Obteniendo las curvas características al ítem del modelo de Rasch usando *R* en un ejemplo hipotético de datos escolares

ISSN 1870-9095

Rubén Sánchez Sánchez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Unidad Legaria. Ciudad de México, México.

E-mail: rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 6 de abril de 2020, aceptado el 11 de mayo de 2020)

Resumen
En este documento, se muestra en forma simplificada la utilización del paquete de software *R*, en la ayuda del trazado de curvas ICC (Item Characteristic Curves) del modelo de Rasch dicotómico, para un conjunto de datos hipotéticos suponiendo que tenemos los datos de evaluación de un grupo de estudiantes de nivel medio superior, cuyos estudiantes aplican en un examen hipotético, de opción múltiple. El objetivo es mostrar la utilidad de estos gráficos para la evaluación de los estudiantes en relación con sus conocimientos, y obtener los parámetros de dificultad de una prueba o test aplicado.

Palabras clave: Modelo de Rasch, evaluación escolar, evaluación de tests de prueba, pruebas estadísticas.

Abstract
In this document, the use of the *R* software package is shown in simplified form, in teh aid of the plot of the Item Characteristic Curves of the dichotomous Rasch model. This is done for a hypothetical data set, assuming that we have the evaluation data of a group of bachelors students, for the assessment of their knowledge. We also obtain the difficulty parameters of the applied test.

Keywords: Rasch Model, scolar assessment, test assessment, statistical tests.

I. INTRODUCCIÓN

El modelo de Rasch es utilizada en el campo de investigación científica concerniente a la evaluación de los conocimientos de los estudiantes de ciencias. Aquí lo aplicamos a un caso hipotético para mostrar cómo se utiliza la herramienta de software *R* [1], como un instrumento de medida, en el apoyo a la investigación en el campo educativo. El artículo plantea un caso hipotético de estudio de un grupo que lleva una clase de conocimientos generales y donde el profesor quiere medir y estimar tanto la habilidad de cada estudiante como el nivel de dificultad de las preguntas del examen que aplica a su grupo. En el presente ejemplo utilizaremos el modelo dicotómico de Rasch, donde los valores de los datos toman sólo dos valores numéricos: 0 y 1.

Uno de los aspectos más importantes de este modelo, es la capacidad, de estimar el nivel de dificultad que tienen las preguntas de una prueba o test. También, es importante que predice el nivel de habilidad de los estudiantes para una prueba o test dado, y lo hace de forma independiente al cálculo del nivel de dificultad de las preguntas de la prueba o test. Este es uno de los aspectos más atractivos que tiene el modelo de Rasch, y se puede utilizar hasta para tener un criterio de validación de una prueba o test.

En el siguiente apartado discutiremos brevemente algunos de los detalles de la historia de la derivación del modelo de Rasch, y posteriormente analizaremos la forma en cómo utilizar un paquete de software, que facilita los cálculos para encontrar los parámetros de dificultad de una prueba o test, y como pueden utilizarse estos datos para calcular las curvas características al ítem, o en inglés las *Item Characteristic Curves* (ICC) del modelo de Rasch.

II. ALGUNOS ASPECTOS GENERALES ACERCA DEL ORIGEN DEL MODELO DE RASCH

El modelo de Rasch surgió en su forma final entre 1960 y 1961 [2], como fruto del trabajo del matemático y geómetra danés Georg Rasch.

Georg Rasch nació en 1901 en Funen, Dinamarca, estudió matemáticas en 1919 en la Universidad de Copenage, se graduó de Maestro en Ciencias en 1925 y siguió el trabajo matemático de Norlund. Trabajó también en las ecuaciones de Lagrange de 1925 a 1934.

Su disertación doctoral la presentó en 1930, y fue sobre un tema de la aplicación del cálculo de matrices en las ecuaciones diferenciales, y de diferencias. Rasch trabajó con los profesores Rubin y Tranekjaer Rasmussen, poco después de la Segunda Guerra Mundial. Lo que sucedió fue que el Grupo de Psicología Militar pidió una prueba de inteligencia a estos profesores, La prueba se usaría con reclutas para las Fuerzas Armadas. La prueba se llamó IGP por sus siglas en inglés *Intelligence Group Test*, o *Prueba de grupo de inteligencia*. Rasch apoyó a estos profesores en los cálculos estadísticos necesarios en 1947, lo cual, constituyó el primer análisis que hacía Rasch de una prueba de inteligencia.

Posteriormente Rasch realizó otro trabajo acerca del análisis de niños con dificultad para leer en 1952. Aquí según Rasch, se desarrolló un método para estimar las capacidades de cada sujeto, en forma independiente, del test de lectura que se les aplicara a los niños. Lo cual nos muestra, indicios de desarrollo su posterior modelo matemático, que él obtuvo entre 1960 y 1961.

III. ALGUNAS EXPRESIONES MATEMÁTICAS PARA EL MODELO DE RASCH

Rasch aplicó una prueba para estimar la inteligencia humana, alrededor de los años 1952 a 1953, en el Grupo de Psicología Militar fundada en 1952 por el Mayor Poul Borking. En su trabajo publicado en 1960, se encuentra una de las primeras expresiones matemáticas que tiene su modelo [2].

$$p(a_{vi}) = e^{-\lambda_{vi}} \frac{\lambda_{vi}^{a_{vi}}}{a_{vi}!}. \tag{1}$$

Aunque el descubrimiento de su modelo dicotómico es anterior, y se ubica entre los años 1952 y 1958. El descubrimiento, tuvo que ver con este trabajo de 1952 y el análisis del test de lectura, aparte del estudio de las propiedades multiplicativas del modelo de Poisson. Se sabe también, que Rasch, tuvo una conversación acerca de las características teóricas de su modelo con el profesor Ragnar. Actualmente, el modelo de Rasch dicotómico puede escribirse según la siguiente expresión [2].

$$P(X_{vi} = h) = \frac{exp(\phi_h\theta_i + \psi_h\delta_i + \chi_h\theta_v\delta_i + \omega_h)}{\sum_{k=0}^{m} exp(\phi_k\theta_i + \psi_k\delta_i + \chi_k\theta_v\delta_i + \omega_k)}. \tag{2}$$

Aunque nosotros vamos a emplear una versión simplificada y más sencilla, de esta expresión matemática, en las siguientes secciones. Según Baker y Kim [3], la Curva Característica al Ítem para una pregunta determinada del test está dada según la siguiente expresión sencilla, mostrada en la ecuación (3).

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-a(\theta-\delta)}}. \tag{3}$$

O bien:

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-L}}. \tag{4}$$

Donde:

$L = a\ (\theta - \delta)$,
δ es el parámetro de dificultad de la pregunta o ítem,
a es el parámetro de discriminación del ítem,
θ es el parámetro de habilidad del estudiante,
e es el número de Napier, igual a unos 2.71828,
P es la probabilidad de que un estudiante responda correctamente a la pregunta o ítem del test o prueba.

En las siguientes secciones, utilizaremos ésta última expresión para obtener las ICC, del modelo de Rasch-

II. RECURSOS DE SOFTWARE

Con el objeto de llevar a cabo las curvas ICC del modelo de Rasch podemos utilizar una herramienta de software libre. La herramienta se llama *R* [4] y fue desarrollada en Auckland, Nueva Zelanda, por Ross Ihaka y Robert Gentleman, en el año de 1996. R es un lenguaje de programación y un instrumento que se puede utilizar para realizar análisis de datos. En nuestro ejemplo, utilizaremos un paquete de *R* llamado *ltm*, por sus siglas en inglés *latent trait model*.

Al utilizar unos simples comandos, el software es capaz de calcular los parámetros de dificultad del test, y con estos valores, puede realizar las gráficas ICC.

IV. DISPOSICIÓN Y MANEJO DE LOS DATOS

La disposición de los datos es en forma de tabla de dos dimensiones, las columnas representan las preguntas (o ítems) del test, y los renglones se asignan a cada uno de los estudiantes del grupo.

Supongamos en nuestro ejemplo un grupo de unos 30 estudiantes, que contestan un test (o prueba) de 5 preguntas. Tendremos datos de tipo dicotómico, que se caracteriza por tener dos valores, y dependiendo de si el estudiante contesta bien o mal la pregunta se coloca un 1 o un 0, en la tabla de datos recolectados.

También vamos a suponer que los resultados fueron recolectados por el profesor y están dados por la tabla I.

TABLA I. Respuestas de los estudiantes a una prueba hipotética, para evaluar sus conocimientos generales, la columna E representa a cada estudiante del grupo identificado por su número. Las columnas P1, …, P5, corresponden a cada una de las cinco preguntas de la prueba hipotética.

E	P1	P2	P3	P4	P5
1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	1	0
3	0	1	0	0	0
4	1	0	1	1	0
5	0	1	0	1	1
6	0	0	1	0	0

7	1	1	0	1	1
8	1	0	0	1	0
9	0	1	1	0	0
10	1	1	0	0	0
11	1	0	0	1	0
12	0	1	1	0	0
13	0	0	1	1	0
14	0	0	0	1	1
15	0	1	1	1	1
16	0	1	1	0	1
17	1	1	0	1	0
18	0	1	0	0	0
19	0	1	0	0	0
20	1	1	0	0	0
21	0	0	1	0	0
22	1	0	0	0	1
23	0	1	0	0	1
24	1	0	0	1	1
25	0	1	0	0	1
26	1	0	1	1	0
27	0	1	1	0	0
28	0	0	1	1	0
29	0	1	0	1	0
30	1	0	0	0	1

Para ingresar los datos de la tabla I en *R*, se puede usar una estructura de datos de vector columna de *R* [5,6,7], con la función “c”, como se muestra a continuación.

>P1 <- c (0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,
0,0,0,1)
>P2 <- c (1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,1,0,1,0,
1,0,1,0)
>P3 <- c (0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,
1,1,0,0)
>P4 <- c (1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,1,
0,1,1,0)
>P5 <- c (0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,
0,0,0,1)

Estos cinco vectores representan las respuestas de los treinta estudiantes, a las cinco preguntas del test.

Se necesita construir lo que en *R* se conoce como un *data frame*, para construir la tabla I, dentro de *R*. Para ello se utiliza la siguiente función “data.frame()”, de la librería base de *R* [8].

> x<-base::data.frame(P1,P2,P3,P4,P5)

La orden además guarda el “data frame” dentro de la variable “x”, para no perderla y luego referirla posteriormente.

En la siguiente sección trataremos de la instalación, de una de las librerías de *R*, que están orientadas a realizar análisis de datos según el modelo de Rasch, en particular el paquete nos permite calcular los parámetros de dificultad de la prueba y se llama *latent trait model* o *ltm*.

V. INSTALACIÓN DEL PAQUETE LTM

Para poder calcular los parámetros de dificultad, según el modelo de Rasch, y utilizando como software auxiliar el paquete *ltm*, dentro de *R*. primero es necesario la instalación de este paquete de software. Para ello seguimos un procedimiento usual cargando dentro de *R* el paquete, al usar la orden “install.packages()”

> install.packages(“ltm”)

R abrirá una ventana emergente, pidiendo el país de donde se bajará el software. Conviene elegir en este paso un servidor que este ubicado geográficamente cerca de donde se esté corriendo *R*. Después de un tiempo, *R* muestra donde instaló el software en el computador, y regresa la línea de comando de su interfaz.

VI. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE DIFICULTAD PARA LOS DATOS DEL EJEMPLO

Después se carga la librería *ltm* en la sesión de *R* con la función “library()”

> library(ltm)

Posteriormente se llama a la función “rasch()” [3], con los datos de la tabla I.

> pd<-rasch(x, constraint=cbind(ncol(x)+1,1))

El resultado de los parámetros de dificultad se guarda en la variable “pd”. Una llamada a esta variable nos puede demostrar como ésta, está representada dentro de *R*. Es decir, *R* nos despliega su estructura interna de datos siguiente.

```
> pd
Call:
rasch(data = x, constraint = cbind(ncol(x) + 1, 1))

Coefficients:
Dffclt.P1    Dffclt.P2    Dffclt.P3    Dffclt.P4    Dffclt.P5
Dscrmn
   0.384     -2.664      0.792     -0.388      0.384      1.000

Log.Lik: -37.879
```

Lo cual nos muestra, los parámetros de dificultas de cada pregunta, y donde hemos supuesto que el parámetro de discriminación al ítem es igual a la unidad, y se ha agregado en el segundo argumento de la función “cbind()” de *R*, como se muestra en la subexpresión

cbind(ncol(x)+1, 1)

la cual construye una matriz de "ncol(x)+1" columnas, donde la última columna representa el parámetro de discriminación δ mostrada en la ecuación (3) y su valor es "1". La función "ncol()" nos da el número de columnas de la matriz dentro de la estructura de datos "x", donde *R* tiene guardados los datos, representados por la tabla I.

VII. Gráficas ICC

Finalmente, podemos obtener las curvas ICC del modelo de Rasch con la siguiente orden (usando la función "plot()" de R) y diciéndole que queremos unas gráficas de tipo ICC.

La figura 1, muestra este tipo de gráficas, para el conjunto de datos de la tabla I.

Las ICC muestran la probabilidad de que un estudiante del grupo responda correctamente a cada una de las preguntas (P1, P2, P3, P4, P5) del test proporcionado. Vemos que, a mayor habilidad del estudiante, hay una mayor probabilidad de que la pregunta sea contestada correctamente. De esta forma, el software, nos da una ayuda de cómo podemos valorar las preguntas del test, y considerar, si el test tiene un grado de dificultad aceptable, y si es adecuado, para los estudiantes del curso hipotético de mecánica clásica.

El término ICC [9], proviene de la teoría IRT (Item Response Theory), que, a su vez, se empezó a identificar por los años de entre 1930 y 1950. Las curvas ICC son uno de los componentes principales de la IRT, y se puede atribuir a Ledyard Tucker quien lo usó por el año de 1946.

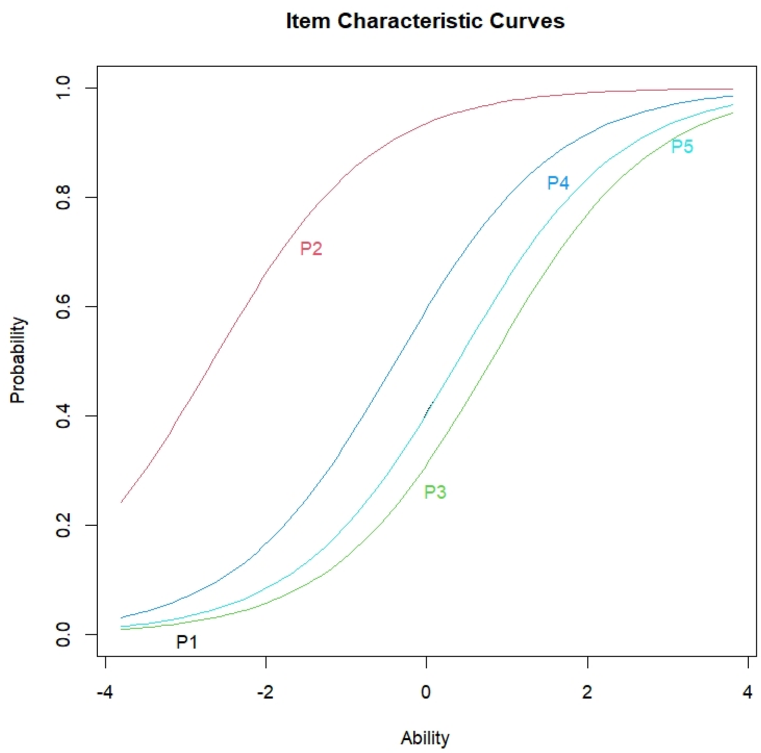

FIGURA 1. Las ICC o curvas características al ítem, correspondientes a cada pregunta de la prueba hipotética, de acuerdo con el modelo de Rasch, se muestran, en esta figura.

La orden en *R* para obtener las gráficas, mostradas en la figura 1, es la siguiente

```
> plot(pd, type="ICC")
```

Las gráficas, de ejemplo de la figura 1, muestra la idea conceptual del modelo de Rasch, donde cada nivel de dificultad de cada una de las preguntas de la prueba o test, está representado por un parámetro de dificultad "delta", que se encuentra en un sistema de unidades llamado de "logits", por estar dentro de una escala logarítmica.

Si nos fijamos, por ejemplo, en la curva marcada como P4, se muestra una curva ascendente hacia la unidad, y representa la probabilidad de que un estudiante del grupo conteste a la pregunta No. 4 de la prueba o test, en forma correcta. Esta curva en particular, es la representación gráfica de la función mostrada por la ecuación (3), con un valor del parámetro de dificultad igual a 0.384, como lo reporta R, después de la llamada a la función "rasch()" del paquete o librería *ltm*, del lenguaje de programación *R*.

De esta forma, el modelo de Rasch, proporciona una herramienta, que puede ser utilizada en el área de la investigación en educación. Y esto sólo es uno de los muchos recursos [10], con que se pueden contar, dentro del modelo del análisis estadístico de Rasch.

VII. CONCLUSIONES

El modelo de Rasch, fue desarrollado entre los años 1952 y 1961, por el autor del mismo nombre, con el objeto de realizar análisis estadístico de datos psicométricos para los aspirantes a reclutas de una Institución Militar en Países Bajos. Actualmente, se utiliza el Modelo de Rasch y sus desarrollos estadísticos posteriores en la evaluación y validación del test o pruebas que sirven para evaluar los conocimientos generales de los estudiantes.

En este trabajo, se ha mostrado como se puede utilizar el software gratuito *R*, junto con su paquete *ltm*, para poder encontrar el nivel de dificultad de los ítems de la prueba, así como realizar la gráfica correspondiente ICC, del modelo de Rasch, dentro de la Teoría de Respuesta al Ítem [9, 10] o IRT (por sus siglas en inglés *Item Response Theory*). Las curvas ICC representan la probabilidad de que un estudiante, pueda responder correctamente a cierta pregunta de la prueba o test aplicado, en función de la habilidad del estudiante.

AGRADECIMIENTOS

El autor quiere expresar su agradecimiento al Instituto Politécnico Nacional, a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) del mismo Instituto y al proyecto SIP número 20200435 "Aplicación de una metodología activa de aprendizaje para la enseñanza de circuitos eléctricos" de la Secretaría de Investigación y Posgrado, de éste mismo Instituto.

También quiere expresar su agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México, por el apoyo recibido en la realización del presente trabajo.

REFERENCIAS

[1] CRAN, *The R Project for Statistical Computing*, <https://www.r-project.org>, consultado el 15 de enero de 2020.

[2] Andersen E. B., Olsen, L. W., *The Life of Georg Rasch as a Mathematician and as a Statistician*, en Boosma, A., van Duijn, M. A. J., Snijders, T. A. B. (Eds.), *Essays on Item Response Theory "Lecture Notes in Statistics 157"*, (Springer-Verlag, Países Bajos, 2001).

[3] Baker, F. B., Kim, S. H., *Capítulo 2, Item Characteristic Curves*, en The Basics of Item Response Theory Using R "Statistics for Social and Behavioral Sciences", (Springer, Suiza, 2017).

[4] Leo-Revilla, A., *Breve historia de R*, <https://momentotic.com/2013/08/07/breve-historia-de-r/>, consultado el 15 de enero de 2020.

[5] Kronthaler, F., Zollner, S., *Data Analysis with RStudio "An Easygoing Introduction"*, (Springer Spektrum, Alemania, 2021).

[6] Matloff, N., *The Art of R Programming "A Tour of Statistical Software Design"*, (No Starch Press, San Francisco, USA, 2011).

[7] Davis, T. M., *Book of R "A First Course in Programming and Statistics"*, (No Starch Press, San Francisco, USA, 2016).

[8] Gentleman, R., Hornik, K., Parmigiani, G., *Chapter 2, Reading and Transforming Data Format* en Behavioral Research Data Analysis with R, Use R!, (Springer, NewYork, Dordrecht, Heidelberg, London, 2012).

[9] De Boeck, P., Wilson, M. (Eds.), *Explanatory Item Response Models*, (Springer Science+Business Media, LLC, New York, USA, 2004).

[10] Hambleton, R. K., Swaminathan, H., en *Item Response Theory "Principles and Applications"*, editado por Madaus G. F., Stufflebeam, D. L. (Springer Science+Business Media, LLC, USA, 1991), p. xv.