

# Interpretación electrostática de los ceros de los polinomios de Chebyshev tipo III



Pablo A. Rosario-Roche<sup>1</sup>, Juan Toribio-Milane<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD).

<sup>2</sup>Instituto de Física e Instituto de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Santo Domingo, Santo Domingo 10105, República Dominicana.

E-mail: A22A86956@educacion.edu.do

(Recibido el 2 de febrero de 2024, aceptado el 30 de mayo de 2024)

## Resumen

Demostremos las propiedades de un sistema ortogonal de polinomios en el espacio de Hilbert de funciones y como caso particular mostramos la familia de polinomios ortogonales clásicos. Obtenemos los polinomios ortogonales de Chebyshev tipo III como solución a un problema de Sturm Liouville singular; y sobre estos demostramos una fórmula de Rodrigues, una función generadora, una relación de recurrencia a tres términos, una relación diferencial, operadores de ascenso y descenso, propiedades extremales y propiedades de sus ceros. Presentamos un modelo donde los ceros de estos polinomios pueden interpretarse como la solución de un problema de equilibrio electrostático de  $n$  cargas unitarias que se mueven en presencia de un potencial logarítmico.

**Palabras clave:** polinomios ortogonales, polinomios de Chebyshev tipo III, potencial logarítmico, equilibrio electrostático.

## Abstract

We prove the properties of an orthogonal system of polynomials in the Hilbert space of functions and as a particular case we show the family of classical orthogonal polynomials. We obtain the orthogonal Chebyshev type III polynomials as a solution to a singular Sturm Liouville problem; and on these we prove the Rodrigues formula, a generating function, a three-term recurrence relation, a differential relation, ascent and descent operators, extremal properties and properties of their zeros. We present a model where the zeros of these polynomials can be interpreted as the solution of an electrostatic equilibrium problem of  $n$  unit charges moving in the presence of a logarithmic potential.

**Keywords:** orthogonal polynomials, Chebyshev type III polynomials, logarithmic potential, electrostatic equilibrium.

## I. INTRODUCCIÓN

Sea  $\mu$  una medida de Borel finita, con soporte ( $supp(\mu)$ ) en un subconjunto cerrado  $\Omega$  de la recta real, formado por una cantidad infinita de puntos. En este trabajo utilizaremos el caso en que  $\Omega = [-1, 1]$ . Al espacio de todas las medidas  $\mu$  tales que,  $supp(\mu) \subset \Omega \subset \mathbb{R}$ , lo denotaremos por  $\mathbb{M}(\Omega)$ . Utilizaremos la notación  $\mathbb{P}$  para referirnos al espacio vectorial de todos los polinomios y  $\mathbb{P}_n$  para indicar el espacio vectorial formado por todos los polinomios con un grado máximo de  $n$ .

En este contexto, consideraremos la ortogonalidad de funciones en sentido general y de polinomios en particular, en el espacio de Hilbert  $L^2(\mu)$  para  $\mu \in \mathbb{M}(\Omega)$ . Sabemos que  $L^2(\mu)$  está formado por todas las funciones de cuadrado integrable con respecto a  $\mu$ , es decir,

$$L^2(\mu) = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}: \int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}, \quad (1)$$

donde  $d\mu(x) = \omega(x)dx$  y  $\omega(x)$  es una función de peso.

Sean  $p(x)$  y  $q(x)$  dos polinomios pertenecientes a  $\mathbb{P}$ , definimos según [1] y [2] el producto interior o producto

escalar entre  $p(x)$  y  $q(x)$  respecto a la medida  $\mu$ , como la integral

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_\Omega p(x)q(x)d\mu(x), \quad (2)$$

de (2) podemos definir una norma  $\|p\|_\mu = \sqrt{\langle p, p \rangle_\mu}$ . Usando este producto damos la siguiente definición.

**Definición 1.1 (Sucesión de polinomios ortogonales)**  
Consideremos una sucesión de polinomios  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ , decimos que esta es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\mu \in \mathbb{M}(\Omega)$ , si verifica que:

1.  $gr(p_n(x)) = n$ , para  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ .
2.  $\langle p_n(x), p_m(x) \rangle_\mu \begin{cases} \neq 0; & n = m, \\ = 0; & n \neq m. \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Si para todo  $n$ , la norma de  $p_n(x)$  es igual a uno, entonces  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a  $\mu$ .

Además, si el coeficiente principal de  $p_n(x)$  es igual a uno, entonces  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\mu$ , consultar [3, 4].

Un resultado que se puede deducir de la definición 1.1 y que usaremos en las demostraciones que daremos más adelante, es

$$\langle p_n, x^k \rangle = \int_{\Omega} p_n(x)x^k d\mu(x) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

si  $\Omega$  es no acotado, se exige que se verifique (3). Puesto que de la definición 1.1 no se puede garantizar la unicidad de una sucesión de polinomios ortogonales dada, en el siguiente teorema damos las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida  $\mu \in \mathbb{M}(\Omega)$ .

**Teorema 1.1 (Existencia y unicidad).** Si tenemos una medida  $\mu(x) \in \mathbb{M}(\Omega)$ , se puede concluir que existe una sucesión única de polinomios ortogonales  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  tal que:

- i.  $gr(p_n(x)) = n$ , para  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ .
- ii.  $p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_0$ , donde  $\alpha_n > 0$
- iii.  $\langle p_n, p_m \rangle_{\mu} = \int_{\Omega} p_n p_m d\mu(x) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$

**Demostración**

**Existencia**

Por inducción, para  $n = 0$ , se puede verificar que las condiciones se cumplen, tomando

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\Omega)}}$$

ya que  $gr(p_0(x)) = 0$ ,  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu(\Omega)}}$  es positivo, puesto que la medida es positiva y

$$\int_{\Omega} p_0(x)p_0(x)d\mu(x) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} d\mu(x) = 1.$$

Supongamos que existen  $k + 1$  polinomios  $p_0, p_1, \dots, p_k$  para  $k \in \mathbb{Z}^+$ , que cumplen las tres condiciones, para  $n, m \leq k$  y formamos el polinomio de grado  $k + 1$

$$\hat{p}_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{j=0}^k a_j p_j(x), \tag{4}$$

donde

$$a_j = \langle x^{k+1}, p_j(x) \rangle_{\mu}. \tag{5}$$

Este polinomio en (4) verifica trivialmente las primeras dos condiciones del teorema, para la tercera condición tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \hat{p}_{k+1}(x)p_i(x)d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} \left( x^{k+1} - \sum_{j=0}^k a_j p_j(x) \right) p_i(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} x^{k+1} p_i(x) d\mu(x) - \int_{\Omega} \sum_{j=0}^k [a_j p_j(x)] p_i(x) d\mu(x) \\ &= \langle x^{k+1}, p_i(x) \rangle_{\mu} - a_j, \end{aligned}$$

considerando (5)

$$\int_{\Omega} \hat{p}_{k+1}(x)p_i(x)d\mu(x) = a_j - a_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Puesto que  $\hat{p}_{k+1}(x) \neq 0$  y  $\mu(x) \in \mathbb{M}(\Omega)$  tenemos que

$$\int_{\Omega} \hat{p}_{k+1}(x)\hat{p}_{k+1}(x)d\mu(x) = \int_{\Omega} [\hat{p}_{k+1}(x)]^2 d\mu(x) = I > 0,$$

así que tomando el polinomio  $p_{k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{I}} \hat{p}_{k+1}(x)$ , se puede verificar que la sucesión  $p_0, p_1, \dots, p_{k+1}$  cumple las tres condiciones del teorema para  $n, m \leq k + 1$ , por lo que, está garantizada la existencia.

**Unicidad**

Supongamos que  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  y  $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$  son dos sucesiones de polinomios ortogonales que verifican las condiciones del teorema.

Como  $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$  forma una base del subespacio  $\mathbb{P}_n$ , es decir,  $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i q_i(x),$$

puesto que se verifica la propiedad iii del teorema se tiene que para  $\forall j$ , tal que  $0 \leq j < i$ ,

$$\langle p_n, q_j \rangle_{\mu} = \left\langle \sum_{i=0}^n a_i q_i(x), q_j \right\rangle_{\mu} = a_i = 0,$$

por lo que se concluye que  $p_n(x) = a_n q_n(x)$ , además sabemos que  $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle_{\mu} = 1$ , entonces

$\langle p_n(x), p_n(x) \rangle_{\mu} = \langle a_n q_n(x), a_n q_n(x) \rangle_{\mu} = a_n^2 = 1$ , entonces  $a_n = 1$  o  $a_n = -1$ , puesto que estas sucesiones verifican la primera condición del teorema se tiene que  $a_n = 1$ , así que

$$p_n(x) = q_n(x), \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

de modo que se verifica la unicidad, y se concluye la demostración. ■

En el siguiente teorema demostramos una de las propiedades principales que poseen los polinomios ortogonales.

**Teorema 1.2 (Relación de recurrencia).** Dada una medida  $\mu(x) \in \mathbb{M}(\Omega)$  y una sucesión de polinomios ortonormales asociados  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , entonces se verifica

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad (6) \\ \forall n \geq 1,$$

Siendo

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_0, \\ a_n = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} > 0, \quad b_n = \langle x, p_n^2(x) \rangle_{\mu}.$$

Demostración

Puesto que  $\{p_0, \dots, p_n\}$  es una base de  $\mathbb{P}_n$ , existen constantes reales  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tales que, de (6) tenemos

$$xp_n(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} p_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n c_k p_k(x),$$

además, si  $j < n - 1$  entonces  $gr(xp_j(x)) < n$ , multiplicando por  $p_j(x)$  en la expresión anterior, por ortogonalidad se tiene

$$\langle p_n(x), xp_j(x) \rangle_{\mu} \\ = \langle \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} p_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n c_k p_k(x), p_j(x) \rangle_{\mu} \\ = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \langle p_{n+1}, p_j \rangle_{\mu} + \langle \sum_{k=0}^n c_k p_k, p_j \rangle_{\mu} = 0,$$

por ortogonalidad sabemos que

$$\langle p_n(x), xp_j(x) \rangle_{\mu} = 0 \text{ y } \langle p_{n+1}(x), p_j(x) \rangle_{\mu} = 0,$$

así que

$$\langle \sum_{k=0}^n c_k p_k, p_j \rangle_{\mu} = c_j = 0,$$

por lo que

$$xp_n(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} p_{n+1}(x) + c_n p_n(x) + c_{n-1} p_{n-1}(x). \quad (7)$$

Ahora multiplicando por  $p_n(x)$  en (7) y considerando el producto con respecto a  $\mu$ , se tiene

$$\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle_{\mu} \\ = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \langle p_{n+1}(x), p_n(x) \rangle_{\mu} + c_n \langle p_n(x), p_n(x) \rangle_{\mu} \\ + c_{n-1} \langle p_{n-1}(x), p_n(x) \rangle_{\mu},$$

por ortogonalidad

$$\langle p_{n+1}(x), p_n(x) \rangle_{\mu} = \langle p_{n-1}(x), p_n(x) \rangle_{\mu} = 0,$$

así que

$$\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle_{\mu} = \langle x, p_n^2(x) \rangle_{\mu} = c_n = b_n,$$

repetiendo este proceso, pero ahora multiplicando por  $p_{n-1}(x)$  en (7), se tiene que

$$\langle p_{n-1}(x), xp_n(x) \rangle_{\mu} \\ = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \langle p_{n-1}(x), p_{n+1}(x) \rangle_{\mu} + c_n \langle p_n(x), p_{n-1}(x) \rangle_{\mu} \\ + c_{n-1} \langle p_{n-1}(x), p_{n-1}(x) \rangle_{\mu} = c_{n-1} \|p_{n-1}\|_{\mu}^2 = c_{n-1},$$

así que

$$c_{n-1} = \langle p_{n-1}(x), xp_n(x) \rangle_{\mu} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \langle p_n(x), p_n(x) \rangle_{\mu} = a_n,$$

sustituyendo estos coeficientes  $c_n$  y  $c_{n-1}$  en (7) se tiene el resultado deseado,

$$\forall n \geq 1, xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x). \quad \blacksquare$$

Para una sucesión de polinomios ortogonales mónicos, la relación de recurrencia dada en (4), puede escribirse de la forma

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n^2 p_{n-1}(x). \quad (8)$$

Un resultado inmediato que se puede tener a partir de esta relación de recurrencia (8), es el siguiente.

**Teorema 1.3** Dos polinomios ortogonales consecutivos no tienen ceros comunes. Es decir,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \mathbb{C}_{p_n} \cap \mathbb{C}_{p_{n+1}} = \emptyset$ , donde  $\mathbb{C}_{p_n}$  denota el conjunto de ceros de un polinomio  $p_n$ .

**Demostración**

Sea  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos, supongamos por reducción al absurdo, que existen dos polinomios consecutivos que tienen un mismo cero, es decir,  $p_n(x_0) = p_{n+1}(x_0) = 0$ , de (8) se tiene que  $p_{n-1}(x_0) = 0$ . Usando (8) repetidamente se obtiene que  $p_0(x_0) = 0$ , lo cual no es posible por lo visto en el teorema 1.1, por lo que se concluye que dos polinomios ortogonales consecutivo no tienen ceros comunes. Estos resultados pueden consultarse en [4, 5].

Otra propiedad de los ceros de estos polinomios que nos será útil en la sección III, en la demostración de un modelo electrostático para los ceros de los polinomios de Chebyshev tipo III, se presenta en la siguiente proposición.

**Proposición 1.1** Sea  $p_n(x)$ , el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto de la medida  $\mu(x) \in \mathbb{M}(\Omega)$ , entonces  $p_n(x)$  tiene exactamente  $n$  ceros en el interior de  $\Omega$ .

**Demostración**

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_k$  los ceros del polinomio  $p_n(x)$ , en el interior de  $\Omega$ , donde el signo de  $p_n(x)$  cambia. Supongamos que  $k < n$ , por ortogonalidad se tiene

$$\left\langle \prod_{i=1}^k (x - x_i), p_n(x) \right\rangle_{\mu} = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^k (x - x_i) p_n(x) d\mu = 0, \quad (9)$$

además, puesto que  $\prod_{i=1}^k (x - x_i) p_n(x)$  no cambia de signo en el interior de  $\Omega$ , su integral en (9) debe ser distinta de cero. Por lo que tenemos una contradicción de suponer que  $k < n$ , así que  $k \geq n$  y sabemos que no puede ser mayor que el grado del polinomio, así que  $k = n$ . ■

Dentro del conjunto de los polinomios ortogonales, una de las familias que ha sido más estudiada, es la de los polinomios ortogonales clásicos (ver [4]). Estos son los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (con los casos especiales de Legendre, Chebyshev y Gegenbauer). En la siguiente subsección introducimos esta familia de polinomios.

**A. Polinomios Ortogonales Clásicos**

Los polinomios ortogonales clásicos tienen su origen en una variedad de contextos prácticos y modelos, surgiendo como soluciones a ecuaciones diferenciales y problemas de Sturm-Liouville que están relacionados con problemas de contornos. Según [2], se atribuye al matemático Legendre el descubrimiento del primer conjunto de estos polinomios en 1784.

**Definición 1.2** Una sucesión de polinomios ortogonales  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  se dice clásica, si cada polinomio de la sucesión es solución polinómica de una ecuación diferencial de segundo orden del tipo,

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0,$$

donde  $P(x)$  es polinomio de grado menor o igual que dos,  $Q(x)$  es un polinomio de grado uno y  $\lambda_n$  es un número real.

Milovanović y Mitrinović en [6] definen los polinomios ortogonales clásicos, como aquellos que se pueden generar por una fórmula de Rodrigues

$$\xi_n(x) = \frac{1}{B_n \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \rho^n(x)], n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

donde  $B_n$  es una constante que depende de  $n$ ,  $\rho$  es un polinomio cuyo grado es menor o igual que dos, y no depende de  $n$ ,  $\omega(x)$  es la función de peso, una función positiva, integrable sobre  $(-1, 1)$ .

**TABLA I.** Polinomios ortogonales clásicos.

Polinomios	Representación	Dominio	Medida ( $d\mu(x) = \omega(x)dx$ )
Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}$	$[-1, 1]$	$(x - 1)^\alpha (x + 1)^\beta dx, \alpha, \beta > -1$
Gegenbauer	$C_n^\alpha$	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^\alpha dx, \alpha = \beta > -1$
Legendre	$P_n$	$[-1, 1]$	$dx, \alpha = \beta = 0$
Chebyshev I	$T_n$	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-1/2} dx, \alpha = \beta = -1/2$
Chebyshev II	$U_n$	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{1/2} dx, \alpha = \beta = 1/2$
<b>Chebyshev III</b>	<b><math>V_n</math></b>	<b><math>[-1, 1]</math></b>	<b><math>(1 - x)^{-1/2} (1 + x)^{1/2} dx, \alpha = -1/2, \beta = 1/2</math></b>
Chebyshev IV	$W_n$	$[-1, 1]$	$(1 - x)^{1/2} (1 + x)^{-1/2} dx, \alpha = 1/2, \beta = -1/2$
Laguerre	$L_n^\alpha$	$[0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x} dx, \alpha > -1$
Hermite	$H_n$	$\mathbb{R}$	$e^{-x^2} dx$

En la tabla I presentamos los polinomios ortogonales clásicos, junto a su representación, dominio de definición y su función peso. En la siguiente sección nos enfocaremos en el caso específico de los polinomios de Chebyshev tipo III.

**II. PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE CHEBYSHEV TIPO III ( $V_n(x)$ )**

Los polinomios de Chebyshev tipo III se pueden obtener como un caso particular de los polinomios de Jacobi, los cuales satisfacen la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + \lambda_n y = 0, \quad (11)$$

$$\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1); n = 0, 1, 2, \dots$$

Si consideramos  $\alpha = -1/2$  y  $\beta = 1/2$ , la ecuación (11) se reduce a

$$(1 - x^2)y''(x) + (1 - 2x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0, \quad (12)$$

$$\lambda_n = n(n + 1), n = 0, 1, 2, \dots$$

Se obtienen los polinomios de Chebyshev tipo III como solución a esta ecuación.

Si multiplicamos la ecuación (12) por  $\omega(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x \in (-1, 1)$ , tenemos

$$\frac{d}{dx} \left[ (1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} y = 0,$$

de la cual se deduce el operador de Sturm Liouville para los polinomios de Chebyshev tipo III

$$\Theta y(x) = \left\{ \frac{d}{dx} \left[ \zeta(x) \frac{d}{dx} \right] + n(n+1)\omega(x) \right\} y(x), \quad (13)$$

donde  $\zeta(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ .

Si consideramos las siguientes condiciones de contornos

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= 0, \\ \zeta(-1) &= 0, \\ \left| \lim_{x \rightarrow \pm 1} y(x) \right| &< \infty, \end{aligned} \quad (14)$$

tenemos un problema de Sturm Liouville singular, tomando  $x = \cos \theta$  y  $\lambda_n = n(n+1)$  en (12), (ver [2]) la ecuación para  $g(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y(x)$ , viene dada por

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 g = 0. \quad (15)$$

Como se puede consultar en [7], puesto que  $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ , esta ecuación (15) tiene dos soluciones

$$\begin{aligned} g_1(\theta) &= \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right], \\ g_2(\theta) &= \text{sen} \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right], \end{aligned}$$

puesto que  $g(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y(x)$ , tenemos

$$y_1(x) = \frac{\cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right]}{\cos(\theta/2)}, \quad \theta \neq \pi, \quad (16)$$

$$y_2(x) = \frac{\text{sen} \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right]}{\cos(\theta/2)}, \quad \theta \neq \pi. \quad (17)$$

Para profundizar más en los problemas de Sturm Liouville y las propiedades de sus autofunciones se puede consultar [7,8]. Ahora debemos verificar que se cumplen las condiciones (14) para (16) y (17).

Del operador dado en (13) sabemos que

$$\zeta(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

el cual verifica trivialmente las condiciones  $\zeta(\pm 1) = 0$ .

Puesto que  $x = \cos \theta$  entonces para  $x = -1$  y  $x = 1$ , tenemos  $\theta = \pi$  y  $\theta = 0$ , respectivamente. Se puede observar que ambas soluciones tienen una singularidad en

$\theta = \pi$ , ya que  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Mientras que  $y_2(x)$  tiene una singularidad esencial en  $\theta = \pi$ , la singularidad en  $y_1(x)$  es removible, aplicando L' Hopital, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} y_1(x) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} y_1(\cos \theta) = (2n+1)(-1)^n,$$

por lo que, la solución (16) es la que satisface las condiciones de nuestro problema de Sturm Liouville singular (14), para cada valor de  $n$  tenemos una solución llamada autofunción de (13) y su autovalor correspondiente.

Este conjunto de soluciones (16), son los polinomios de Chebyshev tipo III y se representan de la siguiente forma

$$V_n(x) = \frac{\cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right]}{\cos(\theta/2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

De (18), obtenemos los primeros siete polinomios de Chebyshev tipo III

$$\begin{aligned} V_0(x) &= 1, \\ V_1(x) &= 2x - 1, \\ V_2(x) &= 4x^2 - 2x - 1, \\ V_3(x) &= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \\ V_4(x) &= 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1, \\ V_5(x) &= 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1, \\ V_6(x) &= 64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1. \end{aligned}$$

Estos polinomios constituyen una sucesión de polinomios ortogonales en  $[-1,1]$  con respecto a la función de peso

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad (19)$$

y por lo tanto poseen todas las propiedades que vimos en la sección I. En las siguientes subsecciones demostraremos estas propiedades para  $V_n(x)$ . Desde ahora en adelante la expresión (2) trabajaremos con la medida de Chebyshev tipo III, y usaremos la notación

$$\begin{aligned} &\langle V_n(x), V_m(x) \rangle_\mu \\ &= \langle V_n(x), V_m(x) \rangle_\omega = \int_{-1}^1 V_n(x) V_m(x) \omega(x) dx. \end{aligned}$$

### A. Fórmula de Rodrigues

En esta subsección usaremos una expresión para los polinomios de Chebyshev tipo III, que demostramos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** Los polinomios de Chebyshev tipo III se pueden expresar como

$$V_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v \quad (20)$$

**Demostración**

Si expresamos (12) en su forma estándar, tenemos

$$y''(x) + \frac{1-2x}{(1-x^2)}y'(x) + \frac{n(n+1)}{(1-x^2)}y(x) = 0, \quad (21)$$

es evidente que (21) tiene singularidades en  $x_0 = \pm 1$ , además

$$\tau_1(x) = (x-x_0)\frac{1-2x}{1-x^2}$$

y

$$\tau_2(x) = (x-x_0)^2\frac{n(n+1)}{1-x^2},$$

son analíticas en  $x_0 = \pm 1$ , por lo que  $x_0 = 1$  y  $x_0 = -1$  son puntos singulares regulares de (21), por el teorema de Frobenius, existe al menos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v (x-1)^{v+r}, \quad a_0 \neq 0, \quad (22)$$

donde  $r$  y  $a_v$  son constantes a determinar.

De (22) tenemos que

$$y'(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r)(x-1)^{v+r-1}, \quad (23)$$

y

$$y''(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r)(v+r-1)(x-1)^{v+r-2}, \quad (24)$$

reemplazando (22), (23) y (24) en (12) tenemos

$$\begin{aligned} & 2ra_0(x-1)^{r-1}\left(\frac{1}{2}-r\right) \\ & + \sum_{v=0}^{\infty} [(\lambda_n - (v+r)(v+r+1))a_v \\ & - 2(v+r+1)\left(v+r+\frac{1}{2}\right)a_{v+1}](x-1)^{v+r} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

de (22) y (25) tenemos

$$2r\left(\frac{1}{2}-r\right) = 0, \quad (26)$$

$$a_{v+1} = \frac{\lambda_n - (v+r)(v+r+1)}{2(v+r+1)\left(v+r+\frac{1}{2}\right)} a_v, \quad v \geq 0, \quad (27)$$

de (26) se tiene que  $r = 0$  o  $r = \frac{1}{2}$ , para  $r = \frac{1}{2}$  la solución que se tiene no es polinomial, por lo que consideraremos el caso  $r = 0$ . En (27) considerando  $r = 0$  y  $\lambda_v = v(v+1)$  tenemos

$$a_{v+1} = \frac{\lambda_n - \lambda_v}{2(v+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} a_v, \quad v \geq 0, \quad (28)$$

una expresión más general que se puede obtener de (28), considerando valores de  $v$ , es

$$a_v = \frac{(\lambda_n - \lambda_0)(\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_{v-1})}{2^v v! \left(\frac{1}{2} + 0\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} + v - 1\right)} a_0, \quad v \geq 1, \quad (29)$$

de modo que, de (29) podemos obtener los  $a_v$  en término de  $a_0$ .

Considerando las relaciones

$$\frac{\Gamma(x+v)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2) \dots (x+v-1) = (x)_v, \quad (30)$$

donde  $(x)_v$  representa el Pochhammer de  $x$ , y  $\Gamma(x)$  es Gamma de  $x$ , además

$$(\lambda_n - \lambda_0)(\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_{v-1}) = \frac{n!}{(n-v)!} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma(n+1)},$$

podemos simplificar (29)

$$a_v = \frac{n!}{(n-v)!} \frac{\Gamma(n+1+v)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^v v! \Gamma(n+1)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} a_0, \quad v \geq 1, \quad (31)$$

por lo que una solución de (12) es

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v (x-1)^v \\ &= a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-v)!} \frac{\Gamma(n+1+v)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^v v! \Gamma(n+1)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} a_0 (x-1)^v \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n}{v} \frac{\Gamma(n+1+v)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} a_0 \left(\frac{x-1}{2}\right)^v, \end{aligned}$$

donde

$$\binom{n}{v} = \frac{n!}{v!(n-v)!}$$

sí en (31) tomamos  $a_0 = 1$ ,

$$y(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n}{v} \frac{\Gamma(n+1+v)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v,$$

por medio de la cual se obtienen los polinomios de Chebyshev tipo III, validando así la expresión en (20). ■

Si consideramos el primer ( $v = 0$ ) y último ( $v = n$ ) término en (20), podemos obtener una expresión para los polinomios de Chebyshev tipo III mónicos,

$$V_n(x) = 1 + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2n+1)}{2^n n! \Gamma(n+\frac{1}{2})} (x-1)^n + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} \frac{\Gamma(n+1+\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x-1}{2}\right)^\nu, \quad (32)$$

de (32) podemos obtener

$$V_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

y el coeficiente principal

$$\kappa_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})2^n n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

usando la relación dada en (30) y la propiedad

$$(2n+1)!! = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n n!},$$

Tenemos

$$\kappa_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n n!} = \frac{2^n}{(2n+1)!!} \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n n!} = 2^n \quad \kappa_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

de (34) podemos obtener los polinomios mónicos de Chebyshev tipo III

$$\hat{V}_n(x) = \kappa_n^{-1} V_n(x) \in \hat{\mathbb{P}}_n, \quad (35)$$

donde  $\hat{\mathbb{P}}_n$  denota el espacio de los polinomios mónicos de grado menor o igual que  $n$ .

Para obtener un caso particular de la fórmula de Rodrigues dada en (10), consultar [09], consideramos la función

$$h(x) = (1+x)^{m+\frac{1}{2}}(1-x)^{m-\frac{1}{2}}, \quad (36)$$

si  $n < m$ , la  $n$ -ésima derivada de (36) contiene un factor

$$(1+x)^{m-n+\frac{1}{2}}(1-x)^{m-n-\frac{1}{2}},$$

por lo tanto

$$\left. \frac{d^n h(x)}{dx^n} \right|_{x=\pm 1} = \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{m-\frac{1}{2}}(1+x)^{m+\frac{1}{2}} \right\}_{x=\pm 1} = 0,$$

de este resultado se sigue que

$$\langle 1, \frac{d^n h(x)}{dx^n} \rangle = 0,$$

donde

$$\langle 1, \frac{d^n h(x)}{dx^n} \rangle = \int_{-1}^1 \frac{d^n h(x)}{dx^n} dx,$$

ahora si consideramos el producto, obtenemos

$$\langle x^n, \frac{d^n h(x)}{dx^n} \rangle = 0 \quad m > n. \quad (37)$$

De (36) definamos el polinomio de grado  $m$ ,  $\xi_m(x)$  como

$$\xi_m(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{d^m h(x)}{dx^m},$$

entonces

$$\langle x^n, \xi_m(x) \rangle_\omega = \langle x^n, \frac{d^m h(x)}{dx^m} \rangle = 0, \quad n < m. \quad (38)$$

De (38) el polinomio  $\xi_m(x)$  es ortogonal a  $x^n$  para todos los valores de  $n < m$ . Además, como  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  es una base de  $\mathbb{P}_n$  y de (37) y (38) se tiene que  $\xi_m(x)$  es ortogonal a  $\xi_n(x)$  con respecto a (19) para todos los valores de  $n < m$ . Por lo tanto, estos polinomios deben ser múltiplos de los polinomios de Chebyshev tipo III dados en (18), es decir,

$$\eta_n \xi_n(x) = V_n(x), \quad \eta_n = \frac{V_n(x)}{\xi_n(x)}, \quad (39)$$

evaluando en  $x = 1$ , de acuerdo con Zsego [3] tenemos

$$\xi_n(1) = \frac{2^n n! P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(1)}{(-1)^n}, \quad (40)$$

donde

$$P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(1) = \binom{n - \frac{1}{2}}{n},$$

usando la siguiente propiedad

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)},$$

tenemos

$$P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(1) = \frac{(n - \frac{1}{2})!}{n!(n - \frac{1}{2} - n)!} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})},$$

así que reemplazando (33) y (40) en (39) tenemos

$$\eta_n = \frac{V_n(1)}{\xi_n(1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) (-1)^n \Gamma(n+1)}{2^n n! \Gamma(n + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) (-1)^n}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})},$$

reemplazando esta expresión en  $\eta_n \xi_n(x) = V_n(x)$ , tenemos la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Chebyshev tipo III

$$V_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (-1)^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} d^n h(x)}{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) dx^n}. \quad (41)$$

Si comparamos (41) con (10), tenemos que

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad B_n = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (-1)^n}, \quad \rho(x) = 1 - x^2.$$

Demostremos algunas propiedades extremales que poseen estos polinomios, seguidas de la siguiente definición.

**Definición 2.1. (Polinomio mónico extremal)**

Sea  $\|\cdot\|$  una norma sobre el espacio de polinomios  $\mathbb{P}_n$ , llamamos  $n$ -ésimo polinomio mónico extremal con respecto a  $\|\cdot\|$ , a todo polinomio de la forma  $\hat{\psi}_n(x) = x^n - \varphi(x)$ , donde  $\varphi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ , tal que

$$\|\hat{\psi}_n(x)\| = \min_{\hat{p}(x) \in \mathbb{P}_n} \{\|\hat{p}_n(x)\|\}.$$

Consideraremos la siguiente norma, como un caso particular de (1)

$$\|f\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d\mu = \omega(x) dx,$$

definida sobre  $\mathbb{P}_n$ .

En el siguiente teorema, demostraremos que los  $V_n(x)$  forman un sistema ortogonal en el espacio  $L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)[-1, 1]$  con respecto a  $\omega(x)$  y daremos una expresión para su norma.

**Teorema 2.2. Si**

$$\langle V_n(x), V_m(x) \rangle_\omega = \int_{-1}^1 V_n(x) V_m(x) \omega(x) dx, \quad (42)$$

entonces

$$\langle V_n(x), V_m(x) \rangle_\omega = 0, \quad n \neq m, \quad (43)$$

y

$$\langle V_n(x), V_n(x) \rangle_\omega = \pi. \quad (44)$$

**Demostración**

Sin pérdida de generalidad asumiremos  $m \leq n$ . Ya que

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} V_n(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n-1,$$

y de (41)

$$\langle V_n(x), V_m(x) \rangle_\omega = \frac{(-1)^n}{2^n \Gamma(n+1)} \int_{-1}^1 V_n(x) \frac{d^n h(x)}{dx^n} dx,$$

integrando por partes  $n$  veces

$$\langle V_n(x), V_m(x) \rangle_\omega = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \int_{-1}^1 \frac{d^n V_n(x)}{dx^n} h(x) dx. \quad (45)$$

Por lo que de (45) podemos obtener (43) del hecho de que para  $m < n$  se tiene

$$\frac{d^n V_n(x)}{dx^n} \equiv 0,$$

ahora consideremos  $m = n$  para obtener (44), de (42) haciendo la sustitución  $x = \cos\theta$  y considerando (18) se tiene

$$\begin{aligned} & \langle V_n(x), V_n(x) \rangle_\omega \\ &= - \int_0^\pi \omega(\cos\theta) \frac{\cos^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos^2\theta} (-\sin\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \cos^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Del teorema 2.2, si tomamos

$$\check{V}_n(x) = \frac{V_n(x)}{\|V_n(x)\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}} = \frac{V_n(x)}{\sqrt{\pi}} \quad (46)$$

Tenemos

$$\int_{-1}^1 \check{V}_n(x) \check{V}_m(x) \omega(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

de manera que  $\check{V}_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  en (46) representa un polinomio de Chebyshev tipo III ortonormal, es decir, de norma uno. El siguiente teorema expresa una propiedad extremal para los polinomios mónicos de Chebyshev tipo III.

**Teorema 2.3. Para todo polinomio  $\hat{p} \in \mathbb{P}_n$ , el polinomio**

$$\hat{V}_n(x) = \frac{V_n(x)}{2^n},$$

tiene la menor norma en el espacio  $L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)[-1, 1]$ . Además

$$\min \left\{ \|\hat{p}\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} : \hat{p} \in \mathbb{P}_n \right\} = \|\hat{V}_n(x)\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

**Demostración**

Supongamos que existe  $\hat{p}_n(x) \in \mathbb{P}_n$  tal que

$$\|\hat{p}_n\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \leq \|\hat{V}_n\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \quad (47)$$

del teorema de Pitágoras se tiene

$$\|\hat{p}_n\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}^2 = \|\hat{V}_n\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}^2 + \|\hat{p}_n - \hat{V}_n\|_{L_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}^2, \quad (48)$$

de (47) tenemos

$$\|\hat{p}_n\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}} - \|\hat{V}_n\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}} \leq 0,$$

considerando esto en (48)

$$\|\hat{p}_n - \hat{V}_n\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}^2 \leq 0, \quad (49)$$

puesto que (49) no puede ser menor que cero, tenemos que

$$\|\hat{p}_n - \hat{V}_n\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}^2 = 0, \text{ entonces } \hat{p}_n - \hat{V}_n = \mathbf{0},$$

$$\hat{p}_n \equiv \hat{V}_n,$$

por lo que se concluye que el polinomio mónico extremal en el espacio  $L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}[-1, 1]$  es  $\hat{V}_n(x)$ .

De (35), (44) y (46) se tiene que

$$\|\hat{V}_n(x)\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}} = \left\| \frac{V_n(x)}{2^n} \right\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}$$

$$= \left| \frac{1}{2^n} \right| \|V_n(x)\|_{L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

Otra forma de generar estos polinomios es por medio de una función generadora.

## B. Una función generatriz

Se pueden deducir diferentes funciones generatrices a partir de las cuales se pueden generar los polinomios de Chebyshev tipo III, una de ellas es tomando la parte real de la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{(n+1/2)i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{1 - re^{i\theta}} \quad |r| < 1. \quad (50)$$

En ambos lados de la ecuación (50) separaremos la parte real de la imaginaria

$$\frac{e^{i\theta/2}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{1 - r \cos(\theta) - ir \operatorname{sen}(\theta)}$$

$$= \frac{[\cos(\frac{\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})][(1 - r \cos(\theta)) + ir \operatorname{sen}(\theta)]}{[(1 - r \cos(\theta)) - ir \operatorname{sen}(\theta)][(1 - r \cos(\theta)) + ir \operatorname{sen}(\theta)]}$$

$$= \frac{(1 - r) \cos(\frac{\theta}{2})}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} + i \frac{(1 + r) \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}. \quad (51)$$

Desarrollando el lado izquierdo de (50)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[ \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

Interpretación electrostática de los ceros de los polinomios de Chebyshev tipo III

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) + i \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right), \quad (52)$$

de (50), (51) y (52) tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) = \frac{(1 - r) \cos(\frac{\theta}{2})}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}, \quad |r| < 1 \quad (53)$$

tomando (53) y haciendo  $x = \cos\theta$ , tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1 - r}{1 - 2rx + r^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 - r}{1 - 2rx + r^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n V_n(x) = \frac{1 - r}{1 - 2rx + r^2}, \quad (54)$$

de (54) podemos obtener los  $V_n(x)$ ,

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n F(x, 0)}{\partial r^n} = V_n(x), \quad F(x, r) = \frac{1 - r}{1 - 2rx + r^2}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Definiremos una relación de recurrencia a tres términos y una relación diferencial que nos permitirán obtener los operadores de ascenso y descenso.

## C. Relación de recurrencia a tres términos

Obtendremos el caso particular de (4) para  $V_n(x)$ , consideremos la identidad

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta$$

$$= 2 \cos(\theta) \cos\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta, \quad (55)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

al dividir (55) por  $\cos(\theta/2)$

$$\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\cos\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= 2 \cos(\theta) \frac{\cos\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

y de (18), tenemos

$$V_n(x) + V_{n-2}(x) = 2x V_{n-1}(x); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

Remplazando  $n$  por  $n + 1$  en (56), tenemos la relación de recurrencia a tres términos

$$V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x); \quad n = 1,2,3,4, \dots \quad (57)$$

con  $V_0(x) = 1$  y  $V_1(x) = 2x - 1$ .

### D. Relación diferencial

Si  $x = \cos \theta$  entonces  $\frac{dx}{d\theta} = -\text{sen } \theta$ , por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(V_n(x)) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right) = -\text{sen } \theta V'_n(x) \\ &= \frac{- \left( n + \frac{1}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\cos^2 \theta} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\cos^2 \theta}, \\ V'_n(x) &= \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\text{sen } \theta \cos^2 \theta} \\ &\quad - \frac{\frac{1}{2} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\text{sen } \theta \cos^2 \theta}, \end{aligned}$$

sí multiplicamos esta expresión, por  $(1 - x^2) = 1 - \cos^2 \theta$  y simplificamos, tenemos

$$\begin{aligned} &(1 - \cos^2 \theta) V'_n(x) \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} \text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) V_n(x), \end{aligned} \quad (58)$$

con algunos cálculos trigonométricos se puede verificar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} \text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \\ &= \frac{1}{2} (V_{n-1}(x) - V_{n+1}(x)), \end{aligned} \quad (59)$$

sí remplazamos (59) en (58) tenemos

$$\begin{aligned} &(1 - \cos^2 \theta) V'_n(x) \\ &= \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) (V_{n-1}(x) - V_{n+1}(x)) - \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) V_n(x) \\ &= \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) (V_{n-1}(x) - V_{n+1}(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 - x) V_n(x), \end{aligned} \quad (60)$$

$n = 1,2,3,4, \dots$

y (60) es una relación diferencial para los polinomios de Chebyshev tipo III. Usaremos esta relación para generar dos operadores diferenciales asociados a estos polinomios, conocidos como operadores de descenso y de ascenso.

### E. Operador de descenso y operador de ascenso Operador de descenso

Despejemos  $-V_{n+1}(x)$  en (60)

$$\begin{aligned} &-V_{n+1}(x) = \\ &-V_{n-1}(x) + \frac{4}{2n+1} (1-x^2) V'_n(x) + \frac{2}{2n+1} V_n(x), \end{aligned}$$

$n = 1,2,3,4, \dots$

ahora sustituimos esto en la relación de recurrencia (57) y tenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{2n}{2n+1} x V_n(x) + \frac{1}{2n+1} V_n(x) + \frac{2}{2n+1} (1-x^2) V'_n(x). \\ &-V_{n-1}(x) = S_n^- V_n(x) \\ &= \frac{2}{2n+1} \left\{ nx + \frac{1}{2} + (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\} V_n(x), \end{aligned}$$

por lo que nuestro operador de descenso es

$$S_n^- = \frac{2}{2n+1} \left\{ nx + \frac{1}{2} + (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\}, \quad (61)$$

$n = 1,2,3,4, \dots$

Por lo tanto, aplicando (61) a  $V_n(x)$  podemos obtener  $V_{n-1}(x)$ .

### Operador de ascenso

De manera similar a lo que hicimos anteriormente, despejemos  $-V_{n-1}(x)$  en (60)

$$\begin{aligned} &-V_{n-1}(x) = \\ &-V_{n+1}(x) - \frac{4}{2n+1} (1-x^2) V'_n(x) - \frac{2}{2n+1} (1-x) V_n(x) \end{aligned}$$

$n = 1,2,3,4, \dots$  sustituimos esta expresión en la relación de recurrencia (57) y tenemos

$$\begin{aligned} &V_{n+1}(x) \\ &= \frac{2n}{2n+1} (n+1)x V_n(x) - \frac{1}{2n+1} V_n(x) \\ &\quad - \frac{2}{2n+1} (1-x^2) V'_n(x). \end{aligned}$$

$$V_{n+1}(x) = S_n^+ V_n(x)$$

$$= \frac{2}{2n+1} \left\{ (n+1)x - \frac{1}{2} - (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\} V_n(x),$$

por lo que nuestro operador de ascenso es

$$S_n^+ = \frac{2}{2n+1} \left\{ (n+1)x - \frac{1}{2} - (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\}. \quad (62)$$

$n = 1,2,3,4, \dots$

Por lo tanto, aplicando (62) a  $V_n(x)$  podemos obtener  $V_{n+1}(x)$ .

Interpretación electrostática de los ceros de los polinomios de Chebyshev tipo III  
 sección plantearemos un modelo de equilibrio electrostático basado en los ceros de los polinomios de Chebyshev tipo III.

## F. Ceros de $V_n(x)$

A partir de la expresión trigonométrica (18) se puede ver que los ceros de  $V_n(x)$  en  $[-1,1]$ , corresponden a los ceros de  $\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]$  para  $\theta$  en  $[0, \pi]$ , por lo que,

$$\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] = 0,$$

Implica

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

si y solo si  $\theta = \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

por lo tanto

$$x_{n,k} = \cos\theta = \cos\left[\frac{2k-1}{2n+1}\pi\right].$$

Estos ceros verifican algunas propiedades que usaremos en la sección III, las cuales vimos en la sección I de manera general, consultar [3], por lo que se puede concluir que si  $V_n(x)$  representa los polinomios de Chebyshev tipo III, entonces

- $V_n(x)$  tiene exactamente  $n$  ceros simples en el intervalo  $(a, b)$ . (ver proposición 1.1).
- $\mathbb{C}_{V_n} \cap \mathbb{C}_{V_{n+1}} = \emptyset$ , (ver teorema 1.3).
- Los ceros de  $V_n(x)$  están entrelazados, es decir,  $x_{n+1,k+1} < x_{n,k} < x_{n+1,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$
- $\mathbb{C}_{V_n}$  es denso en  $[-1,1]$ .

De acuerdo con [10], Stieltjes planteó una interesante interpretación de los ceros de los polinomios de Laguerre, Hermite y Jacobi en términos de un problema de equilibrio electrostático. Partiendo de la suposición de que  $n$  cargas de un Coulomb son distribuidas en  $n$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en el intervalo  $(-1, 1)$ . La expresión

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|,$$

se conoce como discriminante de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Si las cargas se repelen de acuerdo con la ley del potencial logarítmico, entonces

$$-\log(D(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|},$$

representa la energía del sistema de cargas electrostáticas y el mínimo de esta expresión da el equilibrio electrostático. Los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  donde se obtiene el mínimo, son los lugares donde se asentarán las cargas. Stieltjes observó que las posiciones de estos puntos están estrechamente relacionadas con la posición de los ceros de los polinomios ortogonales clásicos.

A raíz de los trabajos de Stieltjes se han desarrollado investigaciones más recientes [11, 12] y [13]. En la siguiente

## III. MODELO ELECTROSTÁTICO DE LOS CEROS DE $V_n(x)$

Supongamos que tenemos  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $n$  puntos del intervalo  $(-1,1)$  en los cuales ubicamos  $n$  cargas unitaria, positivas, colocamos dos cargas positivas  $z_1 = 1/4$  y  $z_2 = 3/4$  en los extremos  $-1$  y  $1$ , respectivamente. Se puede concluir que, si la interacción de las cargas está definida por un potencial logarítmico, la energía total del sistema obedece al equilibrio electrostático, a saber, es mínima, en  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , cuando estos puntos coinciden con los ceros de los polinomios ortogonales de Chebyshev tipo III.

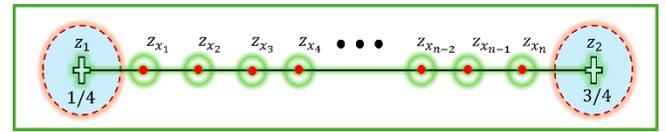


FIGURA 1. Interpretación electrostática de los ceros de  $V_n(x)$ .

### Demostración

Definamos la energía total del sistema como

$$\begin{aligned} E_T: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n v_{iz_1} + \sum_{i=1}^n v_{iz_2} \\ &= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log|x_i - x_j| \\ &\quad - z_1 \sum_{i=1}^n \log|x_i - 1| - z_2 \sum_{i=1}^n \log|x_i + 1|. \end{aligned} \quad (63)$$

Debemos localizar las posiciones de equilibrio del sistema, es decir, aquellas  $n$ -uplas que minimizan la energía total  $E_T$ . Por lo que, será necesario verificar la existencia y unicidad de ese mínimo. Si se toman las cargas ordenadas, resulta el subconjunto  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$  donde se busca la solución

$$\mathbb{Q} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : -1 \leq x_1, \dots, \leq x_n \leq 1\},$$

definamos la función

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-E_T(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (64)$$

es equivalente probar que  $E_T$  alcanza un mínimo en  $\mathbb{Q}$  a que  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  obtiene un máximo, pues basta tomar  $\log(T^{-1})$ .

Ya que  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es continua en  $\mathbb{Q}$  y, además,  $\mathbb{Q}$  es cerrado y acotado, y por tanto compacto (teorema del valor extremo [14, 15]). De aquí, se puede concluir que existe al menos una  $n$ -upla  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{Q}$  en la que  $T$  (64) y  $E_T$

(63) alcanzan sus valores extremos, estos no se alcanzan en la frontera de  $\mathbb{Q}$ , pues de no ser así sucedería alguna de las siguientes circunstancias

- i.  $\exists i \neq j: x_i = x_j$  por lo que  $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
- ii.  $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}: |x_i| = 1$  tal que  $E_T = 0$ ,

es decir, tendríamos que la energía total se hace infinita o es cero, lo cual no es posible.

Puesto que los valores extremos no se alcanzan en la frontera de  $\mathbb{Q}$ , se alcanzan en su interior, además  $T$  es diferenciable en todo el interior de  $\mathbb{Q}$ , por lo que no tiene puntos singulares, así que  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  es un punto crítico estacionario; además como  $T$  es no constante y analítica en el interior de  $\mathbb{Q}$ , por el teorema del módulo máximo [16], esta función no contiene extremos locales en el interior de  $\mathbb{Q}$  y por tanto en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  se alcanza un extremo global, lo que permite afirmar que en estas condiciones

$$\nabla T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \mathbf{0},$$

sí y solo si

$$\frac{\partial T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} &= \frac{\partial e^{-E_T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}}{\partial x_i} \\ &= - \frac{\partial E_T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \underbrace{e^{-E_T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}}_{\neq 0} = 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\partial E_T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} = 0,$$

pero si consideramos la expresión de la energía total (63) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{|x - y|} = - \frac{1}{x - y},$$

se puede ver que

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i^* - x_j^*} + \frac{z_1}{x_i^* - 1} + \frac{z_2}{x_i^* + 1} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{65}$$

de donde se obtiene un sistema no lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

El siguiente lema ayudará a relacionar la expresión (65) con los polinomios de Chebyshev tipo III, consultar [17] para su demostración.

**Lema 1.** Sea el polinomio  $\phi_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  y sea  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ ) fijo y arbitrario, se verifica

$$\frac{\phi_n''(x_k)}{\phi_n'(x_k)} = 2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_k - x_j}. \tag{66}$$

De modo que, podemos escribir la última igualdad en (65), usando (66) de la forma

$$\frac{1}{2} \frac{\phi_n''(x_k)}{\phi_n'(x_k)} + \frac{z_1}{x_k - 1} + \frac{z_2}{x_k + 1} = 0, \tag{67}$$

considerando  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  en (67) para  $x_k^*$  se tiene

$$[(x_k^*)^2 - 1] \phi_n''(x_k^*) + 2[z_1(x_k^* + 1) + z_2(x_k^* - 1)] \phi_n'(x_k^*) = 0,$$

ahora bien, si se denota como

$$\varphi(x) = (x^2 - 1) \phi_n''(x) + 2[z_1(x + 1) + z_2(x - 1)] \phi_n'(x),$$

es lo mismo resolver

$$[(x_k^*)^2 - 1] \phi_n''(x_k^*) + 2[z_1(x_k^* + 1) + z_2(x_k^* - 1)] \phi_n'(x_k^*) = 0,$$

que

$$\varphi(x_k^*) = 0,$$

además, como  $gr(\phi_n(x)) = n$ , es evidente que  $gr(\varphi(x)) \leq n$  entonces  $\varphi(x) \in \mathbb{P}_n$ . Por lo tanto, se puede decir que  $\varphi(x)$  es igual a  $\phi_n(x)$  salvo un factor real  $\lambda_n$ , es decir,  $\varphi(x) = \lambda_n \phi_n(x)$ , y por tanto sustituyendo  $z_1 = \frac{1}{4}$  y  $z_2 = \frac{3}{4}$ , tenemos

$$(x^2 - 1) \phi_n''(x) + 2 \left[ \frac{1}{4}(x + 1) + \frac{3}{4}(x - 1) \right] \phi_n'(x) = \lambda_n \phi_n(x),$$

al simplificar tenemos

$$(1 - x^2) \phi_n''(x) + (1 - 2x) \phi_n'(x) + \lambda_n \phi_n(x) = 0. \tag{68}$$

La ecuación (68), es exactamente (12), por tanto, los polinomios de Chebyshev tipo III son solución de (68), de donde se deduce que sus ceros coinciden con aquella  $n$ -upla  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , donde (63) alcanza su valor extremo.

Demostraremos que tal extremo es un mínimo para (63), para lo cual usaremos el siguiente teorema.

**Teorema 3.1 (Generalización del criterio de la segunda derivada)** Sea  $f$  un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas  $D_{ij}$  en una  $n$ -bola  $B(\bar{x})$ , y designaremos con  $H(\bar{x})$  la matriz Hessiana en un punto estacionario  $\bar{x}$ . Tenemos entonces

- i. Si todos los autovalores de  $H(\bar{x})$  son positivos,  $f$  tiene un mínimo relativo en  $\bar{x}$ .
- ii. Si todos los autovalores de  $H(\bar{x})$  son negativos,  $f$  tiene un máximo relativo en  $\bar{x}$ .

iii. Si  $H(\bar{x})$  tiene autovalores positivos y negativos,  $f$  tiene un punto de ensilladura en  $\bar{x}$ .

La demostración de este teorema se puede consultar en [18], sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i} - \frac{z_1}{x_i - 1} - \frac{z_2}{x_i + 1},$$

de aquí se tiene la matriz Hessiana

$$H = (h_{ik}), \quad h_{ik} = \frac{\partial^2 E_T(x)}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$h_{ik} = \begin{cases} -\frac{1}{(x_k - x_i)^2} & i \neq k, \\ \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_j - x_i)^2} + \frac{z_1}{(x_i - 1)^2} + \frac{z_2}{(x_i + 1)^2} & i = k. \end{cases}$$

Esta matriz  $H$  se puede expresar como  $H = H_1 + H_2$ , donde  $H_1$  es la matriz diagonal con  $\frac{z_1}{(x_i - 1)^2} + \frac{z_2}{(x_i + 1)^2}$  en su diagonal principal,

$H_2$  es la matriz formada por  $\sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_j - x_i)^2}$  en los elementos correspondientes su diagonal principal, y  $-\frac{1}{(x_k - x_i)^2}$  en el resto.

Obviamente,  $H_1$  es una matriz definida positiva, pues  $z_1 > 0$  y  $z_2 > 0$ . Además, por el Teorema de Gerschgorin [19] y [20] los valores propios están en

$$\bigcup_{i=1}^n \left[ 0, 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_k - x_i)^2} \right],$$

por lo que  $H_2$  tiene todos sus valores propios no negativos. Luego puede concluirse que  $H$  es definida positiva por ser la suma de dos matrices definidas de la misma forma y, de aquí, por el apartado i del teorema 3.1 que la posición de equilibrio se corresponde con un mínimo global de  $E_T$ .

Para finalizar el teorema, demostraremos la unicidad de  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  en la que se alcanza este mínimo global. Supongamos que existen dos  $n$ -uplas que verifican ambas la condición de mínima energía

$$-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1,$$

$$-1 < x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^* < 1,$$

si tomamos  $y_i = \frac{|x_i - x_i^*|}{2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , teniendo en cuenta las propiedades de las medias aritmética y geométrica, se tiene que

$$|y_i - y_j|$$

$$= \frac{|x_i - x_j| + |x_i^* - x_j^*|}{2} \geq \frac{|x_i - x_j|^{\frac{1}{2}} + |x_i^* - x_j^*|^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\text{y } |1 \pm y_i| \geq |1 \pm x_i|^{\frac{1}{2}} |1 \pm x_i^*|^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, atendiendo a la expresión de  $T$ , se tiene que  $T(y) \geq T(x)^{1/2} T(x^*)^{1/2}$  donde la igualdad se cumple sí y sólo sí,  $x_i = x_i^*$ . Así, queda demostrada la unicidad de la solución. ■

#### IV. CONCLUSIONES

En la sección I de este trabajo demostramos la existencia y unicidad de una familia de polinomios ortogonales con respecto a una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , obtuvimos una relación de recurrencia a tres términos y presentamos las propiedades de un sistema ortogonal de polinomios en el espacio de Hilbert de funciones y como caso particular mostramos la familia de polinomios ortogonales clásicos.

Obtenemos los polinomios ortogonales de Chebyshev tipo III como solución a un problema de Sturm Liouville singular; y sobre estos demostramos la fórmula de Rodrigues, una función generadora, una relación de recurrencia a tres términos, una relación diferencial, operadores de ascenso y descenso, además demostramos que de todos los polinomios ortogonales mónicos, el polinomio  $\hat{V}_n$  es el que tiene la menor norma en el espacio  $L_2^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}[-1, 1]$ .

Demostramos que para  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $n$  puntos del intervalo  $(-1, 1)$  si ubicamos  $n$  cargas unitaria, positivas, colocamos dos cargas positivas  $z_1 = 1/4$  y  $z_2 = 3/4$  en los extremos  $-1$  y  $1$ , respectivamente, si la interacción de las cargas está definida por un potencial logarítmico, la energía total del sistema es mínima, en  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ , cuando estos puntos coinciden con los ceros de los polinomios ortogonales de Chebyshev tipo III.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece de manera especial a la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).

La investigación de Juan Toribio-Milane fue parcialmente apoyada por el Fondo Nacional de Innovación y Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDOCYT), Republica Dominicana, bajo la subvención 2020-2021-1D1-137.

#### REFERENCIAS

- [1] Vera, A., Alegría, P., *Un curso de análisis funcional, teoría y problemas*, (Antonio Vera Lopez, Vizcaya, 1997).
- [2] Spencer, B. G., *The Classical Orthogonal Polynomials*, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, 2015).
- [3] Gabor S., *Orthogonal Polynomials*, *American Mathematical Society*, (Providence, Rhode Island, 1939).
- [4] López G. y Pijera H., *Polinomios Ortogonales*, *Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes*, (Mérida, Venezuela 2001).
- [5] Sánchez, J. L., *Polinomios Ortogonales*, (2013).
- [6] Milovanović, G. V. y Mitrinović D.S. y Rassias, M., *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities*,

zeros, (World Scientific Publishing Co. PIC. Ltd, London, 1994).

[7] Haberman, R., *Ecuaciones en Derivadas Parciales con series de Fourier y problemas de contornos*, Tercera edición, (Pearson educacion, S. A. Madrid, 2003).

[8] Amrein, W., Hinz, A. y Pearson, D., *Sturm-Liouville Theory, past and present*, (Birkhäuser, Suiza, 2005).

[9] Korneichuk, N.P., Ligun, A. A. y Babenko, V. F., *Extremal properties of polynomials and splines*, (Nova Science Publishers, Inc., UK, 1996).

[10] Van Assche, W., *The Impact of Stieltjes' Work on Continued Fractions and Orthogonal Polynomials*, (1995).

[11] Marcellán, F. y Martínez, A., *Electrostatic models for zeros of polynomials: Old, new, and some open problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **7**, 258-272 (2007). doi:10.1016/j.cam.2006.10.020.

[12] Desireé, C., *Orthogonal Polynomials. Electrostatics application. Trabajo Fin de Grado en Matemáticas, La Laguna*, (2017).

[13] Pijeira-Cabrera, H., Quintero-Roba, J. y Toribio-Milane, J., *Differential Properties of Jacobi-Sobolev Polynomials and Electrostatic Interpretation*. Mathematics **11**, 3420 (2023). <https://doi.org/10.3390/math11153420>.

[14] Thamban Nair, M., *Functional Analysis a first course, second edition*, (PHI, UK, 2023).

[15] Munkres, R. J., *Analysis on Manifolds*, (Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1991).

[16] Fisher, S. D., *Complex Variables second edition*, (Dover publications, Inc, USA, 1999).

[17] Rosario-Roche, P. y Toribio-Milane, J., <[https://www.researchgate.net/publication/372414780\\_OBTENCION\\_DE\\_LOS\\_POLINOMIOS\\_DE\\_CHEBYSHEV\\_DE\\_3ER\\_Y\\_4TO\\_TIPO\\_COMO\\_SOLUCION\\_A\\_UN\\_PROBLEMA\\_DE\\_STURM\\_LIOUVILLE\\_SINGULAR\\_Y\\_APLICACION\\_A\\_LA\\_ELECTROSTATICA.html](https://www.researchgate.net/publication/372414780_OBTENCION_DE_LOS_POLINOMIOS_DE_CHEBYSHEV_DE_3ER_Y_4TO_TIPO_COMO_SOLUCION_A_UN_PROBLEMA_DE_STURM_LIOUVILLE_SINGULAR_Y_APLICACION_A_LA_ELECTROSTATICA.html)>, consultado el 30 de enero de 2024.

[18] Apostol, T. M., *Calculo II, Cálculo con funciones de varias variables y Álgebra Lineal, con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad*, (Reverté, España, 1984).

[19] Varga, R. S., *Gergorin and His Circles*, (Springer, USA, 2004).

[20] Galliano, V., y Van Assche, W., *The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional material*, Journal of Computational and Applied Mathematics **65**, 419-447 (1995).