y un jerk instantáneo  $\vec{j}$  [ver ecuación (1b)] si el intervalo de tiempo en el que ocurre el cambio en la aceleración es infinitesimalmente pequeño [10].

$$\vec{j}_{av} = \frac{\vec{a}_2 - \vec{a}_1}{t_2 - t_1}, \quad (1a)$$

$$\vec{j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{d\vec{a}}{dt}. \quad (1b)$$

De la misma manera que las demás variables cinemáticas, el jerk es una cantidad vectorial, que en términos de traslación tiene la misma dirección del cambio de aceleración y es nulo cuando la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección. Siguiendo la cadena de derivadas respecto al tiempo, de posición a velocidad, y de velocidad a aceleración, el jerk se puede expresar como la segunda derivada respecto al tiempo de la velocidad y como la tercera derivada respecto al tiempo de la posición, como se muestra en la ecuación (2).

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}. \quad (2)$$

Para fines prácticos, consideremos el movimiento de un cuerpo en una dimensión cuyo jerk es constante. De las definiciones anteriores se deduce que en este caso particular, la aceleración es una función lineal del tiempo, la velocidad una cuadrática y la posición una cúbica. El movimiento de este cuerpo estará descrito totalmente por el conjunto de ecuaciones cinemáticas (3).

$$j = \frac{a - a_0}{t} = cte \quad (3a)$$

$$a = a_0 + jt \quad (3b)$$

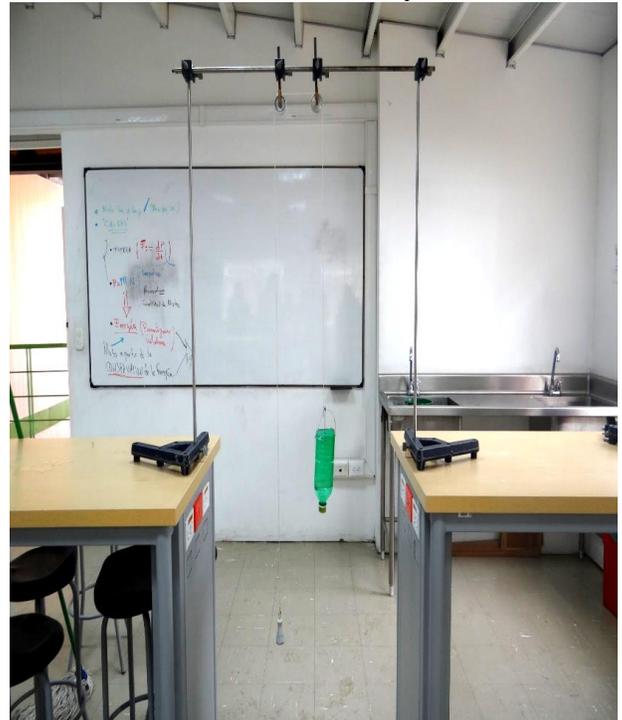
$$v = v_0 + at + \frac{1}{2} jt^2 \quad (3c)$$

$$y = y_0 + vt + \frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{6} jt^3. \quad (3d)$$

#### IV. PROPUESTA EXPERIMENTAL

En esta sección se describe el experimento diseñado que permite evidenciar un fenómeno cinemático en donde la aceleración es una función del tiempo, y por consiguiente, su tasa de cambio corresponde al jerk. Se ha optado por utilizar una versión modificada de la popular máquina de Atwood en la cual la masa de uno de los objetos que se suspende no es constante [11]. Este método garantiza una aceleración variable que puede ser medida experimentalmente, y dependiendo de las las condiciones iniciales del sistema, se puede determinar el jerk por comparación con las ecuaciones cinemáticas dadas en (3).

El montaje experimental consiste en una dos poleas de igual radio, una cuerda, dos soportes universales y dos cuerpos a suspender como se ilustra en la figura 1. Uno de los cuerpos, que es atado a un extremo de la cuerda, tiene una masa de  $(208.0 \pm 0.1)g$ , que se mantuvo constante durante el experimento. El otro objeto, cuya masa es variable, consiste en un recipiente que contiene agua y con un orificio en su parte inferior, por el cual el fluido se derrama, disminuyendo la cantidad de agua contenida en el recipiente a medida que transcurre el tiempo.



**FIGURA 1.** Diseño y montaje de la práctica de laboratorio (máquina de Atwood con uno de los objetos suspendidos de masa variable).

La primera parte del experimento consiste en determinar el flujo de agua que pasa por el agujero realizado en la botella y con ello la variación de masa del objeto colgante con respecto al tiempo. Este procedimiento se realizó indirectamente, usando un sensor de fuerza sobre el cual se ajustó un vaso para recoger el agua que salía de la botella.

Teniendo en cuenta que el peso del fluido (descontando el del vaso, ya que el cero del sensor se calibró con este), es la única fuerza externa que actúa sobre el sensor, se conoce, para cada instante de tiempo, la cantidad de masa que sale del recipiente. Los resultados correspondientes a esta parte se pueden apreciar en la figura 2, en donde se ha graficado el aumento de masa detectado por el sensor en función del tiempo. Naturalmente, al considerar el principio de conservación de la masa y la ley de acción y reacción, estos valores corresponden a su vez al cambio de masa en el objeto suspendido en la máquina de Atwood. La dispersión de datos en la figura 2, sugiere un ajuste lineal como el propuesto en la ecuación (4), en donde  $m(t)$  es la masa registrada por el sensor en el tiempo  $t$ ,  $m_0$  es la masa inicial y la pendiente de la línea  $\lambda$  [g/s] corresponde a la ganancia de masa por unidad de tiempo.

$$m(t) = m_0 + \lambda t. \quad (4)$$

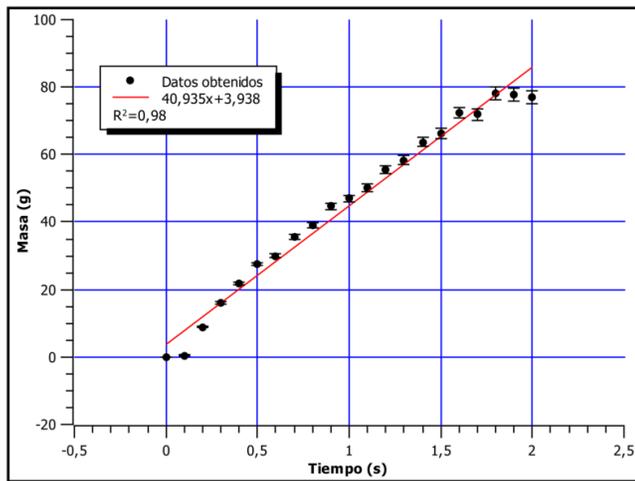


FIGURA 2. Resultados determinación tasa de cambio (masa).

En la segunda parte del experimento se plantean tres casos diferentes, dependiendo de las condiciones iniciales utilizadas en el montaje de la máquina de Atwood mostrado en la figura 1. Para cada uno de los casos se grabó un video y con el software Tracker se analizó cada uno de ellos, obteniendo información de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. En el primer caso la máquina de Atwood tiene dos masas constantes y por ende su aceleración también lo es; en los casos restantes uno de los objetos tiene masa variable, por lo que la aceleración es una función del tiempo y el jerk será constante. A continuación se detallan algunos parámetros usados en uno de los casos estudiados:

- **Caso 1:** ambos objetos tienen masas constantes  $m_1=208$  g y  $m_2=218.7$  g y no se produce jerk. Esta situación corresponde al caso trivial de aceleración constante y permite contrastar los resultados con los casos donde la aceleración es una función del tiempo.
- **Caso 2:** una masa es constante y la otra variable, siendo los valores de las masas aproximadamente iguales  $m_1 = m_2(t=0) = 208$ g. El movimiento de los cuerpos se produce siempre en una única dirección, y la tasa de cambio en  $m_2(t)$  se da a razón de  $\lambda=40.93$  g/s.
- **Caso 3:** al igual que el caso 2 una masa es constante y la otra variable, pero la masa constante  $m_1=208$  g, es ligeramente menor que la masa inicial del cuerpo variable  $m_2(t=0) = 253.8$  g. Para estos valores específicos, donde  $m_1 < m_2(t=0)$ , el cuerpo  $m_2$  descenderá hasta cierta distancia, y para el instante de tiempo  $t$  en el que esta relación se invierta, es decir cuando  $m_1 > m_2(t)$ , se produce un cambio en la dirección del movimiento. El cuerpo que inicialmente descendía empieza a subir, y viceversa. La tasa de cambio en la masa  $m_2$  es  $\lambda=40.93$  g/s.

## V. RESULTADOS

En la figura 3 se muestran los resultados del seguimiento de la trayectoria del objeto  $m_2$ , obtenidos con Tracker para cada una de las situaciones estudiadas. Del análisis de video se obtiene directamente la posición en función del tiempo, y con base en esta se calculan automáticamente las cantidades derivadas (velocidad y aceleración) para cada instante registrado en el video.

Para cada variable cinemática (posición, velocidad y aceleración) se realizó un ajuste polinómico utilizando el método de mínimos cuadrados. En la figura 3 se observa el resultado de los ajustes con los respectivos coeficientes de correlación, que muestran una concordancia superior al 99.9% en los tres casos. Este efecto también se ve reflejado en la gráfica de velocidad en función del tiempo con polinomios de un orden menor. Respecto a las curvas de aceleración, en todos los casos se ha realizado un ajuste lineal, incluso en el caso con aceleración constante, en donde la pendiente está relacionada con el valor del jerk. Hay que precisar que para el primer caso este ajuste no es completamente fiable ya que el coeficiente de determinación  $r^2$  no da razón de la correlación entre las variables estudiadas, ello puede llevar a una mala interpretación de los resultados, y es a su vez un error común entre los estudiantes que se enfrentan por primera vez a prácticas de laboratorio.

Con base en los ajustes polinómicos realizados es posible determinar el valor del jerk de al menos dos maneras: 1) comparando los coeficientes del ajuste de la posición versus el tiempo con la ecuación (3d), en donde el jerk se estima como  $j=6c$  siendo  $c$  el coeficiente del polinomio de tercer grado, o 2) empleando la definición de jerk dada en la ecuación (1b) que consiste en derivar la expresión de aceleración obtenida del ajuste con respecto al tiempo.

En la tabla 1 se muestran las ecuaciones cinemáticas, resultado de los ajustes de datos, y el respectivo valor del jerk obtenido por comparación de coeficientes, para cada caso del experimento. En particular para el caso 1, la aceleración es constante y de ahí que la magnitud del jerk sea cero. Para los casos 2 y 3, al aumentar el grado de complejidad en la cinemática de la máquina de Atwood, la ecuación de posición en función del tiempo es un polinomio de tercer grado, lo que implica que bajo ciertas condiciones es posible obtener un punto de inflexión como se había supuesto al inicio del experimento. Como resultado la aceleración no es constante, en el caso 2 el movimiento de los objetos sigue siempre la misma dirección (uno descendiendo y el otro ascendiendo) y la magnitud del jerk es constante  $j=0.954\text{m/s}^3$ ; en cuanto al caso 3, este corresponde al hecho de un objeto de masa variable, pero con condiciones iniciales de tal forma que se produce un cambio en la dirección del movimiento de los objetos, es decir que existe una distancia específica en la cual se invierte la dirección del movimiento de los cuerpos, pero que también produce un jerk constante, como en el caso 2, cuyo valor es  $j=0.696\text{m/s}^3$ .

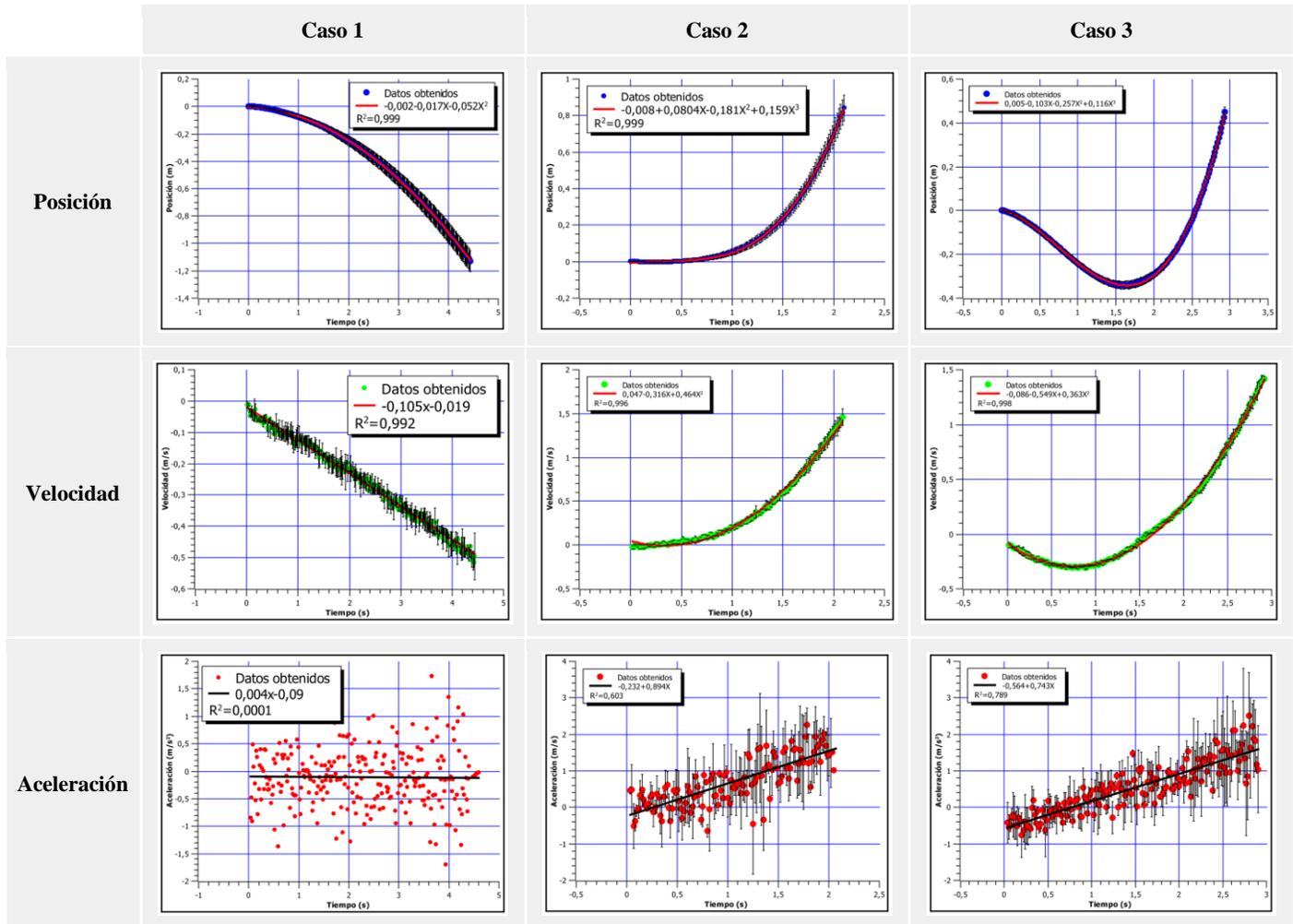


FIGURA 3. Dispersión de datos con sus respectivos ajustes polinomiales para la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

TABLA 1. Comparación de resultados obtenidos mediante análisis de video y el ajuste polinomial de las variables cinemáticas.

Caso	Ecuaciones de movimiento			jerk [ $m/s^3$ ]
1	$y = -0.002 - 0.017t - 0.052t^2$	$v = -0.019 - 0.105t$	$a = 0.1058$	$j = 0$
2	$y = -0.008 + 0.0804t - 0.181t^2 + 0.159t^3$	$v = 0.047 - 0.316t + 0.464t^2$	$a = -2.32 + 0.894t$	$j = 0.954$
3	$y = -0.005 - 0.103t - 0.257t^2 + 0.116t^3$	$v = -0.086 - 0.549t + 0.363t^2$	$a = -0.564 + 0.743t$	$j = 0.696$

Del análisis gráfico es importante mencionar que la dispersión de datos en velocidad y aceleración en función del tiempo son más ruidosas que la de posición, como se infiere directamente del tamaño de las barras de error en cada caso. Este hecho se justifica ya que son cantidades derivadas, y el error en la incertidumbre se ha propagado una vez para el cálculo de la velocidad y dos veces para el cálculo de la aceleración respectivamente. Adicionalmente

este resultado también afecta el valor del jerk, pues si se calcula con la derivada de la aceleración con respecto al tiempo se obtiene:  $j=0 \text{ m/s}^3$  para el caso 1 con un error porcentual  $\varepsilon\%=0\%$  (ya que fue el caso con el cual que calibró el experimento), respecto a los valores reportados en la tabla 1. Para el caso 2, el jerk es  $j=0.894 \text{ m/s}^3$  con  $\varepsilon\%=6.289\%$ , y para el caso 3,  $j=0.743 \text{ m/s}^3$  con  $\varepsilon\%=6.752\%$ .

## VI. CONCLUSIONES

El estudio del jerk conlleva a la ampliación de los conceptos de la cinemática formados en los cursos de física básica y aproxima a una mejor comprensión de ellos por su complejidad. Los fenómenos reales en donde tiene cabida, a pesar de no ser muy generales, enseñan como los cambios de posición en algunos fenómenos requieren una generalización de los modelos sencillos que se exponen en los textos introductorios física, sin embargo una descripción dinámica de este tipo de fenómenos puede compleja, en cuanto a refiere a considerar fuerzas dependientes del tiempo o ejercidas en sobre cuerpo en intervalos muy cortos.

La modelación de las variables cinemáticas, posición, velocidad, aceleración y el jerk han sido expresadas en función del tiempo como es habitual, sin embargo estudios más interesantes llevaran el proceso a establecer una interpretación que permita expresar dichas variables en función de la masa del objeto que cambia en el tiempo y así establecer unas relaciones desde la dinámica, pero que en este caso no eran parte del estudio a realizar.

Finalmente, un acercamiento experimental a fenómenos en donde la cinemática elemental no puede describir completamente el movimiento de un cuerpo, por ejemplo considerando el jerk o cambios en la masa de un cuerpo, constituyen una valiosa herramienta en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la física. Pues además de ofrecer una descripción más completa sobre la naturaleza de dicho fenómeno, ayudan a ejercitar las destrezas experimentales de los estudiantes en cuanto al registro, análisis de datos y análisis gráfico de las cantidades medidas. Este tipo de prácticas experimentales, junto con el uso de software de análisis de video, también incentivan la modificación de experimentos tradicionales desde una perspectiva moderna, que sin duda alguna es más acorde con las herramientas tecnológicas con las que se disponen actualmente y que tienen una intencionalidad didáctica.

## AGRADECIMIENTOS

A los integrantes del grupo de investigación en Física e Informática - Fisinform - por sus valiosas sugerencias durante el desarrollo de este trabajo. A la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas" y a la Universidad Nacional de Colombia - sede Bogotá por el apoyo a los grupos de investigación.

## REFERENCIAS

- [1] Hewitt, P. G., *Conceptual physics*, (Pearson Higher Ed., City College of San Francisco, USA, 2014).
- [2] Serway, R. A., & Jewett, J. W., *Physics for scientists and engineers with modern physics*, (Cengage learning, USA, 2018), p. 1484.
- [3] Young, H. D., Freedman, R. A., Ford, A. L., *Sears and Zemansky's university physics*, (Pearson education, USA, 2006).
- [4] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., *Fundamentals of physics*, (John Wiley & Sons, USA, 2013).
- [5] Tipler, P. A., Mosca, G., *Physics for scientists and engineers*, (Macmillan, USA, 2007).
- [6] Alonso, M., Finn, E. J., *Fundamental university physics*, (Addison-Wesley, USA, 1967).
- [7] Giancoli, D. C., *Physics: principles with applications*, (Pearson Ed., USA, 2016).
- [8] Brown, D., *Tracker video analysis and modeling tool*. Accessed Dec. 25, 2018.
- [9] Hurtado, M. A., *Física Matemática Básica*, (Editorial UD - Colección Espacios, Colombia, 2016).
- [10] Sandin, T. R., *The jerk*. *The Physics Teacher* **28**, 36-40 (1990).
- [11] Flores, J., Solovey, G., & Gil, S., *Flow of sand and a variable mass Atwood machine*, *American Journal of Physics* **71**, 715-720 (2003).