EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

La descripción espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler

Rubén Sánchez Sánchez[1], César Mora[1], José Serrano Villegas[1,2], Piero Espino Román[2]

[1]*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Unidad Legaria. Ciudad de México*
[2]*Unidad Académica de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Politécnica de Sinaloa*

E-mail: rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 10 de mayo de 2019, aceptado el 29 de mayo de 2019)

Resumen

En la obra monumental de Roger Penrose y Wolfgang Rindler se discute sobre la naturaleza del espacio-tiempo de Einstein en términos de elementos más sencillos, los cuales forman un espacio vectorial bidimensional sobre el campo de los números complejos, Élie Cartan los llamó *espinores*. Es interesante ver como las propiedades geométricas de las variedades riemannianas como las que describen el campo de gravedad pueden ser analizadas desde un punto de vista tan sencillo y fundamental, este tratamiento ya había sido estudiado en la mecánica cuántica primigenia.

Palabras clave: Relatividad, espinores, geometría, historia de la Física, espacio-tiempo

Abstract

The monumental work written by Roger Penrose and Wolfgang Rindler discusses the nature of Einstein's space-time in terms of simpler elements, which form a two-dimensional vector space on the field of complex numbers, Élie Cartan call them *spinors*. It is interesting to see how the geometric properties of the Riemannian manifolds such as those that describe a field of gravity can be analyzed from such a simple and fundamental point of view, that it had already been studied in primitive quantum mechanics.

Keywords: Relativity, spinors, geometry, history of Physics, space-time

PACS: 01.30.Ee, 01.30.-y **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En el trabajo de Roger Penrose y Wolfgang Rindler se presenta una la visión de la estructura del espacio-tiempo como un ente compuesto de elementos relativistas matemáticos, que son más elementales que el espacio o el tiempo. Penrose y Rindler nos han aportado una visión muy interesante de la naturaleza, considerando que la propiedad del momento angular intrínseco de las partículas elementales de la Física, y en particular, el espín más sencillo, o de denominación más baja y distinto de cero, (el espín del electrón), sería un componente primordial para comprender matemáticamente la mismísima estructura del espacio-tiempo [1].

II. RECORDANDO ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS PARTÍCULAS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Recapitulando desde la invención de los espinores por parte del matemático francés Élie Cartan en 1913, hasta la primera publicación de este libro en 1984, han pasado unos setenta años. En 1926 Erwin Schrödinger formula la versión ondulatoria de la mecánica cuántica, partiendo de la descripción clásica de la energía, y convirtiendo ciertas cantidades físicas en operadores diferenciales. Sin embargo, ya se sabía que a altas velocidades la descripción clásica de la energía no era la correcta. La descripción correcta estaba dada por la ecuación de Klein-Gordon, en ese mismo año.

La ecuación de Oskar Klein y Walter Gordon describía a un campo escalar libre, para velocidades cercanas a la de la luz en el vacío. Esta fue descartada, sin embargo, por Erwin Schrödinger, después de ser descubierta por él, ya que no admitía una interpretación probabilística positiva, y tenía al cuadrado de la energía en ella, lo que acarreaba otros problemas. De hecho, Oskar Klein y Walter Gordon propusieron que ella describía a electrones relativistas. Por eso, Schrödinger consideró una ecuación no-relativista.

Fue así, como inicialmente la mecánica cuántica empezó, con una descripción semi-clásica a bajas velocidades.

Después, con el tiempo, la ecuación de Klein-Gordon sería considerada como la descripción de un campo bosónico cargado de espín cero. El problema de las energías negativas y el problema de probabilidades negativas (que acarreaban los cuadrados y el cuadrado de la energía) [2], se resolvió hallando un equivalente lineal a la ecuación de Klein-Gordon que el físico P. A. M. Dirac halló más tarde a un costo matemático muy alto: Había cantidades de tipo matricial de dimensión 4x4 y cantidades de tipo vectorial de dimensión 4x1, llamadas *espinores*.

II. UN PROBLEMA MATEMÁTICO

Con las cantidades pasadas se resolvía el problema de las probabilidades negativas. En la ecuación de Dirac había otras cantidades matriciales 2x2 en forma de bloques dentro de otras cantidades matriciales 4x4. Las primeras fueron reconocidas por Dirac como las matrices de Pauli, las cuales ya se sabía que gobernaban el álgebra del espín del electrón, y que describían la simetría de los grupos de simetría de Lie SU(2).

Élie Cartan, un estudioso de las propiedades matemáticas de los grupos de Lie, halló unas cantidades 2x1 a las cuales llamó a su vez *espinores* y demostró como llegar a la ecuación de *Dirac* para cualquier grupo de simetría.

En particular un espinor 4x1 de Dirac contiene a dos espinores 2x1 de Cartan.

Este libro es básicamente un tratado matemático del análisis del espacio tiempo en términos de estas cantidades básicas llamadas espinores de Cartan. Se analiza así el grupo de rotaciones de Lorentz desde un punto de vista geométrico descomponiéndolo en sus componentes espinoriales.

Es entonces una *suerte*, según el libro, que el espacio tiempo de la relatividad especial de Einstein sea 4 dimensional, ya que este hecho permite su descomposición en cantidades complejas más básicas 2x1 llamadas espinores, y permite que las transformaciones de Lorentz sean vistas como transformaciones de rotación 2x2 en un espacio lineal 2x1 complejo. El espacio matemático no es otro que el espacio espinorial de Cartan.

II. LA CURVATURA Y LOS ESPINORES

Buscando en la literatura se pueden encontrar varias definiciones de *curvatura* de un espacio matemático o variedad. Por ejemplo, Alemañ Berenguer [3], escribió lo siguiente: “La trayectoria de un sistema de coordenadas se considera como *recta* si mantiene la misma dirección en todas sus posiciones. En cambio, la misma se tomará como *curva* si varía su dirección con la posición”.

“La curvatura de la trayectoria, así trazada, se define como el límite del cociente de la diferencia de direcciones en los dos extremos de un elemento de la trayectoria, entre la magnitud de dicho elemento. Un elemento de trayectoria se dirá *más recto* o *menos curvo* que otro si su curvatura es menor que el segundo”. Son estas propiedades geométricas las que debemos siempre preservar independientemente del tipo de variedad o espacio matemático que estemos estudiando o analizando.

Regresando a lo que asegura el libro, es una suerte que el espacio-tiempo de la relatividad especial de Einstein, sea una variedad o espacio matemático 4-dimensional, ya que este hecho, permite su descomposición en cantidades complejas más básicas 2x1, que forman un espacio lineal en el campo de los números complejos. Estas cantidades como ya se ha mencionado antes, se denominan espinores. Los espinores permiten que las transformaciones restringidas de Lorentz sean vistas como transformaciones de *rotación geométrica* 2x2 en el espacio lineal complejo 2x1. Este es el espacio que Élie Cartan describió en 1913 y que llamó *espinorial* [4].

FIGURA 1. Élie Cartan [5].

El libro nos enseña como descomponer cada 4 vector del espacio-tiempo de Minkowski de la relatividad especial y general, en el producto de dos vectores espinoriales 2x1. Uno de ellos está en un espacio espinorial complejo y el otro en un espacio espinorial complejo conjugado al primero, de tal forma que el producto de ambos da una cantidad vectorial real.

En términos de Jerzy Franciszek Plebański Rosiński [6]: el primer espinor o vector de espín esta en un espacio *celestial*, mientras su complejo conjugado está en un espacio *infernal*. Su producto directo nos forma una cantidad vectorial cuatro dimensional de carácter real, que habita el espacio *terrenal* y que se correspondería con el espacio habitual de Minkowski.

En el libro se señala una importante correspondencia entre las transformaciones de Lorentz del mundo *terrenal* y las transformaciones de espín en el mundo *celestial*.

Las transformaciones espinoriales pertenecen al grupo de Lie SU(2), como se puede deducir al revisar el contenido del libro, y se llaman matrices espín 2x2, con entradas complejas y cuyo determinante es la unidad.

Así cada transformación restringida de Lorentz (o también conocida como transformación de Poincaré) se trata como una *rotación geométrica* desde el punto de vista matemático y esta se descompone en el producto de dos matrices complejas espinoriales.

FIGURA 2. Jerzy F. Plebański Rosiński [7].

En el libro se muestra entonces, la siguiente proposición matemática:

Cada transformación de espín corresponderá a una única transformación restringida de Lorentz. Y recíprocamente, cada transformación de Lorentz restringida corresponderá a dos transformaciones de espín, una siendo la negativa de la otra.

Este importante hecho, reforzado por un teorema debido a Geroch en 1968, y citado en la página 55 de la sección 1.5, se utilizan como fundamento del desarrollo matemático de los espín-vectores que describe el libro. El teorema versa textualmente:

Si M es un espacio-tiempo no compacto, entonces una condición necesaria y suficiente para que tenga una estructura de espín es la existencia de cuatro campos vectoriales continuos en M que constituyan una tétrada de Minkowski en el espacio tangente de cada punto de M.

Este teorema pone de relieve la importancia de tener localmente un sistema de tétrada local en la variedad diferencial, que estemos utilizando como modelo de espacio-tiempo.

A partir de una tétrada nula o una tétrada tangente al cono de luz local a un punto dado de la variedad, se puede construir un sistema local base para un espacio espinorial, y el espacio espinorial complejo conjugado al primero, siendo posible de esta forma, describir las propiedades geométricas y relativistas, a partir de esta base local de espinores. En esta forma, nuestra base espinorial estará siempre construída sobre el cono de luz local al punto donde se efectué el análisis diferencial de la variedad matemática o el modelo de espacio-tiempo.

Este tratamiento, es de importancia fundamental, para la construcción de un esquema espinorial local, para todo punto del espacio-tiempo. Y esta basada en las propiedades locales de transformaciones complejas conformes, que *La descripción espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler* según Roger Penrose, describen matemáticamente a las transformaciones restringidas de Lorentz.

El lector se preguntará: ¿Y porqué razón es importante conservar localmente las transformaciones de Lorentz restringidas a través de las transformaciones conformes de la tétrada nula?

La respuesta a esta pregunta tiene que ver con una propiedad observada por Einstein que poseían las variedades de Riemann, y es que en estas variedades, las transformaciones de Lorentz se preservan de manera local, y esto no es más que el principio de que en relatividad general, las leyes de la Física de la relatividad especial, se preservan localmente. Es decir, se mantienen en una localidad del espacio, durante un intervalo de tiempo lo suficientemente corto. Y esto no es más que reafirmar el famoso Principio de Equivalencia de la relatividad general de Einstein. De hecho, y para ser justos, Einstein observó que las variedades de Riemann preservan localmente las transformaciones de Galileo. Por eso, él confío en las variedades de Riemann como modelo de espacio-tiempo para formular los postulados de su relatividad general, donde se describen los campos de gravedad, tan fielmente, como los conocemos, el día de hoy.

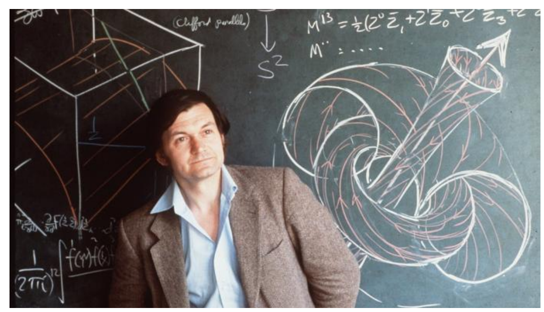

FIGURA 3. Sir Roger Penrose [8].

Además hay que tomar en cuenta el segundo postulado de la relatividad especial, que es de la invariancia de la velocidad de la luz en el vacío, para transformaciones entre marcos de referencia inerciales. Este principio hay que llevarlo de manera local, en la variedades matemáticas de Riemann. Por eso, la tétrada es nula. Es decir, en términos técnicos, se construye de manera local, para cada punto de la variedad (espacio-tiempo) y sobre el cono de luz de Einstein, que marca las trayectorias que seguirían los rayos de luz, si un observar en ese punto encendiera una linterna. O (al revés) como se menciona en el libro, si la luz desde la esfera celestial, llegara desde las estrellas del espacio, hasta el punto donde se encuentra el observador.

Para esto, el trabajo de Penrose y Rindler, nos introduce con lo que se conoce como esfera celestial y anti-celestial. Siendo la esfera anti-celestial la que se forma por los frentes de onda esféricas de luz, cuando el observador en el punto local enciende una linterna. Y siendo la esfera celestial, la esfera que se forma por la envolvente de los frentes de onda que forma la luz que viene de las estrellas que la emiten desde el exterior y convergen en el punto del espacio-tiempo, donde se encuentra nuestro observador.

Penrose y Rindler hacen una discusión detallada y clara de estos puntos que hemos mencionado aquí, junto con unos diagramas muy ilustrativos del cono de luz, para este observador local.

FIGURA 4. Wolfgang Rindler [9].

Para una referencia de los principios de la relatividad especial de Einstein y como aplicar estos principios de manera local (para cada observador, con sistema coordenado de espacio y tiempo), recomendamos ver los primeros capítulos del libro de Steven Weinberg Gravitación y Cosmología (Principios y aplicaciones de la teoría general de la relatividad) [10]. Steven Weinberg es uno de los editores del libro de Penrose y Rindler [1], y explica de una manera clara y amena, los principios de la relatividad especial y general de Einstein. Se recomienda revisar el material de los primeros tres capítulos: Parte uno, preliminares: 1. Introducción histórica, 2. Relatividad especial. Parte dos, la teoría general de la relatividad: 3. El principio de Equivalencia.

A partir del siguiente capítulo 4, del libro de Weinberg. Análisis tensorial, se tratan de revisar los fundamentos tensoriales de la teoría de la relatividad general. Este es el formalismo, que hay que entender, previo al entendimiento del formalismo espinorial. La ventaja de los espinores, es que existen relaciones matemáticas y propiedades del espacio-tiempo que se escriben de manera más sencilla de manera espinorial, pues de manera tensorial, la misma propiedad se escribe de manera más complicada. Por eso, es importante comprender ambos puntos de vista de análisis matemático, si se quiere tener una comprensión más profunda de la teoría de gravedad de Einstein.

Pasando a otro punto Penrose y Rindler, han estudiado temas tan interesantes como el formalismo de índices abstractos, la total reflexividad del espacio de los espín-vectores, el álgebra espinorial, los tensores de mundo como espinores, las banderas nulas y los vectores nulos complejos, la representación tensorial de los operadores espín, la diferenciación de espinores, entre otras cosas.

Penrose y Rindler [1], exploran tópicos muy interesantes como la diferenciación de variedades y su curvatura, y la descomposición del tensor de curvatura de Riemann en sus componentes espinoriales.

Revisan también aplicaciones a las 2-superficies, y cantidades de peso espinorial definido en los armónicos esféricos.

Estudian los campos de gravedad y electromagnéticos desde sus componentes espinoriales, el campo de Dirac, y las integrales de campo explícitas.

Una de las partes de su trabajo que llama mucho la atención, y es sin lugar a dudas muy útil, es la explicación de como se puede descomponer el tensor de curvatura de Weyl en términos de sus espinores, y también como descomponer el tensor de Maxwell en sus correspondientes partes espinoriales.

Penrose y Rindler son muy ilustrativos y explicativos en sus ejemplos de como se manejan las simetrías de los tensores de Maxwell de Weyl y de Riemann.

En su trabajo se aprecia además, lo que se conoce como notación diagramática tanto para cantidades y ecuaciones tensoriales como para cantidades y ecuaciones espinoriales.

La teoría de los espinores, nos proporciona, una referencia muy importante para comprender los principios matemáticos que hay detrás de la teoría de la Relatividad Especial y General de Einstein describiéndola en sus términos más simples y elementales, teniendo también el poder de describir y simplificar la teoría electromagnética de James Clerk Maxwell.

Aunque aquí, hemos mencionado el tratamiento clásico de la gravedad y el electromagnetismo, no sería justo restringir el análisis espinorial sólo a este tipo de entes. A decir verdad, hay creencias de que la teoría de los espinores pueda en algún momento dado, apoyar en el desarrollo teórico de la Física, y contribuir profundamente al entendimiento de una generalización de la teoría de la Relatividad Especial y General de Einstein. Estamos diciendo, en otras palabras, que los espinores, podrían usarse para formular los fundamentos de una teoría cuántica del campo gravitacional.

Por otro lado, una teoría cuántica de la gravedad es un elemento clave, en tiempos modernos, de tratar de contribuir a la gran unificación de las cuatro fuerzas fundamentales de la Física, y así poder entender mejor el origen de la materia, la energía, el espacio y el tiempo, de nuestro universo.

Lo que estamos diciendo en el párrafo pasado, es que en los problemas modernos de la Cosmología y el Modelo Estándar, existe la necesidad de explicar como en el origen del universo, y durante el Big Bang, la gravedad junto con las otras tres fuerzas de la naturaleza (interacción nuclear fuerte, interacción nuclear débil y electromagnetismo), trazaron el destino y la evolución de toda la materia y la energía de nuestro universo. O en otras palabras, habría una explicación teórica del origen del universo, si entendemos como describir cuánticamente a la gravedad. Por esta razón, si se piensa que la teoría de los espinores, puede tener un papel importante en el proceso de formular una versión cuántica de la gravedad, entonces esto sería muy importante a su vez, en la explicación de los procesos que dieron origen a nuestro universo.

AGRADECIMIENTOS

Algunos de los autores quieren expresar su agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México, por el apoyo recibido en la escritura de esta revisión de libro. Y a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), de la Ciudad de México, también, por las mismas razones.

REFERENCIAS

[1] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and spacetime, Volume 1, two-spinor calculus and relativistic fields*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Gran Bretaña, Reimpresión de 1992, editores generales: P. V. Landshoff, W. H. McCrea, D. W. Sciama, S. Weinberg).

[2] Santaolalla, J., *Date un Vlog*. *La ecuación más bella del mundo*, <https://www.youtube.com/watch?v=Lga-oupKJx4>, consultado el 12 de abril de 2019.

[3] Alemañ Berenguer, R. A., *Book Reviews: Jesper Lützen, La descripción espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler Mechanistic Images in Geometric Form. Heinrich Hertz's Principles of Mechanics*, *pp. 333, Oxford University Press*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 184-187 (2009).

[4] Cartan, E., *The theory of Spinors*. (Dover Books on Mathematics, USA, 1981).

[5] Wikipedia, *imagen de Élie Cartan*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Élie_Cartan>, consultado el 12 de abril de 2019.

[6] Plebański R., J. F., *Spinors, Tetrads and Forms*, *Volume 1*. (Manuscrito original de la Biblioteca del Departamento de Física del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, s/f).

[7] Plebański R., J. F., *En busca de la precisión*, <https://www.smf.mx/boletin/2005/Ene-05/Noticias.html>, consultado el 8 de abril de 2019.

[8] The Times, imagen de Sir R. Penrose, *Big bang pioneer hopes curiosity will kill the cat*, <https://www.thetimes.co.uk/article/big-bang- pioneer-hopes-curiosity-will-kill-the-cat-6nwxw5xth>, consultado el 8 de abril de 2019.

[9] UT Dallas Remembers Founding, imagen de Wolfgang Rindler, <https://profiles.utdallas.edu/wolfgang.rindler>, consultado el 8 de abril de 2019.

[10] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology. Principles and applications of general theory of relativity*, (John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1972).