

Propuesta para la enseñanza del movimiento oscilatorio usando herramientas computacionales



ISSN 1870-9095

Gladys Patricia Abdel Rahim Garzón

*Facultad Tecnológica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia.*

E-mail: ggabdelr@unal.edu.co

(Recibido el 28 de abril de 2022, aceptado el 29 de mayo de 2022)

Resumen

En el presente trabajo se realiza un análisis de los movimientos del armónico simple (M.A.S.) y el movimiento amortiguado, de los sistemas: masa-resorte y cuerda-masa. Para realizar estos estudios, se utilizó Tracker. Con esta herramienta se obtienen las tablas, gráficas y ecuaciones. Las ecuaciones obtenidas se ajustan a las que se encuentran en los textos tradicionales de física, sobre este tipo de fenómenos. Las grabaciones realizadas fueron de dos tipos, una casera (masa – resorte) y la otra de un simulador (cuerda – masa) de Phet titulada “laboratorio del péndulo”. Se calculó las gráficas y ecuaciones de movimiento, las energías (cinética, potencial y mecánica). En el desarrollo de los cuatro laboratorios, se puede evidenciar la importancia que tiene Tracker para solucionar la dificultad actual de no poder realizar prácticas de laboratorio. Se demuestra que las ecuaciones de movimiento obtenidas con el software se pueden ajustar fácilmente a las ecuaciones que se encuentran en los textos de física tradicionales.

Palabras clave: Tracker, Física Educativa, Movimiento oscilatorio.

Abstract

In the present work an analysis of the simple harmonic movements (M.A.S.) and and the damped movement, of the systems: mass - spring and string – mass. To carry out these studies, Tracker video reader was used. With this tool the tables, graphs and equations are obtained. The equations obtained conform to those found in traditional physics texts, on this type of phenomena. The recordings made were of two types, one homemade (mass - spring) and the other from a simulator and (rope – mass), the Phet titled “pendulum lab”. The graphs and equations of motion were calculated, the energies (kinetic, potential and mechanical). In the development of the four laboratories, it can be evidenced how important it is Tracker to solve the current difficulty of not being able to carry out laboratory practices. It is shown that the equations of motion obtained with the software can be easily adjusted to the equations found in traditional physics texts.

Keywords: Tracker, Educational Physics, Oscillatory movement

I. INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de ingeniería eléctrica de la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas del proyecto curricular en electricidad tienen dificultades en el curso de física moderna debido a que dentro de su contenido programático no contiene el curso de vibraciones y ondas. En este curso se estudia la dinámica, cinemática y energía mecánica de ondas mecánicas y electromagnéticas que se transmiten a través de diferentes medios como aire, cuerdas, agua o vacío [1].

Por lo anterior, se presentan laboratorios caseros y virtuales de ondas mecánicas donde se plantean todo el desarrollo físico-matemático necesario para comprender dichos movimientos oscilatorios (con y sin fricción) como son el sistema masa-resorte y el sistema cuerda-masa. La cual permiten comprender o entender el comportamiento electrónico de circuitos eléctricos, tales como LC, RCL, etc.

Por lo que comprender estos sistemas mecánicos se hacen fundamental en proceso enseñanza aprendizaje para el futuro ingeniero eléctrico o ingeniero electrónico.

El uso de herramientas computacionales para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la física se ha convertido al día de hoy en una necesidad donde se ha mostrado que Tracker y Phet Colorado son herramientas confiables para apoyarse en dichos procesos [2, 3]. Por lo tanto, en este trabajo se usará Se utilizará Tracker para obtener los datos, gráficas y ecuaciones que se encuentran tradicionalmente en los libros de física [4].

II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

A. Movimiento armónico simple (M.A.S.) masa resorte

El M. A.S. es un tipo de oscilador que ocurre debido a una fuerza restauradora, que corresponde a la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa, Robert Hooke observó que el resorte sufre una deformación respecto a su posición de equilibrio, la fuerza recuperadora que ejerce el resorte es directamente proporcional al cambio de longitud.

$$F_e = -k(\Delta x). \quad (1)$$

Donde F_e es la fuerza elástica, k la constante del resorte y Δx el alargamiento o compresión. Por la segunda ley de Newton se tiene que:

$$F_{neta} = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene $-k(\Delta x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$, que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3)$$

La ecuación que soluciona la ecuación (3) es:

$$x(t) = A \text{sen}(wt + \varphi). \quad (4)$$

Donde A es la amplitud, w la frecuencia angular o frecuencia natural del oscilador, $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, φ la constante de fase y una condición dentro de la ecuación (3) y (4) es que $w^2 = \frac{k}{m}$. Donde k es la constante elástica del resorte con unidades $\left[\frac{N}{m}\right]$.

Las ecuaciones de movimientos, la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo son: la ecuación (4), y

$$v(t) = Aw \cos(wt + \varphi), \quad (5)$$

$$a(t) = -Aw^2 \text{sen}(wt + \varphi). \quad (6)$$

B. Movimiento armónico simple (M.A.S.) masa resorte

La fuerza neta que actúa sobre la masa es la componente del peso

$$F_{neta} = -mg \text{sen} \alpha. \quad (7)$$

Donde m es la masa, g la gravedad y α es el ángulo entre la posición de equilibrio y la longitud de la cuerda.

De acuerdo a la ecuación (2) se tiene que $-mg \text{sen} \alpha = m \frac{d^2s}{dt^2}$, donde $dS = Ld\theta$, lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0. \quad (8)$$

la fusión que soluciona la ecuación (9), es:

$$\theta(t) = A \cos(wt + \varphi) + B \text{sen}(wt + \varphi). \quad (9)$$

Donde para el sistema cuerda – masa, la amplitud de $A = \theta_0$ y $B = \frac{w_0}{w}$, así:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi) + \frac{w_0}{w} \text{sen}(wt + \varphi). \quad (10)$$

Si la velocidad angular inicial es igual a cero ($w_0=0$) la ecuación (10) nos queda:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi). \quad (11)$$

Al comprobar que la ecuación (11) es una solución de la ecuación (9), se obtiene la frecuencia natural de oscilación del sistema, $w^2 = \frac{g}{L}$ [2, 3].

C. Oscilaciones amortiguadas (oscilador subcrítico)

Una de las características fundamentales de este movimiento es que la amplitud disminuye en el tiempo y la ecuación diferencial de segundo orden del movimiento es la suma de la fuerza elástica más la fuerza restauradora ($-bv$), donde b es la constante de amortiguamiento y v es velocidad transversal $v_T = \frac{dy(t)}{dt}$, así:

$$-F_e - b \frac{dy(t)}{dt} = m \frac{d^2y(t)}{dt^2}. \quad (12)$$

O lo que lo mismo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m}y = 0. \quad (13)$$

Donde la función que soluciona la ecuación (13), es:

$$y(t) = A_0 e^{-\gamma t} \text{sen}(w^*t + \varphi), \quad (14)$$

$$y^*(t) = A_0 e^{-\gamma t}. \quad (15)$$

Donde se puede notar como:

$$y(t) = y^*(t) \text{sen}(w^*t + \varphi), \quad (16)$$

donde la frecuencia angular de la oscilación amortiguada es:

$$w^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (17)$$

Donde m es la masa del bloque que se une al resorte, b es la constante de amortiguamiento y φ la constante de fase [3].

Derivando (14) con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad trasversal en función del tiempo:

$$v(t) = A_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \text{sen}(w^*t + \varphi) + w^* \cos(w^*t + \varphi)]. \quad (18)$$

III. MÉTODO EXPERIMENTAL

Se estudio dos laboratorios: el sistema, masa–resorte y el sistema, cuerda–masa, donde para cada uno de ellos, se estudió la dinámica y la energía (cinética, potencial y mecánica) con y sin fricción.

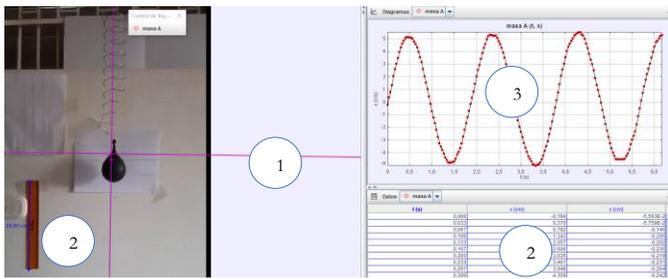


FIGURA 1. Montaje del sistema masa-resorte visualizado en el programa Tracker.

A. Montaje experimental casero del sistema masa-resorte con y sin fricción

En la Figura 1 muestra el laboratorio casero que consta de un resorte, una masa y un soporte. Para el análisis se usaron las herramientas que Tracker, como son:

1. Plano cartesiano: Nos permitirá ubicar la trayectoria de la partícula.
2. Vara de calibración: que consiste en colocar una regla de 30 cm de longitud, esto permite que el programa de simulación tome una medida estándar y a partir de esa medida puede derivar la escala a la cual se está realizando el experimento.
3. Tabla de datos: la tabla sintetiza los datos de la trayectoria.
4. Graficas: una vez obtenida la trayectoria total de la partícula, el programa puede hacer las gráficas y se pueden cambiar las variables en los ejes.

B. Montaje experimental virtual del sistema masa-resorte con y sin fricción

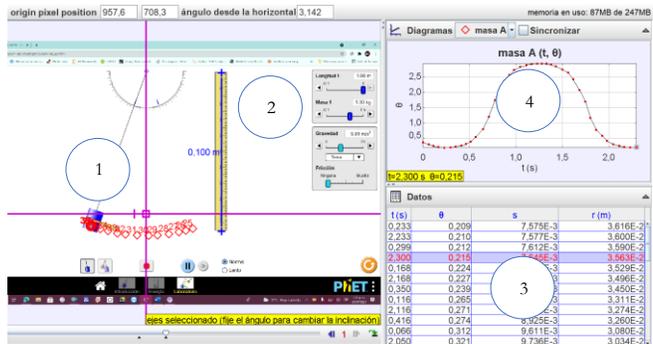


FIGURA 2. Montaje del sistema cuerda-masa visualizada en el programa Tracker.

La Figura 2 muestra el sistema masa-cuerda visualizada en el programa Tracker, el laboratorio virtual fue tomado de software gratuito de Phet Colorado titulada “Lab de Péndulo”. Para la realización del video se utilizaron las mismas herramientas de Tracker del laboratorio anterior.

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A. Dinámica del sistema masa-resorte sin fricción

Obtuvimos de Tracker el periodo, la frecuencia y la frecuencia angular (Tabla 1) y las gráficas de posición, velocidad trasversal y aceleración trasversal como funciones del tiempo (Figura 4), con respectivas ecuaciones las cuales son respectivamente:

$$x(t) = 0.049\text{sen}(3.33t - 0.012)[\text{m}], \quad (19)$$

$$v_x(t) = 0.16\text{cos}(3.33t - 0.012) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad (20)$$

$$a_x(t) = -0.54\text{sen}(3.33t - 0.004) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]. \quad (21)$$

Donde, la amplitud, la velocidad máxima y la aceleración, son respectivamente: $A = 0.049\text{m}$, $v_{\text{máx}} = \pm 0.16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $a_{\text{máx}} = \pm 0.54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Además, en las gráficas se puede apreciar que mientras la posición y la aceleración es máxima, la velocidad es nula y viceversa. Con las ecuaciones de movimiento y $\omega^2 = \frac{k}{m}$ obtenemos la constante elástica (k), así:

$$k = 0.25\text{kg} \left(3.33 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 2.77 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (22)$$

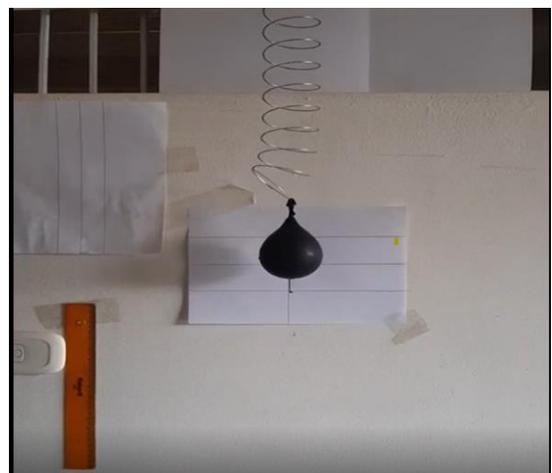
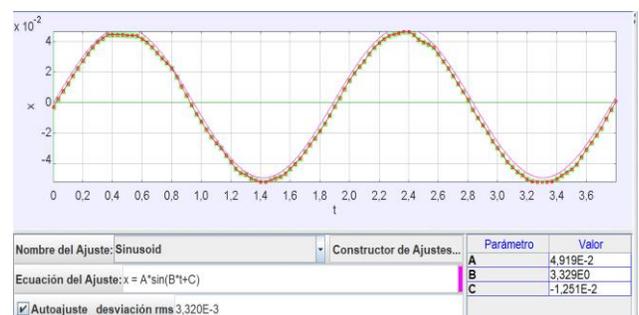


FIGURA 3. Montaje casero del sistema masa-resorte.

TABLA 1. Datos obtenidos de Tracker.

Datos tomados del Tracker		
Periodo	$T = \frac{t}{n}$	1.9 s
Frecuencia	$f = \frac{1}{T}$	0.52 Hz
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi f$	$3,30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



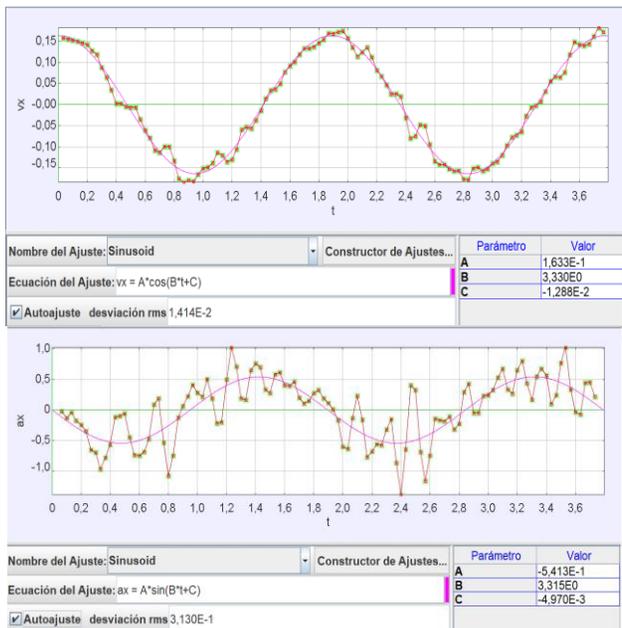


FIGURA 4. Gráficas de: posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo para el sistema masa – resorte del M.A.S.

B. Energía del sistema masa-resorte sin fricción

Es de notar que es muy importante saber calcular la energía (cinética, potencial elástica y mecánica) de un sistema macroscópico como es el sistema masa–resorte para comprender posteriormente el comportamiento de los electrones cuando están dentro de diferentes potenciales, son temas que se estudian en posteriores cursos como el de física moderna.

Si la ecuación de energía cinética en función del tiempo es: $E_c = \frac{1}{2}m[v_t(t)]^2$, se tiene que:

$$K(t) = \frac{1}{2}m[0.163\cos(3.33t - 0.013)]^2 \quad (23)$$

donde m es la masa y $v_t(t)$ la ecuación (20).

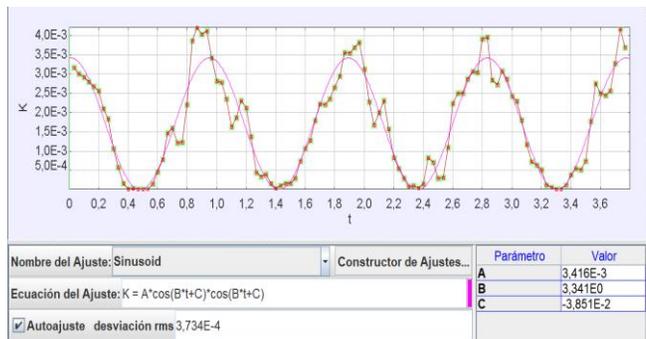


FIGURA 5. Gráfica de energía cinética en función del tiempo obtenida con Tracker.

La Figura 5 muestra la gráfica y su correspondiente ecuación de energía cinética en función del tiempo, obtenida con Tracker, donde obtenemos la amplitud: $A = 0.003$ m, frecuencia angular $w = 3.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, fase inicial $\phi = -0.038\text{rad}$ y la ecuación correspondiente la cual es:

$$K(t) = 0.0034\cos^2(3.33t - 0.038) \quad (24)$$

Donde el valor de la masa (m) se puede obtener de la amplitud de esta ecuación, ya que: $A^* = \frac{mA^2w^2}{2}$, entonces:

$$m = \frac{2A^*}{A^2w^2} = \frac{2A^*}{(v_{\text{máx}})^2},$$

$$m = \frac{0.046\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\left(0.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{0.046}{0.18} \text{kg} = 0.25 \text{kg}.$$

La energía potencial elástica por definición es:

$$E_{\text{P elástica}} = \frac{1}{2}k[x(t)]^2. \quad (25)$$

donde k es la constante elástica y $x(t)$ la ecuación (19), así:

$$E_{\text{P elástica}}(t) = \frac{1}{2}k[0.049\text{sen}(3.33t - 0.013)]^2 \quad (26)$$

Sustituyendo valores el valor de k , se tiene que:

$$E_{\text{P elástica}}(t) = 0.0032\text{sen}^2(3.33t - 0.013) \quad (27)$$

Sumando las ecuaciones (24) y (27) se obtiene la energía mecánica: $E_M = K + E_P$

$$E_M(t) = 0.0034\cos^2(3.33t - 0.038) + 0.0032\text{sen}^2(3.33t - 0.013) \quad (28)$$

o lo que es lo mismo:

$$E_M(t) = 0.0034[\cos^2(3.33t - 0.038) + \text{sen}^2(3.33t - 0.013)] \quad (28)$$

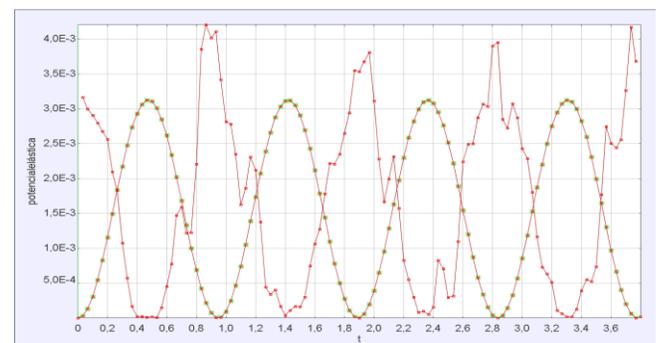


FIGURA 6. Gráficas energía cinética y potencial elástica en función del tiempo del sistema masa–resorte, obtenida con Tracker.

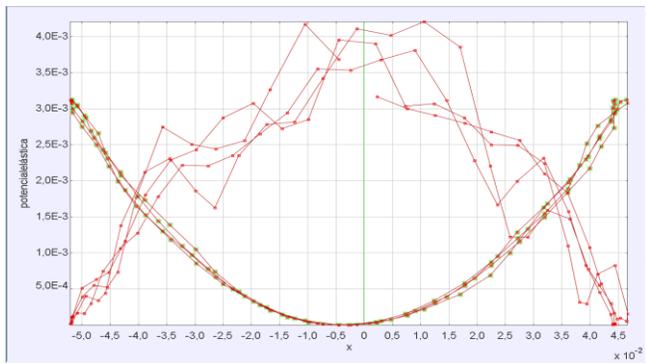


FIGURA 7. Gráficas energía cinética (cóncava hacia abajo) y potencial elástica en función de la posición (cóncava hacia arriba) del sistema masa – resorte obtenida con Tracker

Por definición la energía mecánica es:

$$E_M = \frac{kA^2}{2}, \quad (29)$$

se tiene que:

$$E_M = \frac{kA^2}{2} = \frac{2.72 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} (0.048)^2}{2} = 0.0031 [\text{J}]. \quad (30)$$

La Figura 7 muestra la energía cinética y energía potencial elástica en función de la posición. Donde se puede observar dos funciones una cóncava hacia arriba que corresponde a la energía potencial elástica y la otra cóncava hacia abajo, que corresponde a la energía cinética, estas fueron ajustadas con Tracker y las ecuaciones obtenidas fueron:

$$E_p = 1,30x^2 + 0.0082x [\text{J}], \quad (31)$$

$$K = -1,440x^2 - 0.0083x + 0.0034 [\text{J}]. \quad (32)$$

Además, en la Figura 7 se puede determinar que en el punto $x = 0.0024$ m toda la energía es cinética e igual a $K = 0.0041$ J, en los puntos $x = 0.04$ m y $x = 0.036$ m la energía cinética es igual a la energía potencial ($E_p = K = 0.00179$ J) y en los puntos $x = -0.052$ m y $x = 0.046$ m toda la energía es potencial elástica ($E_p = 0.0046$ J).

C. Dinámica del sistema masa-resorte con fricción

La figura 4 muestra el montaje casero utilizado para la experiencia utilizando una masa mayor que en la sección B y una amplitud mayor con el fin de que el sistema genere la oscilación de amortiguación.

La obtención de los datos del sistema resorte–masa del oscilador amortiguado, que se indica en la Tabla 2.

TABLA 2. Datos obtenidos de Tracker.

Datos tomados del Tracker		
Periodo	$T = \frac{t}{n}$	0.699 s
Frecuencia	$f = \frac{1}{T}$	1.43 Hz
Frecuencia angular propia	$w_0 = 2\pi f$	$8.97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

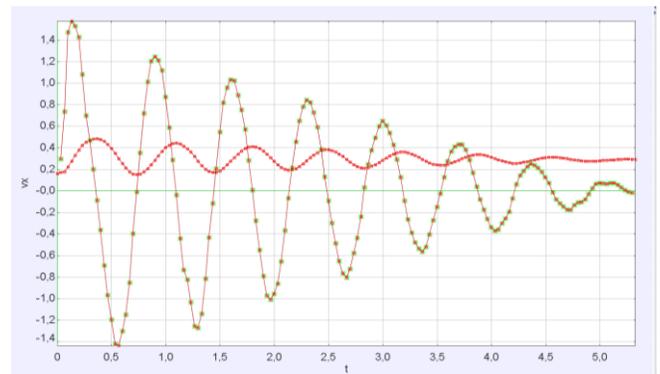


FIGURA 7. Amortiguamiento subcrítico de posición (amplitud menor) y velocidad (amplitud mayor) vs tiempo.

La figura 7 muestra la posición y la velocidad en función del tiempo, la cual se puede determinar, la amplitud de la posición tiene un valor máximo de: $A = 0.178$ m y la velocidad transversal máxima tiene un valor de $v_{\text{máx}} = 1.579 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ambas funciones decrecen exponencialmente al aumentar el tiempo.

Se tomaron los valores de las amplitudes de la gráfica de posición en función del tiempo de la figura 7 y se graficó utilizando Excel, figura 8. Cabe notar que solo se tomaron los valores positivos de las amplitudes como se indican en la Tabla 3.

TABLA 3. Amplitud positiva vs tiempo extraídos de la gráfica de posición en función del tiempo de la figura 7.

Datos de los picos positivos en la figura 7						
Amplitud (mm)	0.147	0.123	0.110	0.0758	0.0654	0.04394
Tiempo (s)	0.0993	0.799	1.498	2.197	2.896	3.562

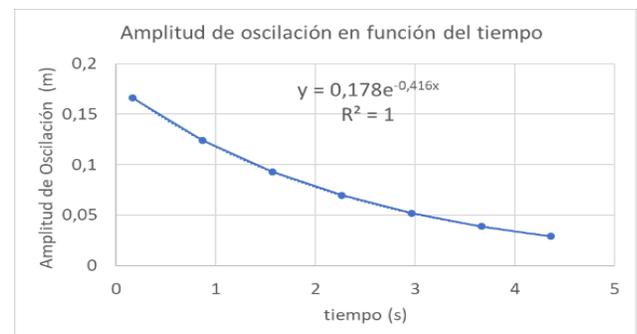


FIGURA 8. Gráfica de la amplitud de oscilación subcrítico vs. tiempo.

La gráfica de la Figura 8 se realizó en Excel y se obtuvo la ecuación:

$$A(t) = 0.1786 e^{-0.416t} [\text{J}]. \quad (33)$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación (15), donde se deduce que la amplitud inicial es: $A_0 = 0.178$ m y la constante de amortiguamiento, es: $\gamma = 0.416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, de donde sabemos que para que sea un oscilador amortiguado subcrítico $b^2 < 4M\gamma$.

Donde la frecuencia angular de la oscilación amortiguada es definida por la ecuación (17), sustituyendo los datos tenemos que:

$$w^* = \sqrt{\left(8.97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \left(0.416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2},$$

$$w^* = \sqrt{80.46 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} - 0.17 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}},$$

$$w^* = 8.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (34)$$

De acuerdo a las ecuaciones: 14, 18, 33 y 34, la posición y velocidad trasversal en función del tiempo sería igual a:

$$y(t) = 0.1786e^{-0.416t} \text{sen}(8.96t) [\text{m}],$$

$$v(t) = 0.1786e^{-0.416t} [-0.416 \text{sen}(8.96t) + 8.96 \text{cos}(8.96t)] \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]. \quad (35)$$

D. Energía del sistema masa-resorte con fricción

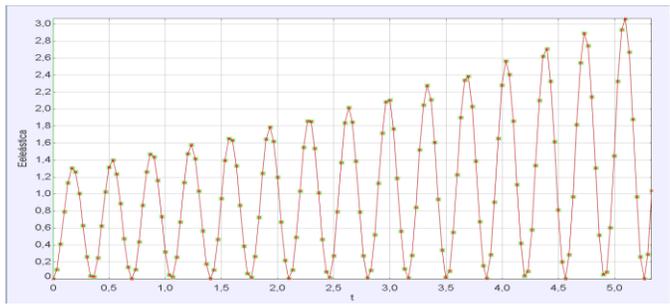


FIGURA 9. Gráfica de la energía potencial elástica vs. tiempo, obtenida con Tracker.

La Figura 9 muestra la energía potencial elástica en función del tiempo. Para determinar la ecuación correspondiente a esta figura, primero hallamos la constante elástica (k), conocida la frecuencia angular del resorte calculada con Tracker: $w = 8.97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, luego:

$$k = w^2 m = \left(8.97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 (1 \text{ kg}) = 80.46 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}. \quad (36)$$

donde la energía potencial elástica es: $E_{\text{Pelástica}}(t) = \frac{ky^2}{2}$ con la ecuación (35), se obtiene:

$$E_{\text{Pelástica}}(t) = 40.23 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} (0.1786e^{-0.416t} \text{sen}(8.96t))^2 \text{m}^2.$$

$$E_{\text{Pelástica}}(t) = 1.28 e^{0.173t} \text{sen}^2(8.96t) [\text{J}]. \quad (37)$$

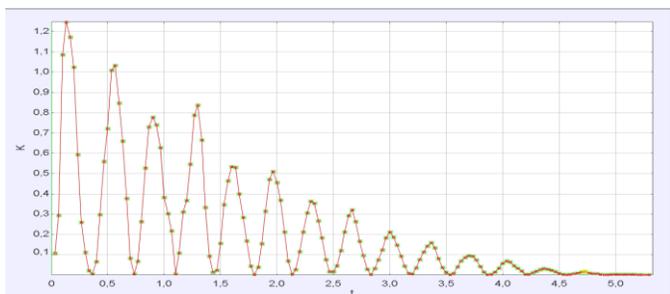


FIGURA 10. Gráfica de la energía cinética vs. tiempo, obtenida con Tracker.

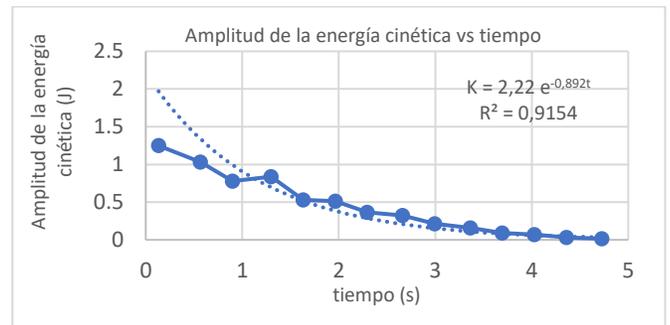


FIGURA 11. Gráfica de la amplitud de la energía cinética vs. tiempo.

La Figura 10, muestra la energía cinética en función del tiempo, donde observa que la amplitud de la energía disminuye a medida que aumenta el tiempo. Para obtener la ecuación correspondiente, primero graficamos los valores de los máximos positivos (Figura 11) y posteriormente con Excel graficamos estos máximos en función del tiempo.

Con la ecuación de energía cinética es:

$$K = \frac{mv^2(t)}{2} \quad (38)$$

y la ecuación (36) se obtiene el valor de la energía cinética como función del tiempo de este oscilador subcrítico.

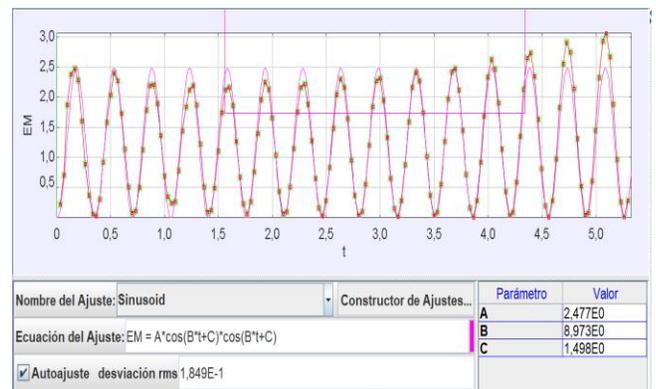


FIGURA 12. Gráfica de la energía mecánica vs. tiempo, obtenida con Tracker.

La Figura 12, muestra la energía mecánica que es la suma de las ecuaciones (37) y (38); $E_M = K + E_{\text{elástica}}$, cuya ecuación ajustada con Tracker es:

$$E_M(t) = 2.47 \cos^2(8.96t + 1,5) [\text{J}]. \quad (39)$$

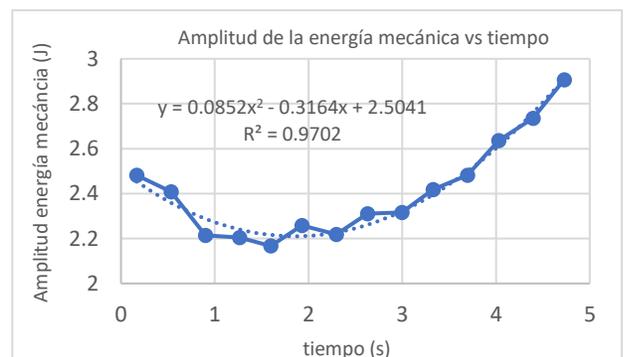


FIGURA 13. Amplitud de la energía mecánica vs. Tiempo.

La Figura 13 muestra las amplitudes positivas de la energía mecánica (figura 12) en función del tiempo, aunque se esperaría una función lineal y no una función cuadrática esto puede ser debido a las fuerzas de rozamiento.

E. Dinámica del sistema masa-cuerda sin fricción

Los temas de ingeniería requieren fundamentalmente que se conozca las ecuaciones de movimiento, dinámica y energía de sistemas oscilatorios debido a que sistemas microscópicos como los electrones se comportan de manera similar.

Por tal motivo realizamos un laboratorio virtual tomado de la página de Phet colorado titulado “Lab péndulo”. En este laboratorio, se realizó la experiencia con una longitud del péndulo de $L = 1\text{ m}$ y junto a él se colocó, una regla de 10 cm, para calibrar la imagen en la pantalla. Seguidamente se grabó y se realizó la lectura de dicho movimiento obtenido los datos, tablas, gráficas y ecuaciones de movimiento con Tracker (Figura 14).



FIGURA 14. Gráfica del ángulo en función del tiempo para el sistema masa-cuerda sin fricción obtenida con Tracker.



FIGURA 15. Gráfica de la velocidad angular en función del tiempo para el sistema masa-cuerda sin fricción obtenida con Tracker.

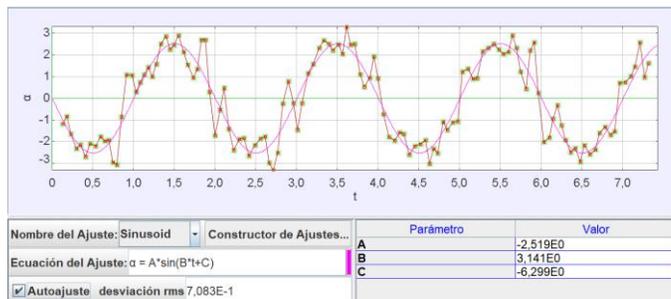


FIGURA 16. Gráfica de la aceleración angular l ángulo en función del tiempo para el sistema masa-cuerda sin fricción obtenida con Tracker.

$$\theta_r(t) = [0.26\text{sen}(3.13t - 6.21)]\text{rad}, \quad (40)$$

$$w(t) = [0.805\text{cos}(3.13t - 6.21)]\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad (41)$$

$$\alpha(t) = [-2.52\text{sen}(3.14t - 6.29)]\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (42)$$

Donde, la amplitud, la velocidad angular máxima y la aceleración angular, son respectivamente: $A = 0.26\text{ rad}$, $w_{\text{máx}} = \pm 0.805\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\alpha_{\text{máx}} = \pm 2.52\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Es importante mostrar que en el punto donde la velocidad angular es cero la aclaración y la posición angular es un máximo y viceversa. Con las ecuaciones de movimiento obtenidas con Tracker, se obtiene la frecuencia angular ($w = 3.13\frac{\text{rad}}{\text{s}}$) y aplicando la expresión del péndulo simple para obtener la gravedad, $g = Lw^2$, luego:

$$g = 1\text{ m} \left(3.13\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

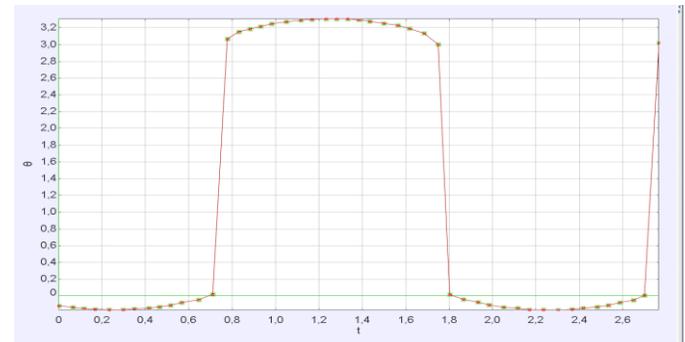


FIGURA 17. Gráficas del ángulo en función del tiempo, el plano cartesiano que se tomó para realizar esta gráfica, es como se indica en la Figura 2.

La figura 17 muestra el ángulo en función del tiempo. Para tomar los datos el plano cartesiano en Tracker se tomo como se indica en la Figura 2. Tracker toma el ángulo $\theta_0 = 10^\circ = 0.174\text{ rad}$, luego en la posición de equilibrio lo toma como $\theta = 0^\circ\text{ rad}$ y $t = 0.710\text{ s}$, pero cuando la masa pasa al IV cuadrante, Tracker no sigue la continuidad de los grados, sino que toma el ángulo de $\theta_0 = 170^\circ = 2.932\text{ rad}$, cómo se indica en la figura 17.

F. Energía del sistema masa-cuerda sin fricción

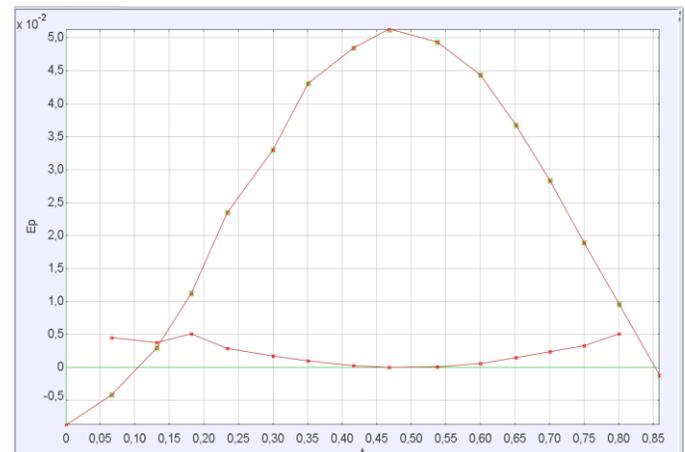


FIGURA 18. Gráficas energía cinética de menor amplitud (cóncava hacia arriba) y la energía potencial de mayor amplitud (cóncava hacia abajo), obtenida con Tracker.

En la Figura 18 muestra la gráfica de energía cinética y la energía potencia gravitacional en función del tiempo. Donde el valor mayor de la energía potencial gravitacional y cinética son respectivamente, $E_p = 0.028$ J (en $t = 0.57$ s) y $K = 0.0096$ J. El punto donde las dos energías son iguales es: $E_p = K = 0.00414$ J (en $t = 0.222$ s).

Se puede notar que al sumar éstas dos energías no dan un valor constante, porque la energía potencial gravitacional es mucho mayor que la energía cinética. Pero, si se puede apreciar que en $t = 0.468$ s, la $E_p = 0.051$ J y la $K = 0.000001$ J.

G. Dinámica del sistema masa-cuerda con fricción

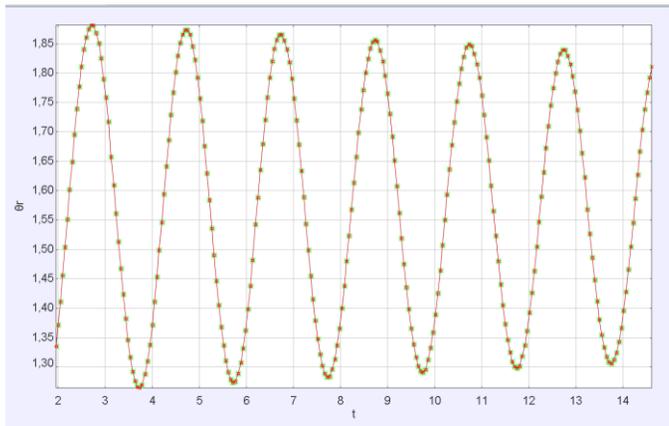


FIGURA 19. Gráfica de posición angular como funciones del tiempo del sistema masa-cuerda de un oscilador amortiguado subcrítico, obtenida con Tracker.

La Figura 19 corresponde a la posición angular y su ecuación correspondiente es la ecuación (41) la cual se obtuvieron con el programa Tracker.

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \text{sen}(w^*t + \varphi). \quad (43)$$

Donde para calcular la función $\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t}$ que corresponde a los picos positivos de la Figura 19 se realizó la gráfica y ajuste en Excel que se muestra en la Figura 20.

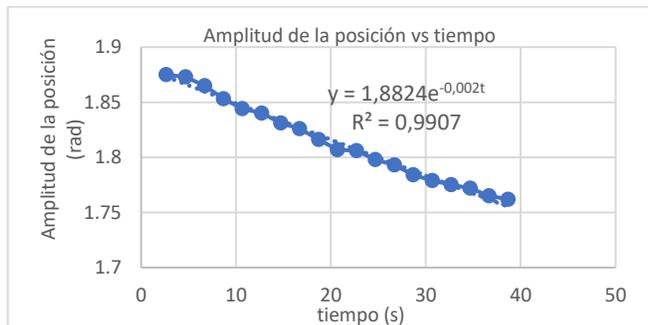


FIGURA 20. Gráfica de la amplitud del eje y en función del tiempo del oscilador subcrítico

$$\theta_{\text{máx}} = 1.88e^{-0.002t} \quad (44)$$

Donde se obtuvo la ecuación (44). Para el cálculo de a frecuencia angular de la oscilación amortiguada hacemos uso de la ecuación (17), sustituyendo los datos tenemos que:

$$w^* = \sqrt{\left(3.47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \left(0.097 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2},$$

$$w^* = \sqrt{12,04 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} - 0.0094 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}},$$

$$w^* = 3.46 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (45)$$

De acuerdo a las ecuaciones: 14, 18, 44 y 45, la posición transversal en función del tiempo sería igual a:

$$\theta(t) = 0.3199e^{-0.097t} \text{cos}(3.46t). \quad (46)$$

H. Energía del oscilador amortiguado con pérdidas

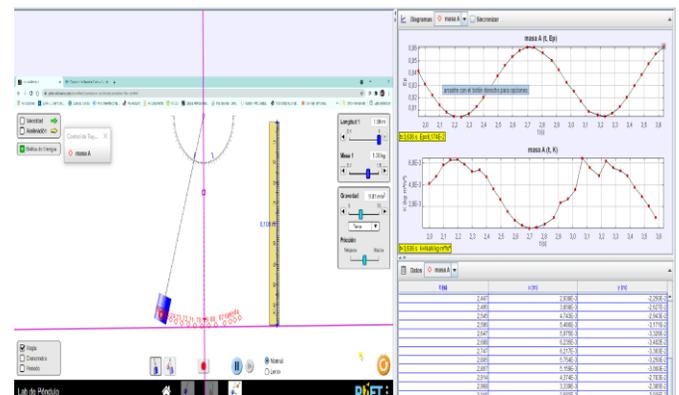


FIGURA 21. Sistema de referencia que se tomó para realizar las gráficas de la energía

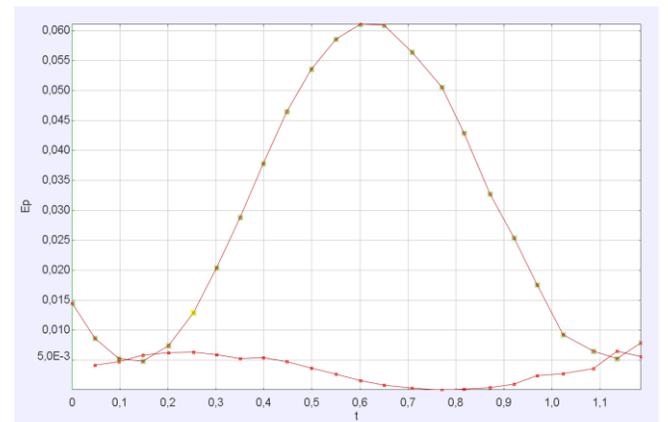


FIGURA 22. Gráfica de energía cinética cóncava hacia arriba de menor amplitud y gráfica de la energía potencial de mayor amplitud cóncava hacia abajo, obtenida con Tracker.

La Figura 22 muestra la gráfica de energía cinética y la energía potencia gravitacional en función del tiempo. Donde el valor mayor de la energía potencial gravitacional y energía cinética son respectivamente, $E_p = 0.061$ J (en $t = 2.69$ s) y $K = 0.0063$ J (en $t = 2.19$ s). El punto donde las dos energías son iguales es: $E_p = K = 0.005$ J (en $t = 2.245$ s).

Se puede notar que al sumar éstas dos energías no dan un valor constante, porque la energía potencial gravitacional es mucho mayor que la energía cinética. Pero, si se puede apreciar que en $t = 2.69$ s, la $E_p = 0.0611$ J y la $K = 0.000002$ J.

El hecho de que al sumar la energía cinética más la energía potencial no de un valor constante es por los efectos de fricción que se incluyeron en la simulación.

V. CONCLUSIONES

Estudiamos el Movimiento Armónico Simple y el oscilador subcrítico, sin y con fricción de los sistemas: masa-resorte y cuerda-masa usando Tracker para obtener los datos, gráficas y ecuaciones como la dinámica y la energía mecánica de cada uno de estos sistemas.

Con los dos laboratorios caseros del sistema masa-resorte (con y sin fricción) pudimos obtener usando Tracker todas las ecuaciones y gráficas que presentan los textos de física sobre estos temas y lo más importante que se pudo observar las gráficas de las energías cinética y energía potencial elástica en función del tiempo y de la posición tanto para sistemas oscilatorios como para sistemas oscilatorio amortiguado; mostrando los puntos fundamentales como por ejemplo con que valores del tiempo o de la posición las energías son iguales o una es mayor (o menor) que la otra. Algo que si se muestra en algunos textos de física pero que no explican como se realiza en este trabajo.

Con el laboratorio virtual de Phet Colorado titulado “Lab de Péndulo” se obtuvo los datos, gráficas y ecuaciones que permitieron aplicar las ecuaciones que se encuentran en los textos de física correspondientes a este sistema. Lo más relevante es el estudio que se pudo realizar con relación a las energías cinética y potencial gravitacional; ya que se pudo

obtener gráficas y ecuaciones de las energías en función de la posición y del tiempo, temas que no los encuentras en los textos de física.

De acuerdo a lo anterior podemos afirmar que con este artículo demostramos la importancia que tiene Tracker y Phet Colorado para el proceso enseñanza – aprendizaje de la física ya que a partir de un laboratorio en tiempo real se pueden extraer las ecuaciones y gráficas que son comparables con las que se encuentran en los textos de física

Por lo tanto, podemos concluir que Tracker es una herramienta computacional muy poderosa en el estudio de ondas ya con un video se puede extraer mucha más información de la que se puede obtener en los textos física.

REFERENCIAS

- [1] Abdel Rahim, G. P., *Conceptos básicos de vibraciones y ondas*. (Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia, 2014).
- [2] Abdel Rahim, G. P, y Moreno, V. *Determinación del coeficiente de fricción dinámico con Tracker* (2022).
- [3] Abdel Rahim, G. P, y Moreno, V., *Cálculo De Las Ecuaciones Del Movimiento parabólico Usando Tracker*, Revista Educación en Ingeniería **17**, 45-51 (2022). <https://educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/1183>
- [4] *Phet Interactive Simulation*, (2022). Disponible en: <https://phet.colorado.edu/es/.Tracker>. Disponible en: <https://physlets.org/tracker/>.