

# Laboratorio virtual de cinemática e dinâmica nos tempos de pandemia



Bogos Nubar Sismanoglu<sup>1</sup>, Eduardo Cezar Barbosa de Barros Aragão<sup>2</sup>,  
Yudji Dieterich Uno Hoyer<sup>1\*</sup>, Bogos Bedik Sismanoglu<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Física, Laboratório de Mecânica,  
Laboratório de Óptica e Espectroscopia, São José dos Campos, São Paulo.

<sup>2</sup>SENAI CIMATEC, Salvador, Bahia.

<sup>3</sup>Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Virtual.

ISSN 1870-9095

E-mail: bogos@ita.br

\*in memoriam Y.D.U.Hoyer

(Recibido el 16 de febrero de 2021, aceptado el 26 de mayo de 2021)

## Resumo

Nesta era de pandemia, iniciada em 2020 com a propagação da COVID 19 no mundo todo, é imperativo que elaborem planos emergenciais de procedimentos didáticos facilitadores para a continuidade das aulas de laboratório nas instituições de nível superior, para cursos de engenharia e física, principalmente e também para cursos de exatas afins. O corpo discente, composto por grupos de alunos que participam de um processo didático em comum, como é o caso das aulas de laboratório, agora obrigatoriamente deverá estar separado, localizados individualmente em suas residências, salvaguardando a si próprios e à sua família da temível doença e, portanto, o ensino virtual deverá ser implementado a fim de dar prosseguimento à continuidade do processo ensino-aprendizagem. Uma ferramenta muito útil é o vídeo e a utilização do smartphone como coadjuvantes fundamentais para este processo, aliados à utilização da internet, que consegue unir os estudantes, mesmo que localizados em pontos distantes entre si. Neste trabalho utilizamos estas tecnologias de fácil acesso e disponibilizamos vídeos curtos no YouTube, com acesso gratuito, para que o aluno e seu grupo de estudos consiga visualizar o experimento proposto e, através da ferramenta gratuita GoogleClassroom, por exemplo, consiga interagir com seus pares e com o professor e a instituição de ensino a qual pertencem. O professor deverá portanto disponibilizar vídeos curtos no YouTube dos experimentos propostos por ele e deverá fornecer material didático através do portal Classroom, e os alunos em suas residências deverão, usando apenas o vídeo, obter todas as informações importantes do fenômeno a ser estudado. A montagem e a filmagem do experimento deverá ocorrer no ambiente do laboratório da instituição de ensino e a filmagem deverá proporcionar a visualização completa do fenômeno ou das partes e situações específicas para a realização dos procedimentos experimentais que levem à compreensão e solução do problema experimental. Neste trabalho em específico, a física utilizada será de uma maneira geral explicada e o aluno deverá saber apenas conceitos do ensino médio para realizar o experimento. Portanto, alunos de nível médio também poderão acompanhar o experimento. Aconselha-se a todos os alunos fazerem individualmente o experimento para que aprendam a usar a teoria de erros num experimento de física onde a interpretação e o modelo científico devem ser bem compreendidos. Também, os alunos poderão comparar seus resultados, haja vista que a falta de experiência em medições leva a erros sistemáticos (erros grosseiros) bastante significativos. Observa-se que costumemente 15% dos estudantes em laboratório cometem erros grosseiros e num trabalho virtual, este resultado é maior.

**Palavras chave:** Aulas virtuais. Experimentos, Teoria de erros, Física.

## Abstract

In this era of pandemic, initiated in 2020 with the spread of COVID 19 worldwide, it is imperative that we develop emergency plans for didactic procedures that facilitate the continuation of laboratory classes in higher education institutions, for engineering and physics courses, mainly and also for related courses. The students, composed of groups of persons who participate in a common didactic process, as is the case with laboratory classes, must now be separated, located individually in their homes, safeguarding themselves and their family from the fearful disease and, therefore, virtual teaching should be implemented in order to continue the continuity of the teaching-learning process. A very useful tool is the video and the use of the smartphone as fundamental assistants to this process, together with the use of the internet, which manages to unite students, even if located in distant points between them. In this work we use these easily accessible technologies and make short videos available on YouTube, with free access, so that the student and his study group can view the proposed experiment and, through the free tool GoogleClassroom, for example, be able to interact with their peers and with both the teacher and the educational institution to which they belong. The teacher must therefore make short videos available on YouTube of the experiments proposed by him and must provide didactic material through the Classroom portal, and the students in their homes must, using only the video, obtain all the important information of the phenomenon to be studied. The assembly and filming of the experiment must take place in the laboratory environment of the educational institution and the filming must provide a complete visualization of the phenomenon or of the specific parts and situations for carrying out the experimental procedures that lead to the understanding and solution of the experimental problem. In this specific work, the physics used will be explained in a general way and the student should know only basic concepts to carry out the experiment. Therefore, high school students will also be able to follow the experiment. All students are advised to do the experiment individually so that they learn to use the theory of errors in a physics experiment where the interpretation and the scientific model must be well understood. Also, students will be able to compare their results, since the lack of experience in measurements leads to systematic errors (gross errors) quite significant. It is observed that usually 15% of students in the laboratory make gross mistakes and in a virtual job, this result is higher.

**Keywords:** Virtual class. Experiments, Error theory, Physics.

## I. INTRODUÇÃO

Nas duas últimas décadas a implementação de modelos de aulas virtuais acelerou-se exponencialmente, principalmente devido ao avanço nas áreas tecnológicas e na aceleração da difusão da internet com velocidades cada vez maiores. A facilidade e o barateamento de dispositivos móveis como os smartphones e a possibilidade de armazenamento de arquivos contendo filmes levou a uma expansão na utilização de técnicas de filmagens para serem utilizadas no ensino de física e ciências afins, principalmente nas aulas de laboratório [1, 2]. No Brasil e em toda a América Latina é sabido que nas escolas de nível médio e em várias universidades, a deficiência de laboratórios didáticos dificulta muito a aprendizagem do corpo discente. Isto ocorre principalmente por causa dos altos custos dos equipamentos experimentais e do pouco interesse político na área educacional, que leva ao sucateamento de muitos laboratórios didáticos, que precisam constantemente serem renovados ao longo dos tempos. Além disso, a pandemia de COVID 19, que se iniciou em 2020 e se espalhou pelo mundo todo, afastou de vez o aluno do laboratório didático, porque seria impossível o convívio neste ambiente de muita interação sem que houvesse a propagação do vírus entre os estudantes e professores. Uma boa possibilidade vislumbrada seria a implementação dos experimentos nos laboratórios didáticos pelos próprios professores e a filmagem destes experimentos para distribuição via online para os alunos poderem trabalhar o assunto abordado.

Deste modo, o professor se dirige ao laboratório, tomando os cuidados protocolares para a não propagação da COVID-19, faz a montagem dos experimentos e, através de um smartphone, filma os experimentos ou partes destes para posterior compartilhamento via internet. A ferramenta gratuita GoogleClassrom ou Google Sala de Aula [3], pode ser usada para disponibilizar aos alunos fotos e arquivos de textos ou até vídeos, para que o aluno possa trabalhar virtualmente o assunto abordado pelo professor. Uma vez que o smartphone está difundido globalmente a todas as classes sociais, uma ferramenta muito utilizada para a distribuição de vídeos contendo assuntos relacionados ao ensino é o YouTube [4], que possibilita a qualquer um que se cadastre a distribuição de vídeos, desde que siga as normas, políticas e regulamentos do detentor da marca.

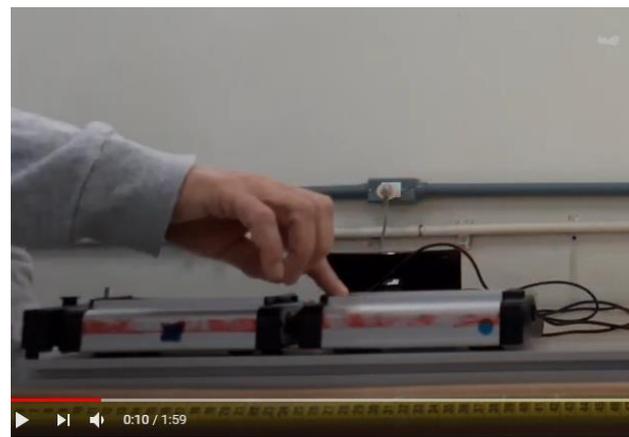
Assim, o professor facilmente filma o que deseja no laboratório e disponibiliza no YouTube, permitindo a seus alunos ou a qualquer interessado a visualização e o estudo do conteúdo distribuído. Geralmente no estudo da cinemática e da dinâmica do movimento de um corpo é necessário empregar o processo de medição, seja de tempo ou de distâncias, além de outros e, portanto, é interessante filmar o objeto em movimento onde há um sistema métrico que indique a localização do móvel ao longo do tempo. É claro que num sistema de aprendizagem onde todos os alunos possuem softwares para medir distâncias e tempos, como o Tracker [5], sistema de análise de vídeo e ferramenta de modelamento de trajetórias, basta obter o vídeo e o computador faz todo o trabalho. Porém, como a grande maioria dos estudantes não detém com facilidade esta

tecnologia, um sistema mais simples e mais didático deverá e poderá ser adotado. Também, antes de usar estas ferramentas que modelam as trajetórias, o aluno precisa descobrir analiticamente as nuances do movimento, seja através de gráficos ou medições feitas sem o uso destas ferramentas, para que assimile conhecimentos importantes da física do movimento e da teoria de erros nas medições manuais. No estudo da teoria de erros e suas propagações, é fundamental o aluno poder estimar incertezas e desenvolver os processos matemáticos para obter o resultado final de uma medição com a devida incerteza final. Neste trabalho nós elaboramos um experimento complexo de mecânica, de simples montagem mas com aprofundamento teórico extenso, que aborda desde a propagação da incerteza para obtenção de resultados até a aplicação de Leis de conservação [7, 8]. Deste modo, o aluno não utilizará ferramentas como tracker para obter resultados automaticamente e sim, deverá trabalhar com o vídeo para estimar incertezas associadas ao movimento de um objeto.

Este trabalho trata do movimento de dois carrinhos de mesma massa, mesmo comprimento, atados por uma associação em paralelo de 3 molas elásticas idênticas (mola equivalente, que doravante chamaremos apenas de mola), e postos a se movimentar, a princípio num trilho sem atrito, horizontalmente, numa trajetória unidimensional (Fig. 1).

Logo, a teoria sobre o “problema de dois corpos” poderá ser empregada.

Na situação deste problema, os dois carrinhos unidos pela mola equivalente formam um sistema dinâmico cujo centro de massa estará localizado exatamente no ponto médio entre eles, ou seja, na metade da mola, já que a massa dos carrinhos é igual. Além da energia elástica da mola, há um campo magnético repulsivo entre as faces de contato dos dois



**FIGURA 1.** O instante em que o operador libera o sistema a se movimentar.

carrinhos, pois o sistema magnético oferecido pelos ímãs afixados nos carrinhos geram uma energia magnética armazenada que tende a afastar os dois quando estes estão próximos.

Vários movimentos distintos poderão ser empregados ao conjunto carrinho-mola-carrinho, e estes poderão ser observados no vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=gakZrT3nWg0>

disponibilizado no youtube. Através da filmagem digital, os móveis poderão ser localizados espacialmente no tempo através da análise quadro a quadro do movimento. Se numa dada situação a mola for comprimida ou distendida, produzindo deformações elásticas, estes movimentos também poderão ser vistos nos quadros da filmagem. A mola elástica obedece à lei da deformação de Hooke. O período de oscilação de uma mola posta a oscilar está relacionado com a constante elástica da mola e com a massa deformadora acoplada à mola.

A filmadora está fixa numa dada posição. O centro de massa do sistema possuirá velocidade média constante. Isto ocorre porque tem-se um movimento retilíneo e uniforme de um sistema constituído de corpos vinculados entre si por molas e forças magnéticas, isento de força externa resultante e, apesar de haver forças internas não nulas, apenas o centro de massa possuirá velocidade vetorial constante. O centro de massa do sistema sempre estará localizado no ponto médio central da mola, que é o ponto médio central do próprio sistema.

Este experimento deve ser realizado virtualmente através da observação do vídeo exposto no youtube. O vídeo não deve ser baixado no computador e nenhuma ferramenta tecnológica poderá ser usada para analisá-la, sem ser aquelas aqui explicitadas. Observamos que não foram usados sensores para determinação exata dos instantes nem equipamentos como o Tracker para a obtenção de dados precisos de posição, pois o que se quer é que ocorram o máximo possível de incertezas nestas medições a fim de poder aplicar manualmente a teoria de propagação de erros.

Quando efetuamos uma medição estamos sujeitos a diversas formas de erros, dentre os quais podemos citar: erros grosseiros, aleatórios, acidentais, sistemáticos, inserção ou paralaxe. Este último é causado por falha humana na operação do instrumento, ou interpretação errônea nos resultados obtidos. Assim, o aluno encontrará obrigatoriamente erros de paralaxe no vídeo, erros nas medições de distâncias e com relação a obtenção de dados de tempo; o aluno deverá usar seu próprio celular, com precisão de centésimos de segundos. O tempo inicial de cada movimento será definido quando o aluno acionar o vídeo e ao mesmo tempo o cronômetro. O tempo final acarretará um erro do operador, que deverá ser estimado. O operador tem um erro associado ao tempo de reação próprio do operador, que deverá ser levado em conta nos cálculos. O erro do operador poderá ser estimado de acordo com o procedimento mostrado em

<https://www.youtube.com/watch?v=hxjVS9f5KL0>.

## II. MATERIAIS E MÉTODOS E EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NESTE EXPERIMENTO

Neste experimento objetiva-se verificar, além de outros tantos, as leis da conservação do momento linear e da energia mecânica, através da observação do movimento unidimensional de um sistema massa-mola-massa no plano horizontal. Considera-se, a princípio, que as forças dissipativas podem ser desconsideradas para a determinação

teórica de velocidades e energias. A propagação de incertezas também é tema deste experimento e, portanto, elas devem ser rigidamente observadas e determinadas em cada processo.

Neste experimento utilizaram-se (Fig. 2):

- 1- 2 carrinhos de massas idênticas, modelo Pasco [6], de massa  $m = (500,00 \pm 1,50)$  g. O comprimento dos carros pode ser inferido (Fig 2), com sua devida incerteza proveniente do aparelho de medição (régua milimetrada), erro de paralaxe e outros;
- 2- trilho linear com régua acoplada;
- 3- filmadora digital (celular Samsung Galaxy A10 com Open Câmera);
- 4- mola elástica, cuja constante elástica pode ser determinada;
- 5- e adotaremos  $g = (9,78 \pm 0,05)$  m/s<sup>2</sup>.

As incertezas nas massas foram obtidas no laboratório de mecânica com uma balança digital e para um conjunto de 5 carros aleatoriamente escolhidos.

## III. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Antes de tomar dados como posição e tempo através dos quadros das filmagens, ou seja, de fazer o experimento, devemos inicialmente detalhar o experimento e deduzir teoricamente, através das leis da física, relações matemáticas desta situação-problema. Em seguida, iremos verificar experimentalmente, através do experimento virtual, estas relações encontradas. Portanto, é de fundamental importância compreender o problema proposto e aplicar corretamente as leis da física envolvidas, para que se possa validar estas leis através da experimentação realizada e detalhada pelo laboratório virtual.

### A. Lei da conservação da energia mecânica e do momento linear

No vídeo pode-se ver como o sistema carrinho-mola-carrinho é posto em movimento no trilho (<https://www.youtube.com/watch?v=gakZrT3nWg0>). Nele, há várias repetições do mesmo movimento para melhor estimativa das incertezas. Os carrinhos são idênticos, possuindo mesma massa e comprimento. A mola possui aproximadamente 5cm e é atarraxada nas extremidades dos carrinhos, unindo-as firmemente. Encosta-se então um dos carrinhos num apoio não imantado, na extremidade inicial do trilho, aproxima-se o outro carrinho deste, comprimindo-se a mola de uma distância  $d = (4,0 \pm 0,5)$  cm. A Fig. 1 foi obtida do vídeo mencionado e mostra o exato momento em que o operador libera o sistema a se movimentar, o que doravante chamaremos de "estouro". O "dedo" indicador do operador sustentava esta posição através de uma pequena pressão. Esta é a situação inicial onde o sistema está em repouso. Pode-se determinar a exata posição em que o operador tira o dedo, através da observação das imagens quadro a quadro no vídeo (basta pausar o vídeo e arrastar o cursor, bolinha vermelha na Fig. 3). (Atenção: o centro de massa CM que podemos acompanhar visualmente está praticamente no ponto médio entre os carrinhos. CM deverá ter velocidade constante. Com

o conhecimento do comprimento do carrinho na Fig. 2, obtemos então a posição inicial do CM, com sua devida incerteza. O erro de paralaxe correspondente na Fig. 1 ou no vídeo deve ser levado em consideração).



**FIGURA 2.** Imagens do carrinho, da régua para medição e dos ímãs cilíndricos. Os ímãs cilíndricos são encaixados na parte frontal dos carros.

Este movimento ocorre porque enquanto a mola retorna ao seu comprimento inicial, expandindo-se, ela aplica forças de mesma intensidade nos dois carrinhos: no da frente, a força é dirigida para frente e no de trás, a força é oposta, comprimindo-o contra o apoio do trilho. Observando-se em detalhes o movimento do conjunto quadro a quadro, nota-se

que durante todo o movimento, este comportamento se repete: um carro se move para a frente somente enquanto o outro está praticamente parado. Dificilmente se identifica este movimento sem a visualização quadro a quadro obtida pela filmagem. Contudo, o centro de massa, que se localiza no elo central da mola, permanece em movimento retilíneo e uniforme.

Quando o operador solta o dedo, o carrinho da frente começa a se movimentar, enquanto o de trás permanece parado. Apenas alguns quadros depois se observa o início do movimento deste carrinho. Nos vídeos, pode-se congelar a imagem (stop) e com o mouse avançar lentamente para ver o quadro que se deseja (Fig. 3). Ao medir tempos, usamos sempre o cronômetro do celular e não o do vídeo, pois este não apresenta frações de segundo.

Além da força elástica, também existe a força magnética repulsiva, ou seja, se encostarmos os carrinhos sem a mola, eles também se repelem e se afastam. Logo, há forças internas magnéticas e elásticas no sistema.

A Fig. 1 mostra a situação inicial onde o operador segura o sistema comprimindo a mola de uma distância  $d = (4,0 \pm 0,5)$  cm e a Fig. 4 mostra o carro da frente atingindo a sua velocidade máxima (observe que o carro de trás continua em repouso nesse instante).

Deveremos observar estas situações e obter as medições a partir do vídeo e não das figuras elencadas



**FIGURA 3.** Operando o cursor de tempo no vídeo manualmente com o vídeo pausado.

(<https://www.youtube.com/watch?v=gakZrT3nWg0>). Nesta situação apresentada, antes do início do movimento a mola de constante elástica  $k$  que une os carrinhos de massas iguais a  $m$  foi deformada de um comprimento  $d$ .

Abandonando-se o sistema, o carrinho da frente começa a se movimentar. Neste momento inicial do experimento o aluno deverá deduzir uma equação que forneça a velocidade máxima do carrinho da frente,  $v_{m\acute{a}x}$ , usando a lei da conservação da energia mecânica. A princípio, desconsidera-

se qualquer tipo de atrito e dissipação de energia. Devemos lembrar que além da energia elástica repulsora inicial,  $E_{el} = kd^2/2$ , há também a energia magnética armazenada repulsora,  $E_{mag}$ , e para a qual a princípio desconhecemos uma equação que a represente ou como a energia magnética se comporta ao longo de  $d$ . A energia magnética armazenada será por nós definida como sendo a energia envolvida nesta situação atual, quando o carrinho da frente é colocado bem próximo do outro carrinho, e utiliza-se dessa energia para se afastar aceleradamente, além da energia elástica. Esta energia será considerada como sendo o produto energético máximo  $P$  dos 4 ímãs, que será definido depois.

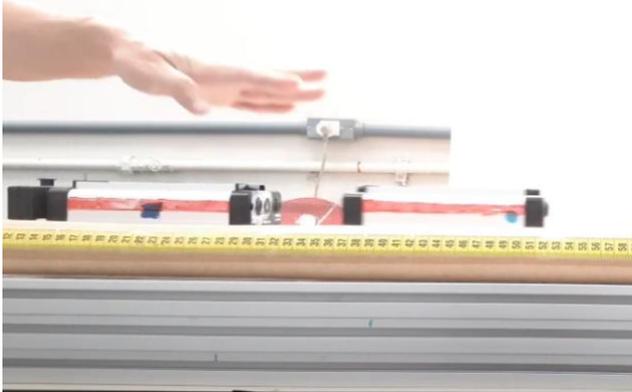


FIGURA 4. Velocidade máxima do carro frontal após o "estouro".

## B. Dedução da velocidade média do sistema ou velocidade do centro de massa

Antes de tudo devemos analisar o filme do movimento em <https://www.youtube.com/watch?v=gakZrT3nWg0>.

Aplicando-se a lei da conservação do momento linear, deve-se mostrar que esta velocidade máxima é igual ao dobro da velocidade do centro de massa do sistema,  $v_{cm}$ :

$$v_{máx} = 2v_{cm}. \quad (1)$$

Deve-se obter analiticamente a expressão da Eq. 1. Devemos lembrar que as forças internas não contribuem com esta dedução e que a velocidade do centro de massa é constante, pois a resultante das forças externas foi considerada nula.

## C. Obtenção experimental da constante elástica da mola, $K$

A constante elástica da mola,  $k$ , pode ser relacionada com o período  $T$  de oscilação desta mola,  $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$ , onde  $m$  é a massa do corpo que oscila. Observa-se que no final do movimento, o carro da frente fica preso magneticamente no suporte final do trilho, enquanto que o carro de trás oscila harmonicamente com a frequência  $f = 1/T$ . Portanto, facilmente se consegue obter o valor da constante  $k$  da mola. Primeiro, precisamos obter então o período do movimento.

## C.1 Período do movimento oscilatório da mola

Sabemos que um período completo contempla o movimento de ida e volta, a partir da posição inicial de repouso instantâneo. Por exemplo, num pêndulo simples, o período deste é obtido quando você abandona a massa suspensa a partir de uma certa inclinação, a partir de seu repouso, e mede o tempo total até que a massa retorne a este mesmo ponto inicial. No caso da mola, esta posição inicial Obtem-se parando a imagem do vídeo e movimentando a imagem congelada lentamente ate o ponto desejado usando o cursor. No vídeo repetimos o experimento várias vezes.

Escolhemos então 5 movimentos distintos do sistema de carros que ofereçam melhor visualização das 5 oscilações, ou seja, 5 oscilações para cada movimento. Usamos 5 oscilações pois o movimento oscilatório da mola, no final do percurso, é muito rápido e, por ser periódico, diminui o erro no resultado final. Usamos o smartphone para acionar a contagem do tempo enquanto contamos cinco movimentos periódicos completos ao observar o vídeo. Paramos a contagem do tempo exatamente no quinto período, quando o carro volta ao ponto inicial. O período para cada movimento observado será então obtido dividindo-se o tempo total  $\Delta t$  das 5 oscilações por 5:

$$T_i = \frac{\Delta t}{5}.$$

Uma vez obtidos os 5 valores para os  $T_i$ , obtemos a média  $\bar{T}$  através de

$$\bar{T} = \frac{\sum_i T_i}{n},$$

onde  $\sum_i T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ ;  $n$  é o número de medições, sendo  $n = 5$ . A Eq. 2 apresenta o resultado final para o período com a devida incerteza final:

$$T = \bar{T} \pm \sigma_T. \quad (2)$$

A incerteza resultante, final,  $\sigma_T$  no período deverá ser obtida de acordo com a explicação dada a seguir. Nestes vídeos o período medio encontrado foi de 0,56s.

### C1.a Cálculo das incertezas

A incerteza do cronômetro, de 0,01s, poderemos desconsiderar. Deve-se levar em conta no cálculo da incerteza final na Eq. 2,  $\sigma_T$ , a incerteza estatística (incerteza aleatória)  $\bar{\sigma}_{est}$  obtida nas cinco medições distintas e a incerteza do operador (incerteza sistemática)  $\sigma_{op\ tempo}$ , onde, segundo a teoria de propagação de erros

$$\sigma_T = \sqrt{\bar{\sigma}_{est}^2 + \sigma_{op\ tempo}^2}. \quad (3)$$

A Eq. 3 advém do fato de que todas as incertezas  $\sigma_i$ ,  $i$  variando de 1 a  $m$ , sendo  $m$  o número de incertezas do seu experimento, estão relacionadas com suas respectivas curvas gaussianas de distribuição com determinadas dispersão e

largura à meia altura do máximo e, portanto, a convolução de todas as gaussianas resulta numa gaussianas final cuja incerteza é dada por  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots}$ .

A incerteza estatística  $\bar{\sigma}_{est}$ , devida às cinco determinações, deverá ser calculada através da relação que fornece o “desvio padrão da média” das determinações:

$$\bar{\sigma}_{est} = 2,57 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n=5} (\bar{T} - T_i)^2}{n(n-1)}} \quad (4)$$

para um nível de confiança de 95%. Na Eq. 4,  $n = 5$  e  $\bar{T}$  é a média aritmética das 5 determinações encontradas (o coeficiente 2,57 é o fator de abrangência e este é obtido a partir da distribuição t-Student, uma [distribuição](#) de probabilidade estatística indicado para  $n = 5$ . Ele aparece para corrigir o resultado como se fossem realizadas infinitas medições experimentais. Muitos desconsideram isso, mas para ser mais preciso poderemos usá-lo aqui. Estes coeficientes são tabelados).

### C1.b Incerteza do operador ao acionar o cronômetro do celular

A incerteza do operador no acionamento do cronômetro do celular deverá ser obtida de acordo com o vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=hxjVS9f5KL0>, para 5 tomadas de valores experimentais também, conforme foi dito antes.

O tempo de queda da régua neste vídeo é dado por  $t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ .

Portanto, deveremos soltar a régua 5 vezes e medir a altura de queda para cada queda distinta.

Adotando  $g = (9,78 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$ , medido no laboratório, podemos obter o tempo de queda. Devemos usar a propagação de incertezas associada à equação acima para o tempo de queda. O valor médio da altura  $H$  será

$$\bar{H} = \frac{\sum_{i=1}^5 H_i}{5}$$

Para cada altura medida  $H_i$  haverá uma incerteza associada,  $\sigma_{op_H}$  (este valor é único para o operador e para todas as quedas) pois o dedo do operador que segura a régua possui uma certa largura. Esta incerteza deverá ser estimada pelo operador, situando-se na faixa de 0,50cm aproximadamente. Desconsidere a incerteza da régua milimetrada usada. O desvio estatístico para estas 5 medições na altura será

$$\bar{\sigma}_{est_H} = 2,57 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n=5} (\bar{H} - H_i)^2}{n(n-1)}}$$

Portanto, pela Eq. 3, a incerteza final na altura será dada por

$$\sigma_H = \sqrt{\bar{\sigma}_{est_H}^2 + \sigma_{op_H}^2}$$

Assim, a altura média com a devida incerteza será

$$H = \bar{H} \pm \sigma_H$$

Finalmente, o tempo de queda pode ser expresso por

$$t_q = \sqrt{\frac{2(\bar{H} \pm \sigma_H)}{g \pm \sigma_g}}$$

A teoria da propagação de incertezas mostra que a incerteza no tempo de queda, a partir desta equação, será obtida através de

$$\sigma_{t_q} = \sqrt{\left(\frac{\partial t_q}{\partial H}\right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{\partial t_q}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2}$$

Deveremos executar estes cálculos de derivadas parciais e obter finalmente:

$$\sigma_{t_q} = \sqrt{\frac{2\bar{H}}{g} \left[ \left(\frac{\sigma_H}{2\bar{H}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{2g}\right)^2 \right]}$$

Deste modo, usaremos este resultado do tempo de queda na Eq. 3 como  $\sigma_{op\_tempo}$ . Atenção: ao medirmos o período  $T$  de oscilação de uma mola, por exemplo, obtendo  $T$  para 5 oscilações consecutivas, então a incerteza deverá ser dada por

$$\sigma_T = \sqrt{\bar{\sigma}_{est}^2 + \sigma_{op\_tempo}^2} = \sqrt{\bar{\sigma}_{est}^2 + \left(\frac{t_q \pm \sigma_{t_q}}{5}\right)^2}$$

onde a incerteza do operador deverá ser o tempo de queda dividido por 5.

De maneira geral, para uma dada função  $F = kx^n y^m$ , a incerteza em  $F$  será dada por:

$$\sigma_F = k\bar{x}^n \bar{y}^m \sqrt{\left(\frac{n\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{m\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2} \quad (4.a)$$

onde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são os valores médios de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Usamos também o resultado da Eq. 2 para obter a frequência da oscilação,  $f = 1/T$ , com a sua incerteza. Para obter a incerteza na frequência, observamos que

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{T} \rightarrow df = -\frac{1}{T^2} dt \therefore \sigma_f = \frac{1}{T^2} \sigma_T \rightarrow \\ \rightarrow f = \frac{1}{\bar{T}} \pm \frac{1}{\bar{T}^2} \sigma_T = \bar{f} \pm \sigma_f \end{aligned}$$

Finalizando esta parte, escrevemos a equação para a constante elástica  $k$ :

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

e calculamos o valor para  $k$  com sua incerteza. Já temos os valores de  $m$  e de  $T$ , sendo este obtido experimentalmente, com as devidas incertezas. Utilizamos sempre o sistema internacional de unidades. Para determinar a incerteza em  $k$  utilizamos o procedimento anterior. Utilizamos a Eq. 4.a para obter a incerteza em  $k$ . Observamos que  $k$  é função de  $m$  e  $T$ . É importante comparar os resultados com os resultados obtidos por outros estudantes, pois quando não se tem experiência em medições e também pela dificuldade gerada pela não presencialidade do laboratório, além das dificuldades nas aplicações algébricas, geralmente ocorrem erros grosseiros que irão influir no resultado final do experimento.

#### D. Velocidade média do sistema carro - (mola + campo magnético) – carro

A velocidade média será a velocidade constante do CM do conjunto. O CM está localizado no elo central da mola. Basta então escolher um instante inicial e final e calcular:

$$v_{cm} = \frac{\langle \Delta s \rangle \pm \sigma_{\Delta s}}{\langle \Delta t \rangle \pm \sigma_{\Delta t}} \quad (5)$$

Devemos escolher uma posição inicial e final no vídeo (devemos tomar cuidado com o erro de paralaxe na leitura da posição; para ajudar, o comprimento conhecido do carro, na ordem de 16cm, de acordo com a Fig. 2, ajuda nisso, principalmente na hora de medir a posição inicial do CM no "estouro"); lemos na régua estas posições com as devidas incertezas sistemáticas, que são (pode haver outros tipos de erros, pois o operador é quem decide sobre eles):

a) incerteza de paralaxe,  $\sigma_p$ ;

b) incerteza do instrumento,  $\sigma_i$ ;

A incerteza do instrumento (régua mm no vídeo) pode ser desconsiderada aqui pois o erro de paralaxe é bem superior a ela, e pela Eq. 3, ela se torna irrelevante no cálculo da incerteza final de cada medição. A incerteza na medição do tempo já foi estimada, conforme visto anteriormente.

Para cada tomada de dados, calculamos a velocidade média com a devida incerteza e no final obtemos a média dessas velocidades médias. Se mediu-se, por exemplo:  $s_1 = a \pm \sigma_{p_1}$  (vemos que é bem próximo de 16cm) e a posição final (escolhemos uma posição bem próxima do final do movimento uniforme, antes do carro colidir no final do trilho)  $s_2 = b \pm \sigma_{p_2}$ , então o deslocamento do carro (ou distância percorrida), será:

$$\Delta s = (s_2 - s_1) = (b - a) \pm \sqrt{\sigma_{p_2}^2 + \sigma_{p_1}^2}.$$

Procedemos igualmente para as outras 4 tomadas de dados.

Obtemos a média final e o respectivo desvio padrão final conforme instruções anteriores. As derivadas parciais na Eq. 5 são mais fáceis agora ou então usamos a Eq. 4a. O erro de paralaxe é causado pelo ângulo sólido entre a lente da câmera e os extremos do trilho. Ele deve apenas ser estimado pelo operador, não precisa ser obtido através de cálculos. Nos vídeos, este erro é com certeza bem superior a 1mm, e por isso a incerteza do instrumento (régua) será desconsiderada (Erro de paralaxe é um erro que ocorre pela observação errada na escala de graduação gerada por um desvio óptico causado pelo ângulo de visão do observador).

#### E. Determinação da "energia magnética armazenada" antes da "explosão"

Como dissemos antes, a Fig. 1 mostra a situação inicial onde o operador "segura" o sistema comprimindo a mola de uma distância  $d = (4,0 \pm 0,5)$  cm e a Fig. 4 mostra o carro da frente atingindo a sua velocidade máxima (observa-se que o carro de trás continua em repouso nesse instante). Logo, além da

energia elástica repulsora, há também a energia magnética repulsora, e ambas atuarão na aceleração do carro da frente.

A energia elástica pode ser agora calculada dinamicamente, pois já temos o  $k$  da mola; para inferir sobre a energia magnética, fizemos outra montagem dos carrinhos, mas agora sem a mola, e abandonamos o carro da frente, conforme fizemos anteriormente. O vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=RZJG2nZ1hNE> mostra isso.

Portanto, usando a conservação da energia mecânica, podemos obter a energia magnética armazenada (quando a aproximação dos carros é máxima), através da velocidade uniforme que o carrinho adquire na seqüência, ou seja, do ganho de energia cinética. Usa-se neste caso apenas a incerteza de paralaxe no cálculo da velocidade uniforme, pois há apenas um vídeo desta situação. Para a obtenção da velocidade uniforme do carrinho, procedemos como anteriormente. Aqui também utilizamos a propagação de incertezas, se elas ocorrerem, conforme modelos mencionados anteriormente. Expressamos o resultado em unidades internacionais e com a devida incerteza.

#### F. Uso da conservação da energia mecânica para a determinação da velocidade do centro de massa do sistema

Na seção III d obtivemos a velocidade do centro de massa,  $v_{cm}$  através da cinemática do movimento. Agora iremos obtê-la através da conservação da energia mecânica do sistema. Este é o propósito de um experimento de física: obter sempre resultados de um mesmo fenômeno físico através de várias metodologias empregadas, a fim de comprová-las. Usamos a situação inicial vista em III a e escrevemos:

$$E_{elástica_{máxima}} + E_{magnética_{armazenada}} = E_{cinética_{máxima}}.$$

Lembramos que nesta etapa nós já temos, com as devidas incertezas, o  $k$  da mola, a massa do carro, a distância de deformação da mola, a energia magnética armazenada, e a velocidade máxima do carro da frente, que se relaciona com a velocidade do centro de massa do sistema como  $v_{máx} = 2v_{cm}$ .

Devemos tomar cuidado nos cálculos das propagações das incertezas nas operações algébricas. Objetiva-se explique a ocorrência de possíveis diferenças entre os resultados encontrados nos dois métodos empregados e verificar qual deles gerou mais erro. Devemos então verificar a incerteza relativa dos resultados (incerteza relativa, adimensional, de um resultado se obtém assim:  $\sigma_x/x$ ) e ver qual delas é superior.

#### G. Decaimento" da energia magnética em função da distância de afastamento dos carrinhos

O vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=RZJG2nZ1hNE> e outros 5 complementares

<https://www.youtube.com/watch?v=RcjLAcyUg6E>  
<https://www.youtube.com/watch?v=aaVHIDSu0y8>  
<https://www.youtube.com/watch?v=HhYr0yYI9BU>  
<https://www.youtube.com/watch?v=yEnOBHQ2wM0>  
<https://www.youtube.com/watch?v=0LpBJDSNjcl>

mostram claramente que a energia magnética no sistema de ímãs diminui até atingir o valor mais baixo a alguns centímetros no afastamento dos carros. Verifica-se que comumente este decaimento obedece um ramo da curva gaussiana. Consideramos aqui que a energia magnética armazenada corresponde ao máximo valor da energia magnética, igual à energia fornecida ao carrinho na sua aceleração inicial, quando os carros estão praticamente encostados. Na frente de cada carro, e grudados nestes, estão inseridos dois ímãs fortes de neodímio, cilíndricos e pequenos (Fig. 2). Através destes vídeos, podemos fazer um gráfico onde o eixo dos y representa a energia magnética no ponto considerado e o eixo das abscissas representa a distância entre os móveis. Observa-se que a mola foi retirada e não está presente agora. Para facilitar nos cálculos das incertezas, usamos a incerteza relativa que se obteve da determinação da energia magnética armazenada para usar como parâmetro da incerteza da medição em todas as outras 5 determinações.

## H. Estimativa do campo de indução magnética resultante B

Quanto ao valor da energia magnética armazenada em um ímã cilíndrico (na frente de cada carro há dois ímãs, Fig. 2) com comprimento  $L$  e diâmetro  $D$ , podemos calculá-lo, de maneira aproximada, a partir do valor da indução magnética  $B$  no centro da face do ímã. O valor da indução magnética no centro da face é cerca da metade do valor dentro do ímã e, pelo lado de fora, a indução magnética rapidamente diminui conforme aumenta a distância ao centro da face.

Podemos fazer uma estimativa da energia magnética armazenada no ímã em função de suas dimensões e do valor da indução magnética no centro da face, medidos no SI, como

$$E_{mag} = kD^2LB^2, \quad (6)$$

onde  $D$  é o diâmetro do ímã cilíndrico,  $L$  é seu comprimento e  $B$  é a indução magnética.

Sobre a intensidade magnética dos ímãs, ela pode ser medida pelo seu produto energético máximo,  $P$ , em megagauss-oersteds (MGOe) ( $1 \text{ MGOe} = 7,957 \text{ kJ/m}^3$ ). Um ímã com produto energético de 48 MGOe tem um campo magnético remanescente de 1,38T (teslas, unidade de campo magnético, sendo que  $1\text{T} = 10^4 \text{ Gauss}$ ). O campo magnético da Terra, por exemplo, é na média de apenas 0,55 Gauss.

Assim, podemos obter também neste experimento:

1. No total há 4 ímãs idênticos e cilíndricos, 2 em cada carro, de dimensões  $D$  e  $L$  que você deverá obter da Fig 2; podemos calcular o produto energético máximo do sistema composto pelos ímãs e a indução magnética,  $B$ , na superfície frontal de cada ímã. Numa razoável aproximação, usamos o valor em joules que obtivemos para a energia magnética armazenada e substituímos na Eq. 6 para obter  $B$ .

2. Fazendo uma analogia com o decaimento gaussiano de  $B$ , generalizado para ímãs cilíndricos, do decaimento da indução magnética  $B$  à frente do ímã, podemos estimar e obter através de uma maneira bastante aproximada a indução magnética à frente do carrinho, variando com a distância de afastamento, usando os resultados até agora obtidos.

3. Através do uso do smartphone e do app magnetic field detector [9], determinamos facilmente o valor da intensidade da indução magnética  $B$  na frente do carrinho, para várias posições à frente dele. É claro que  $B$  obtido assim é apenas uma aproximação pois não procuramos dados sobre calibração, e deveremos compor este resultado com a orientação do campo magnético da Terra, que é na média de  $55 \mu\text{T}$ , além de outras interferências. Na Fig. 5 temos os resultados destas medições para várias posições.

Observamos que de 7a a 7f nestas figuras, a distância do afastamento do celular aumenta, sendo que em 7f medimos apenas a indução da Terra. O valor máximo é em 7a,  $B = 1154\mu\text{T}$ , onde o sensor do celular está a uma distância um pouco superior a 1cm da face dos dois ímãs. Podemos então verificar se o resultado obtido no item 1 é superior ao indicado na Fig. 7a e se está razoável com o comportamento apresentado pelo decaimento gaussiano de  $B$  no ímã.



FIGURA 5. Medição de  $B$  na frente do carrinho com o smartphone (por Yudji D. U. Hoyer).

4. Observamos que na situação do vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=0LpBJDSNjcl> a indução neste ponto é a mais baixa. Porém, ela não é nula, pois possivelmente a energia magnética repulsiva neste ponto se contrabalança com as forças de atrito nas rodas dos carrinhos.

Podemos então futuramente estimar a partir disso o coeficiente de atrito entre as rodas do carrinho e o trilho horizontal, talvez sugerindo dados experimentais adicionais.

Como observações finais, podemos dizer que usamos várias aproximações neste experimento, pois na física

geralmente verificamos qual é a contribuição de cada fenômeno no resultado final do experimento. Por exemplo, desconsideramos no início a força de atrito, o momento de inércia das rodinhas do carrinho, o momento de inércia dos carros, a incerteza instrumental da régua milimetrada, a viscosidade do ar, a temperatura, etc. Fazemos isso para simplificar nosso trabalho, pois estes detalhes contribuem pouco para o resultado final. Porém, sabemos que eles existem!

#### IV. CONCLUSÕES

Nos tempos de pandemia originado pela COVID 19, é importante e fundamental obter novas abordagens pedagógicas no ensino de física e ciências em geral através da experimentação, sem que o aluno adentre na sala do laboratório, devido à necessidade do afastamento e do isolamento social, de acordo com as normas emitidas pela OMS - Organização mundial da saúde e também basicamente pelo bom senso. deste modo, este trabalho visa o ensinamento e aprofundamento dos conhecimentos com relação à propagação de incertezas nas medições num experimento de mecânica física, levando em consideração a cinemática e a dinâmica do movimento de dois carrinhos acoplados por mola num trilho horizontal, sob a ação de força externa inicial impulsiva e sob a ação de forças internas elásticas e magnéticas. A filmagem do movimento complexo dos carrinhos facilita a compreensão da análise deste movimento e possibilita a obtenção de variáveis dinâmicas de uma maneira mais fácil, haja vista a dificuldade inicial de se ter um campo de forças magnético que a princípio é de difícil solução teórica. O aluno deve ser capaz de obter a velocidade média do sistema massa-mola+campo magnético-massa através da abordagem cinemática, de fácil aplicação, e também da utilização da conservação da energia mecânica, considerando-se que haja pouca dissipação de energia no curto espaço de movimento retilíneo.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio parcial das agências FAPESP e CNPq sob nº FAPESP/12/13064-4, CNPq/MCTI/SECIS406035/2013-0, CNPq/310419/2012-3DT, CNPq/306095/2013-0 PQ e CAPES//ITA/88881.030340/2013-01 BJT. O autor B.N.S. agradece e homenageia o físico e engenheiro Prof. Msc. Yudji D. U. Hoyer por participar deste seu último trabalho, colaborando em seu laboratório com as medições e cálculos da indução magnética através de seu próprio smartphone (Fig. 5), tendo falecido em abril de 2021.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Sismanoglu, B. N., Germano, J. S. E., Amorim, J. e Caetano, R., *A utilização da filmadora digital para o estudo do movimento dos corpos*, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 1501-1 – 1501-7 (2009).
- [2] Sismanoglu, B. N., Caetano, R. F., Germano, J. S. E., Rezende, M. V. O., Hoyer, Y. D., *Dinâmica de massa variável: corrente suspensa na máquina de Atwood*, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 2310-1 – 2310-7 (2011).
- [3] Classroom.google.com, acessado em 08/01/2021.
- [4] youtube.com, acessado em 08/01/2021.
- [5] <https://physlets.org/tracker/> acessado em 08/01/2020.
- [6] <https://www.pasco.com/products/lab-apparatus/mechanics/carts-and-tracks/me-6950> , acessado em 08/04/2020.
- [7] Symon, K. R., *Mecânica*, (Editôra Campus, Rio de Janeiro, 1982).
- [8] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, 1980).
- [9] <https://gizmodo.uol.com.br/sensores-smartphones-guia/> visitado em 08/01/2021.