

Cálculo de la composición de masa en una aleación binaria para prácticas de laboratorio docente



ISSN 1870-9095

Zaira C. Martínez-Vargas¹, Raúl C. Cruz-Gómez²

^{1,2}Departamento de Física, Universidad de Guadalajara, Blvd. Marcelino García Barragán y Calzada Olímpica, C.P. 44840, Guadalajara, Jalisco, México.

¹Licenciatura en Física, Universidad de Guadalajara, Blvd. Marcelino García Barragán y Calzada Olímpica, C.P. 44840, Guadalajara, Jalisco, México.

E-mail: zairac.martinez@alumnos.udg.mx

(Recibido el 26 de enero de 2021, aceptado el 19 de mayo de 2021)

Resumen

La teoría y comprobación de la cantidad de masa que componen una aleación binaria es presentada. La teoría parte de un sistema de dos ecuaciones que relacionan la masa, volumen y densidad total de la aleación asumiendo que se conoce la densidad de los dos elementos aleados. La comprobación se realiza por medio de un experimento no intrusivo el cual se basa solo en la medición de la masa total de la muestra utilizando el principio de Arquímedes. La teoría mostró ser compatible con aleaciones de dos compuestos cuyas masas fueron previamente medidas. Finalmente, el presente trabajo puede ser considerado como experimentos docentes relativamente simples y de bajo costo.

Palabras clave: Aleación de dos sustancias, aleación binaria, densidad específica, fuerza de flotabilidad.

Abstract

The theory and verification of the amount of mass that makes up a binary alloy is presented. The theory starts from a system of two equations relating the mass, volume and total density of the alloy assuming that the density of the two alloyed elements is known. The check is performed by means of a non-intrusive experiment which is based only on the measurement of the total mass of the sample using Archimedes' principle. The theory proved to be compatible with alloys of two compounds whose masses were previously measured. Finally, the present work can be considered as relatively simple and low cost teaching experiments.

Keywords: Alloy of two substances, binary alloy, specific gravity, buoyancy force.

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de densidad de masa como una medida de la masa por unidad de volumen, fue expuesto por primera vez por Arquímedes de Siracusa hace más de dos mil años. Según cuenta [1] Arquímedes fue solicitado por Hiero II, rey de Siracusa, para determinar si la corona que le había entregado el orfebre contenía todo el Oro que él le había proporcionado o era una aleación con cierta cantidad de Plata. Para resolverlo, Arquímedes necesitaba conocer la propiedad física que relacionara la masa con el volumen de la corona y así saber qué fracción era de Oro y qué fracción era de Plata. La solución que se le ocurrió literalmente lo hizo "desbordar". Su método consistió en sumergir la corona en un recipiente previamente lleno hasta el borde de agua y comparó los volúmenes de agua desplazada por la misma cantidad de Oro puro proporcionada al orfebre. Si la corona era completamente de Oro, iba a desbordar la misma cantidad de agua, pero si el volumen de agua desplazado era mayor debido a una aleación más ligera, confirmarían si él orfebre los había engañado. La relación matemática que encontró fue $m = (\rho v)_{Oro} = (\rho V)_{corona}$, donde m es la masa igual para ambos Oro y corona, ρ su densidad, v el volumen del Oro y V el volumen de la corona suponiendo

que fuera mayor. De esta forma cuenta [1], Arquímedes le comprobó al rey la respuesta que él presentía.

Sin embargo, aunque Arquímedes descubrió el robo del orfebre en la corona de Hiero II, parece que el método exacto que debe haber seguido en este descubrimiento, ha permanecido hasta ahora desconocido [7]. Tiempo después, Galileo Galilei a sus 22 años de edad publicó en su libro "The little balance" [2] una técnica que él creía que había usado Arquímedes, ya que el método mencionado por [1] estaba lejano a la precisión científica. Como Arquímedes ya había explicado la ley de la palanca [3], Galileo escribió que pudo haber equilibrado en el aire la corona junto con un pedazo de Oro del mismo peso que el entregado al orfebre y como se suponía que ambas eran de Oro puro, su densidad tenía que ser la misma. Por lo tanto, al momento de sumergirlas en el agua tendrían que estar en equilibrio.

A partir de entonces, uno de los métodos más usados para medir la densidad de un cuerpo sólido regular o irregular es aplicando el llamado Principio de Arquímedes. De esa forma, la densidad es calculada como la masa de la muestra dividida por su volumen ($\rho = m/v$). Sin embargo, debido a la complejidad e incertidumbre que surgen al medir directamente el volumen, el cálculo de su densidad también resulta complicado, no obstante, se puede calcular

de forma indirecta. Lo poderoso de este cálculo precisa en determinar la densidad de un objeto con sólo pesarlo, sin medir los volúmenes de agua desbordados. Este método suele ser más preciso y, por lo tanto, es el preferido en los laboratorios docentes. En ese contexto, entonces, ¿Qué sucedería si un objeto de forma irregular está compuesto de dos sustancias distintas? El problema de conocer los compuestos de una aleación binaria involucra el desarrollo de mejores técnicas. Por ejemplo, en la industria minera donde se trabaja con aleaciones que contienen Oro o en la geología en la cual se vuelve indispensable conocer los compuestos de una roca [8].

En estos casos se vuelve necesario utilizar otras técnicas para conocer sus propiedades. Por tal motivo, el objetivo principal de este trabajo es presentar una metodología teórica y práctica que permita determinar la composición porcentual de masa de un compuesto binario. Lo anterior, aplicando un método no destructivo (El Principio de Arquímedes) en experimentos de laboratorio para prácticas docentes de bajo costo. Aquí, presentamos una forma de demostrar cómo pudo haber calculado Arquímedes la cantidad exacta de masa de Oro y Plata en la aleación de la corona de Hierro II. La práctica para laboratorio docente que se presenta en este trabajo, permitirá al estudiante inducirlo al razonamiento experimental con equipo de bajo costo. Incluso esta actividad puede realizarse en casa orientando a la Física experimental a estudiantes de educación nivel básico, bachiller y superior, principalmente estudiantes encaminados a las ciencias e ingenierías.

II. TEORÍA

Como fue mencionado anteriormente, para encontrar las densidades de un cuerpo sin medir su volumen exacto, el principio de Arquímedes es el más aplicado [8]. Este nos dice que, un objeto sumergido en un fluido experimenta una fuerza en dirección contraria a la fuerza de gravedad llamada fuerza de empuje o de flotación B y la magnitud de esta fuerza sobre el objeto es igual al peso del fluido desplazado por el mismo objeto [5]. Así, ya que el volumen es desconocido y los objetos tienen forma irregular, el método es el siguiente:

A. Densidad de un cuerpo puro e irregular

Siguiendo a [4], sea P_1 el peso de un recipiente con cierta cantidad de agua y un cuerpo totalmente sumergido en él. P_2 el peso del recipiente con la misma cantidad del agua y el mismo cuerpo sumergido sostenido por un hilo sujeto a un soporte sin tocar las paredes ni el fondo. P_3 el peso solamente del recipiente y el agua. En la figura 1 se muestran siguiendo el mismo orden un dibujo del montaje experimental. Restando $P_1 - P_3$ se encuentra el peso del objeto:

$$P_1 - P_3 = m_{obj}g \quad (1)$$

En donde $m = \rho v$ es la masa del objeto, ρ y v su densidad y volumen, respectivamente.

De esta relación obtenemos el volumen del objeto

$$v_{obj} = \frac{P_1 - P_3}{\rho_{obj}g} \quad (2)$$

Donde v_{obj} y ρ_{obj} son el volumen y densidad del objeto, respectivamente y g la aceleración debida a la gravedad. Debido a que el objeto se encuentra sumergido en el recipiente sin tocar el fondo ni las paredes, este experimenta una fuerza de flotación más el peso del recipiente con agua. Así, $P_2 = P_3 + B$ entonces $B = P_2 - P_3$ donde $B = \rho_f v_{obj}g$ es la fuerza de flotabilidad (inciso (b) de la figura 1), en donde ρ_f es la densidad del agua. Por lo tanto,

$$v_{obj} = \frac{P_2 - P_3}{\rho_f g} \quad (3)$$

Igualando la ecuación (2) con (3):

$$\rho_{obj} = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} \rho_f \quad (4)$$

La ecuación (4) nos da una muy buena aproximación de la densidad del objeto sin considerar el volumen.

B. Densidad de una aleación binaria

Sean dos cuerpos con diferente densidad unidos por una aleación. Es posible encontrar la masa de cada sustancia mediante un sistema de ecuaciones en términos de densidades y masas.

Sea,

$$x_1 + x_2 = V_t \quad (5)$$

$$\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 = M_t \quad (6)$$

Donde x_1 y ρ_1 son el volumen y densidad del objeto 1, x_2 y ρ_2 son el volumen y densidad del objeto 2, V_t y M_t el volumen y la masa total de la aleación, respectivamente. Despejando x_1 de la ecuación (5) y sustituyendo en la (6) obtenemos:

$$x_2 = \frac{\rho_1 V_t - M_t}{\rho_1 - \rho_2} \quad (7)$$

Sustituyendo x_2 por m_2/ρ_2 y V_t por M_t/ρ_t se obtiene

$$m_2 = abs \left(\frac{\rho_1 \rho_2 M_t}{\rho_t (\rho_1 - \rho_2)} - \frac{M_t \rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \right) \quad (8)$$

En donde ρ_t es la densidad total de la aleación. Asimismo,

$$m_1 = abs \left(\frac{\rho_2 \rho_1 M_t}{\rho_t (\rho_2 - \rho_1)} - \frac{M_t \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right) \quad (9)$$

En donde m_1 y m_2 son las masas de los dos elementos compuestos en la aleación.

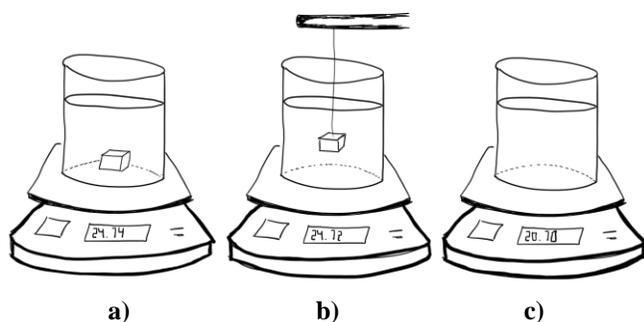


FIGURA 1. Dibujo del montaje experimental en donde se muestra: en (a) el peso del cuerpo totalmente sumergido en el recipiente con agua, la balanza muestra el valor P_1 . En (b) el peso del cuerpo dentro del recipiente sin tocar el fondo ni las paredes la balanza muestra el valor de P_2 . Finalmente, en (c) el recipiente sin el cuerpo, solo con el agua en este caso la balanza muestra el valor P_3 . Nota, los valores mostrados en la balanza solo son ilustrativos.

III. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

Para realizar las mediciones y encontrar la densidad de la masa total (M_t) de una aleación, se utilizó un recipiente de acrílico transparente cuyas dimensiones fueron $5 \times 5 \text{ cm}^2$ de base y 10 cm^2 de altura. Este se llenó parcialmente con agua de grifo a temperatura ambiente y densidad $\rho_f = 0.9982 \text{ g/cm}^3$, se aseguró que en todos los casos el cuerpo sumergido se cubriera totalmente de agua. Este recipiente se colocó sobre una balanza digital marca Scout-Pro con precisión de 0.1 g . Primero se introdujo el cuerpo “aleado”, dentro del recipiente para hacer el paso correspondiente a P_1 y se midió su masa total como se muestra en la figura 1(a). Después se amarró el cuerpo por un hilo rígido de masa despreciable y con ayuda de un soporte universal, se suspendió dentro del recipiente con el cuidado que no tocara el fondo ni las paredes, la balanza dió el valor de P_2 como se muestra en la figura 1(b). Posteriormente, se midió solamente el recipiente con agua correspondiente al paso P_3 . Se aseguró que en cada paso el peso del recipiente con agua fuera siempre la misma cantidad. También fue importante tener cuidado con las burbujas de aire entre los cuerpos, teniendo la nula o mínima cantidad posible.

A. Calibración del método

Con el objetivo de comprobar la veracidad del modelo teórico, se midió la densidad total de dos cantidades cuyos elementos eran conocidos: la aleación comercial de Estaño/Plomo (60/40) lo que corresponde al 60% de Estaño y al 40% de Plomo. Como segunda prueba, la unión de una barra de Aluminio y en ella alambre de Cobre fuertemente enredado. Los valores de la masa de cada elemento fueron previamente medidos. En la siguiente tabla se muestran los valores calculados de la masa compuesta en gramos por cada elemento de la aleación aplicando las ecuaciones 8 y 9. Los parámetros considerados fueron: tipo de aleación, ρ_t es la densidad total de la aleación, ρ_{Pb} la densidad conocida del Plomo, ρ_{Sn} la densidad conocida del Estaño, ρ_{Al} y ρ_{Cu}

densidad conocida del Aluminio y del Cobre, M_t masa total de la muestra y M_{Sn}/M_{Pb} y M_{Al}/M_{Cu} la masa calculada del Estaño (Sn), Plomo (Pb), Aluminio (Al) y Cobre (Cu), respectivamente. En la tabla I también se muestran los valores encontrados experimentalmente.

Tabla I. Resultados del modelo teórico con dos aleaciones conocidas, 60 % Estaño y 40 % Plomo (Estaño 60/40) y la unión de una barra de Aluminio con un alambre de Cobre. Los detalles de los parámetros se mencionan en el texto. Note que la suma de las dos masas calculadas son en promedio el 99.76 % de la masa total de la muestra previamente medidas. Asimismo, las densidades teóricas fueron tomadas de la literatura.

Aleación	$\rho_t (\text{g}/\text{cm}^3)$	g/cm^3	g/cm^3	$M_t (\text{g})$	$M (\text{g})$
		ρ_{Sn}	ρ_{Pb}		M_{Sn}/M_{Pb}
Estaño(60/40)	9.31 ± 0.01	7.33	11.30	2.8 ± 0.3	$1.69 / 1.10, \pm 0.01$
		ρ_{Al}	ρ_{Cu}		M_{Al}/M_{Cu}
Aluminio/Cobre	3.03 ± 0.03	2.70	8.96	7.6 ± 0.1	$6.48 / 1.11, \pm 0.02$

Del análisis anterior, se concluye que de cada cantidad de masa total le corresponde un 60.35/39.28 % de Estaño/Plomo y 85.2/14.72 % de Aluminio/Cobre, respectivamente. Para ambos casos, estos valores son los que se esperaba obtener, ya que los valores de las masas de cada compuesto fueron: para el primer caso reportados por el fabricante y medidos antes de la “aleación”, para el segundo.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Una vez que se comprobó experimentalmente el buen resultado del modelo teórico, se realizaron mediciones con diferentes compuestos unidos fuertemente mediante un hilo de masa despreciable simulando una aleación binaria (*i.e.* Tornillo de Acero-Aluminio, Aluminio-Estaño, entre otros). En todos los casos los resultados fueron muy cercanos a los valores reales (no se muestran los resultados). Como caso particular, se realizó la aleación de Aluminio-Estaño (asumiendo que es Estaño puro). Se tomaron siete pedazos de Estaño de igual masa, se unieron al aluminio sumándose uno por uno y se midió el incremento de masa total. En la figura 2 se muestra la comparación entre los valores de la masa de cada pedazo de estaño teóricos y los valores medidos en el laboratorio, es decir, los que se pesaron individualmente. En la misma figura se puede observar que las barras de error son mayores donde los valores de las masas son más pequeños. Una razón del aumento en el error puede ser la densidad del fluido en donde se sumerge el cuerpo ya que la fuerza de flotabilidad es proporcional a su densidad. Esta figura nos comprueba claramente el límite que tiene la fuerza de flotabilidad B es decir, para disminuir

el error en la medición, la densidad total de la aleación tiene que ser mayor a la densidad del fluido y consecuentemente mayor a la precisión de la balanza.

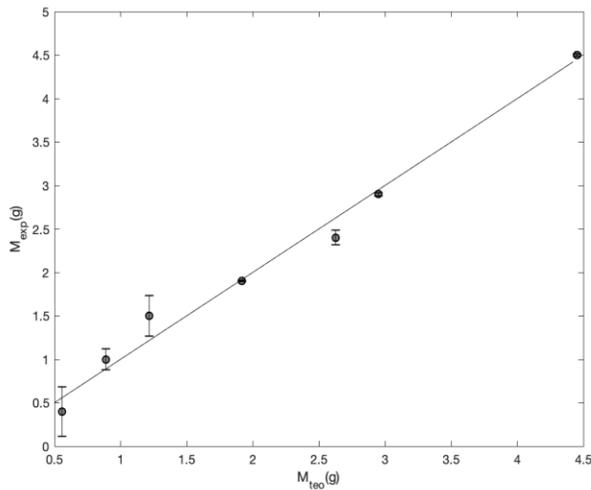


FIGURA 2. Comparación de las masas conocidas de Estaño de cada una de las 7 muestras referidas como (M_{teo}) y los obtenidos en el laboratorio (M_{exp}) partiendo de la aleación de una barra Aluminio y Estaño. Las barras de error muestran el error absoluto.

Otra forma de comprobar la veracidad del modelo teórico fue comparar nuestros resultados con diferentes métodos desarrollados previamente. Por ejemplo, en su trabajo [6] presenta un método para la obtención de las masas en una aleación binaria con énfasis en la propagación de errores y la motivación que implica para el estudiante conocer y entender la necesidad de medir con precisión. [6] se basa principalmente en la medida del volumen aplicando el principio de Arquímedes. Al igual que nuestro modelo [6] asume conocer las densidades de los elementos aleados. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, en este método la incertidumbre es mayor debida a la precisión en la medición del volumen. Una razón sería la dificultad de obtener una medida confiable del volumen en un cuerpo irregular. Aún así, sus resultados son relativamente confiables. Para comprobar su método [6] calculó la composición de un anillo compuesto de Oro y Cobre dándole peso a lo especificado por el vendedor en quilates de Oro. En el siguiente cuadro se hace la comparación de los resultados obtenidos por [6] y los resultados encontrados por el método propuesto en este trabajo para la misma aleación.

De los valores mostrados en la tabla II, se concluye que, para el resultado encontrado por [6] de la masa total del anillo le corresponde un 47.94 % compuesto por Oro y 52.05 % de Cobre y aplicando nuestro método los valores fueron, 47.19/52.80 % compuesto de Oro y Cobre respectivamente. Es importante resaltar la diferencia en las incertidumbres siendo menor en el presente trabajo. Sin embargo, ambos resultados son congruentes con lo especificado por el vendedor del anillo de aproximadamente 11.5 quilates.

TABLA II. Comparación de nuestros resultados con los publicados por [6] en una aleación de un anillo compuesto de Oro/Cobre. En donde ρ_t es la densidad total del anillo, ρ_{Au} es la densidad del Oro, ρ_{Cu} es la densidad del Cobre, M_t es la masa total de la aleación y M_{Au}/M_{Cu} es la masa de cada compuesto de la aleación.

Aleación	$\rho_t (g/cm^3)$	$\rho_{Au} (g/cm^3)$	$\rho_{Cu} (g/cm^3)$	$M_t (g)$	$M_{Au}/M_{Cu} (g)$
Resultado reportado por [6]					
Au/Cu	12 ± 1	19.32	8.96	2.67 ± 0.01	$1.28 / 1.39, \pm 0.12$
Este trabajo					
Au/Cu	12 ± 1	19.32	8.96	2.67 ± 0.01	$1.26 / 1.41, \pm 0.04$

IV. CONCLUSIONES

Siendo la física una ciencia experimental por excelencia, es fundamental que los docentes y estudiantes de esta disciplina a través de la aplicación de prácticas de laboratorio consigan confrontar, verificar y comparar un modelo teórico. Sobre todo, en prácticas de laboratorio relativamente simples con equipo experimental de bajo costo. En su trabajo [9] enfatiza sobre la importancia de incorporar conceptos básicos y rápidamente comprobables entre experimento y teoría en la enseñanza de la física experimental. En este contexto, [10] sugiere que la estructura de los conocimientos expuestos es que estos puedan ser incluso impartidos a alumnos carentes del manejo matemático de este tipo, abordando el desarrollo práctico solamente. Con base en lo anterior, el experimento expuesto en este trabajo permite que estudiantes de niveles de educación básica y/o superior puedan comparar el modelo teórico con el experimental en un problema tan importante e ilustrativo, que hasta nuestro conocimiento, pocos libros de texto lo abordan. Así, la motivación principal en el presente trabajo toma importancia en el principio de ser no intrusivo, sin mucha matemática rigurosa y de muy bajo costo.

REFERENCIAS

[1] Vitruvius, P. and Morgan, M. H., *Vitruvius: The ten books on architecture* (Dover Publications, New York, 1960).
 [2] Galilei, G., *The Little Balance* (McGraw-Hill, USA, 1968).
 [3] Sears, Zemansky., *Física Universitaria Volumen I*, (Pearson, México, 2013).
 [4] Medina Guzmán H., *Física II* (Pontificia Universidad Católica de Perú, Lima, 2019).
 [5] Serway, J., *Física para ciencias e ingeniería Volumen I*, (CENAGE Learning, México, 2014).

- [6] Riveros, H. G., *La densidad para medir la composición de aleaciones*, Revista Mexicana de Física **35**, 512-515 (1989).
- [7] Rorres, Ch., <<https://www.cs.drexel.edu/~crrorres/>>, Consultado el 22 de octubre de 2020.
- [8] Makhuvha1, M., Arellano R. M., Harney D. M. W., *Determination of bulk density, methods and impacts, with a case study from Los Bronces Mine, Chile*, Applied Earth Science (Trans. Inst. Min. Metall. B) **123(3)**, (2014).
- [9] Riveros, H. G., *Enseñanza de la Física experimental*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **13**, 1304 (2019).
- [10] Villarreal Rodríguez, C. A., Segarra Alberú, P. *La experimentación para detonar el interés en la física*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **11**, 2311 (2019).