Una propuesta didáctica basada en problemas sobre movimiento en una dimensión como recurso para enseñar y aprender a resolver ecuaciones diferenciales que incluyen a la función escalón unitario, mediante el método de transformada de Laplace

ISSN 1870-9095

Ranferí Gutiérrez, María Sigüenza
Departamento de Ciencias Básicas, Área de Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Landívar. Campus San Francisco de Borja, S.J. Vista Hermosa III, zona 16, Guatemala, Guatemala, 01016.

E-mail: mrgutierrez@url.edu.gt

(Recibido el 4 de febrero de 2024, aceptado el 17 de mayo de 2024)

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica, basada en problemas de movimiento en una dimensión, para la enseñanza de la solución de problemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, mediante el método de Transformada de Laplace, las cuales contienen, dentro de sus términos, funciones escalón unitario. El empleo de este enfoque permite que los estudiantes logren una mejor comprensión sobre cómo plantear e interpretar las soluciones de este tipo de ecuaciones diferenciales debido a que pueden, inicialmente, hacer cálculos y predicciones utilizando conceptos de Física General, los cuales pueden ser verificados utilizando el enfoque de Ecuaciones Diferenciales. Se muestran dos escenarios a manera de ejemplo, así como el proceso de análisis del movimiento, desde el punto de vista físico; finalmente se muestra la solución obtenida en cada caso, utilizando técnicas de Ecuaciones Diferenciales, y cómo dicha solución analítica corresponde con la predicción hecha previamente a partir de principios físicos.

Palabras clave: Movimiento en una dimensión, Leyes de Newton, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con condiciones iniciales, Escalón unitario, Transformada de Laplace.

Abstract

A didactic proposal is presented, based on problems of motion in one dimension, for teaching the solution of initial value problems in differential equations through the Laplace Transform method. These equations contain unit step functions within their terms. The use of this approach allows students to achieve a better understanding of how to formulate and interpret solutions to this type of differential equations. Initially, they can perform calculations and predictions using concepts from General Physics, which can then be verified using the Differential Equations approach. Two scenarios are presented as examples, along with the process of analyzing motion from a physical perspective. Finally, the obtained solution is demonstrated in each case using Differential Equations techniques, illustrating how this analytical solution aligns with predictions made earlier based on physical principles.

Keywords: One Dimention Motion, Newton laws, Ordinary Differential Equations, Step function, Laplace transform.

I. INTRODUCCIÓN

Un reto que frecuentemente encuentran los profesores de matemática es lograr que sus estudiantes puedan utilizar lo aprendido en clase para resolver problemas de tipo aplicación, adicional a aquellos de tipo numérico o algebraico. En este sentido, los libros de texto juegan un papel primordial como herramienta del profesor cuando dentro del conjunto de problemas sugeridos se pueden encontrar, entre otros, problemas que muestren aplicaciones a diversos campos como física, estadística, o química, por mencionar algunos.

Un ejemplo de lo expuesto anteriormente se presenta en cursos sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs de aquí en adelante) cuando se enseña cómo resolver este tipo de ecuaciones y estas involucran a la función escalón unitario. Entre los libros que se encuentran disponibles en castellano [1, 2, 3] es muy difícil encontrar ejercicios sugeridos de aplicación de EDOs que incluyan a la función escalón unitario dentro de sus términos. Generalmente se trata de ejercicios algebraicos que dejan al estudiante con una sensación de falta de comprensión sobre lo que está representando, tanto en la EDO como en su solución, adicional a una confusión sobre el proceso algebraico realizado para resolver dicha EDO.

En este artículo mostramos algunos ejemplos de aplicación de EDOs al movimiento de partículas en una dimensión; dichas EDOs incluyen, dentro de sus términos, a la función escalón unitario. Estas ecuaciones son resueltas luego utilizando el método de la transformada de Laplace. La bondad de estos ejemplos es que el estudiante puede intuir fácilmente cómo se moverá el objeto, conocidas las condiciones iniciales y de fuerzas aplicadas, pudiendo incluso resolver inicialmente por completo el problema, empleando únicamente conceptos básicos de Física General y luego utilizar esta "respuesta conocida de antemano" para plantear y resolver el problema ahora desde el punto de vista de las EDOs y lograr una mejor comprensión, tanto de la EDO planteada, como de su solución.

En este documento se plantean, a manera de ejemplo, dos escenarios posibles para que la función escalón unitario aparezca de forma natural en las EDOs: En el primer escenario, el bloque se desliza sobre dos superficies horizontales con distintos coeficientes de fricción; en el segundo escenario, el bloque se desplaza sobre una superficie horizontal libre de fricción, jalado por una cuerda, la cual en un instante dado, se rompe. El profesor puede crear diferentes combinaciones de escenarios, o incluso nuevos, enriqueciendo por tanto la variedad de problemas que se pueden estudiar en clase, lo cual resultará de gran beneficio para el estudiante.

Este documento se ha divido de la siguiente forma: En la Sección II se presentan los fundamentos teóricos básicos necesarios y se obtienen algunos resultados generales que serán de utilidad posteriormente. En la Sección III se estudian, a manera de ejemplo, algunos escenarios de movimiento en una dimensión que pueden ser resueltos en clase aplicando herramientas propias del curso de Ecuaciones Diferenciales; posteriormente se muestra cómo realizar el análisis de cada escenario, ahora desde el punto de vista del curso de Física General, para verificar y lograr una mejor comprensión, por parte del estudiante, tanto de los resultados obtenidos como del procedimiento empleado para resolverlo utilizando herramientas de Ecuaciones Diferenciales. Finalmente se presentan las conclusiones al presente trabajo.

II. MARCO TEÓRICO

En esta sección se presentan brevemente los conceptos y resultados que el estudiante debe conocer para resolver el tipo de problema de aplicación expuesto en este artículo.

A. Primera ley de Newton

La primera ley del movimiento, establecida por Sir Isaac Newton en 1687, dice que si sobre un cuerpo no actúa alguna fuerza neta y el cuerpo está en reposo, éste permanecerá en reposo, o si el cuerpo está moviéndose a velocidad constante, continuará haciéndolo así [4]. Esta ley, junto con las otras dos leyes de movimiento enunciadas por Newton, son válidas, como sabemos, únicamente en los marcos de referencia inerciales.

B. Movimiento sobre una superficie horizontal con fricción

Suponga que un bloque de masa m se desliza, hacia la derecha, sobre una superficie horizontal rugosa y que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso $\vec{w}$, la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de fricción $\vec{f}_k = \mu_k \vec{N}$. La Figura 1 muestra la situación y el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

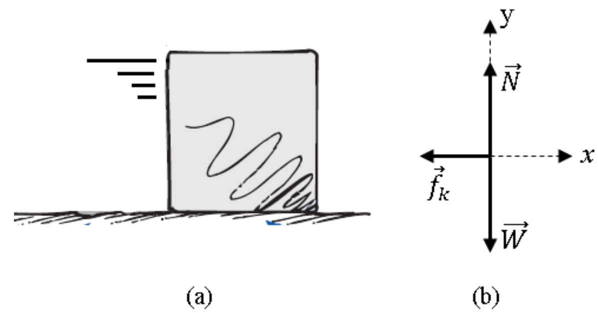


FIGURA 1. (a) Un bloque de masa m se mueve sobre una superficie horizontal rugosa. (b) Diagrama de cuerpo libre correspondiente al bloque mostrado en (a). Se considera positiva la dirección hacia la derecha.

La aplicación de la Segunda Ley de Newton en este escenario proporciona los siguientes resultados:

De $\sum F_y = 0$:
$$N = mg. \tag{1}$$

De $\sum F_x = ma_x$:
$$a_x = -\mu_k g, \tag{2}$$

donde a_x representa la componente de la aceleración del bloque y g representa la aceleración de la gravedad. Se ha escogido como positiva la dirección hacia la derecha.

C. Movimiento sobre una superficie horizontal, sin fricción, jalado por una cuerda

Suponga que un bloque de masa m se desplaza, hacia la derecha, sobre una superficie horizontal lisa, sujeto a la fuerza de tensión $\vec{T}$ ejercida por una cuerda horizontal. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso $\vec{w}$, la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de tensión $\vec{T}$. La Figura 2 muestra la situación y el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

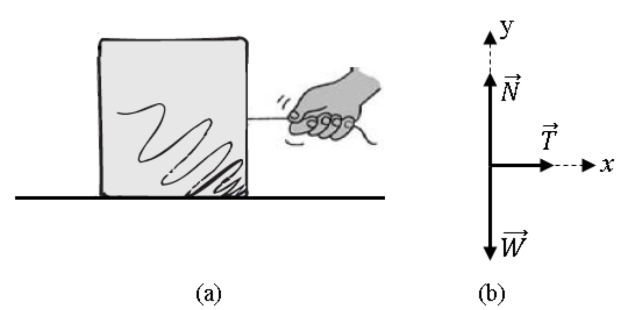


FIGURA 2. (a) Un bloque de masa m se mueve sobre una superficie horizontal lisa, jalado por una cuerda que ejerce una tensión constante. (b) Diagrama de cuerpo libre correspondiente al bloque mostrado en (a). Se considera positiva la dirección hacia la derecha.

La aplicación de la Segunda Ley de Newton en este escenario proporciona los siguientes resultados:

De $\sum F_y = 0$:
$$N = mg. \tag{3}$$

De $\sum F_x = ma_x$:
$$a_x = \frac{T}{m}. \tag{4}$$

Nuevamente se ha escogido como positiva la dirección hacia la derecha.

D. Representación, en términos de la función escalón unitario, de una función definida por partes

Suponga que una función $f(t)$ está definida por partes, como se indica a continuación:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < t_1, \\ h(t), & t \geq t_1. \end{cases} \tag{5}$$

Sea $u(t-a)$ la función escalón unitaria definida como [1, 2, 3]

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases} \tag{6}$$

La Figura 3 muestra la gráfica correspondiente a la definición (6). Note que, de acuerdo con (6), la función escalón unitario tendrá un valor nulo cuando el argumento $t-a$ es negativo, es decir, $t < a$, mientras que tendrá un valor igual a uno cuando el argumento $t-a$ es mayor o igual a cero, es decir, $t \geq a$.

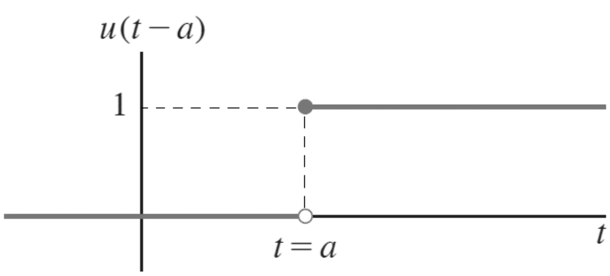


FIGURA 3. La función escalón unitario tiene un salto en valor 1 cuando $t = a$.

La función por partes definida en (5) puede ser expresada en términos de funciones escalón unitario como

$$f(t) = g(t) - g(t)u(t-t_1) + h(t)u(t-t_1). \tag{7}$$

Es fácil convencerse de la validez de (7) observando que la función escalón unitario $u(t-t_1)$ tendrá un valor nulo cuando $t < t_1$, mientras que tendrá un valor de uno cuando $t \geq t_1$, lo cual hará coincidir el valor de $f(t)$ dado en (7) con aquel definido en (5).

E. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace recibe su nombre en honor a Pierre Simon Laplace, aunque fue Euler quien probablemente enunció primero su definición. Dicha transformada permite, al menos en principio, resolver EDOs con condiciones iniciales conocidas, convirtiéndolas en ecuaciones algebraicas. Mayores detalles sobre el método pueden ser encontrados en [1, 2, 3].

Suponga que $f(t)$ es una función definida para toda $t \geq 0$. La transformada de Laplace de f es la función F definida como sigue:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{8}$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge [1, 2, 3].

Existen tablas que muestran cómo se transforman diferentes funciones $f(t)$ al aplicarles (8). En particular, interesa la transformada de Laplace para $f'(t)$ [1, 2, 3]:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \tag{9}$$

donde $f(0)$ corresponde al valor de $f(t)$ cuando $t = 0$.

Otros resultados importantes para este artículo son los siguientes [1, 2, 3]:

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}, \tag{10}$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{cu(t-a)\} = \frac{ce^{-as}}{s}, \tag{11}$$

donde $c, a \in \mathbb{R}$.

También es posible hablar de la transformada inversa de Laplace, $\mathcal{L}^{-1}$, la cual permite, en principio, conocida una función F, encontrar la función f a la cual corresponde:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}. \tag{12}$$

Resulta de gran utilidad en este artículo el hecho de que

$$\mathcal{L}^{-1}\{ce^{-as}/s^2\} = c(t-a)u(t-a). \tag{13}$$

De (10) y (12) se deduce que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c}{s}\right\} = c. \tag{14}$$

La Figura 4 muestra, esquemáticamente, cómo se usa el método de la transformada de Laplace para resolver problemas que involucran EDOs con condiciones iniciales conocidas [1].

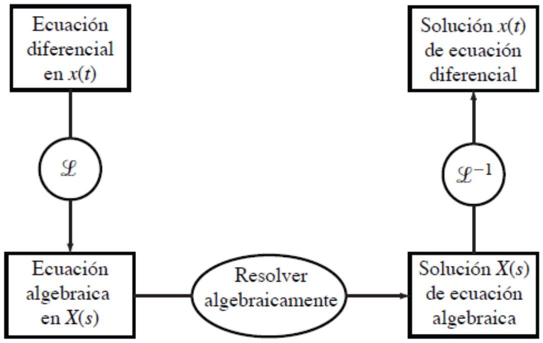


FIGURA 4. Diagrama que muestra cómo se utiliza el método de transformada de Laplace para resolver una EDO con condiciones iniciales conocidas.

III. ESTUDIO DE ESCENARIOS

A. Objeto desplazándose sobre dos superficies horizontales con diferentes coeficientes de fricción

Suponga que un objeto de masa m se desplaza hacia la derecha sobre dos superficies horizontales: La primera será una superficie lisa y la segunda una superficie rugosa con coeficiente de fricción $\mu_k > 0$. El objeto se mueve sobre la superficie lisa, con cierta rapidez $v_o > 0$, desde $t = 0$ hasta $t = a$, para luego desplazarse sobre la superficie rugosa. La Figura 5 ilustra la situación descrita anteriormente.

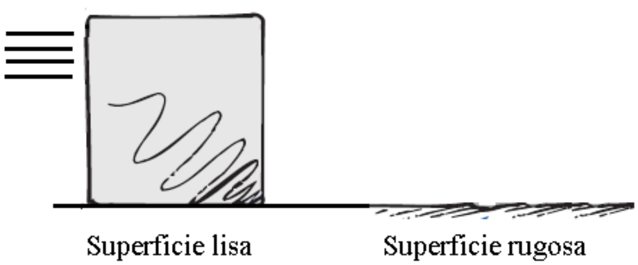


FIGURA 5. El bloque de la figura inicia su movimiento hacia la derecha sobre la superficie lisa, con cierta rapidez inicial $v_0 \neq 0$. En el instante $t = a$ el bloque empieza a moverse sobre la superficie rugosa.

De acuerdo con la primera ley de Newton el objeto se moverá sobre la superficie horizontal lisa con velocidad constante v_o desde $t = 0$ hasta $t = a$ para posteriormente frenarse mientras se desplaza sobre la segunda superficie, con una aceleración constante dada por (2).

La componente horizontal de la fuerza f ejercida sobre el bloque se puede expresar como una función por partes del tipo mostrado en (5):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ -mg\mu_k, & a \leq t \leq b, \end{cases} \tag{15}$$

donde $t = b$ corresponde al instante en el que el bloque se detiene finalmente.

De acuerdo con (7) es posible expresar (15) como

$$f(t) = -mg\mu_k u(t-a) \tag{16}$$

La segunda ley de Newton queda expresada, para esta situación, como

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\mu_k u(t-a), \tag{17}$$

donde se ha expresado la aceleración como $a = dv/dt$. Note que la aceleración del bloque es independiente de su masa m,

La aplicación de (9), (10) y (11) a (17) resulta, luego de algunas simplificaciones, en

$$V(s) = \frac{v_o}{s} - \mu_k g\frac{e^{-as}}{s^2}, \tag{18}$$

donde $\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$ y $v(0) = v_o$.

De acuerdo con (12) la solución $v(t)$ a la EDO (17) está dada por

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}. \tag{19}$$

Aplicando (13), (14) y (19) a (18) se obtiene que la solución general $v(t)$ a la EDO (17) es

$$v(t) = v_o + \mu_k g(t-a)u(t-a), \tag{20}$$

la cual puede reescribirse, en términos de una función por partes, como

$$v(t) = \begin{cases} v_o, & 0 \leq t < a, \\ v_o + \mu_k ga - \mu_k gt, & a \leq t \leq b. \end{cases} \tag{21}$$

La primera línea en (21) indica lo que ya se esperaba del análisis cualitativo: $v(t)$ permanece constante mientras el bloque se desplaza sobre la superficie lisa desde $t = 0$ hasta $t = a$, mientras que la segunda línea en (21) muestra que el bloque se desacelera hasta detenerse en el instante $t = b$.

Aunque para fines de este artículo se ha resuelto (17) en forma general, resulta más conveniente trabajar en clase con valores numéricos, al menos en los primeros ejemplos, lo cual permitirá también comprobar, utilizando conceptos básicos de Física General, los resultados predichos en (21).

A manera de ejemplo suponga que el bloque se mueve sobre la superficie horizontal lisa con una velocidad $v_o = 5.00$ m/s y que entre la superficie rugosa y el bloque existe un coeficiente de fricción $\mu_k = 0.150$. También supondremos que el bloque se mueve sobre la superficie lisa durante $t = a = 10.0$ s. Note que en (17) se cancela el factor m que representa la masa del bloque, lo cual permite también realizar con los estudiantes una discusión sobre el significado físico de este hecho. Se utilizará $g = 9.80$ m/s^2.

La sustitución en (21) de los valores numéricos indicados en el párrafo anterior da como resultado

$$v(t) = \begin{cases} 5.00, & 0 \leq t < 10.0, \\ 19.6 - 1.47t, & 10 \leq t \leq 13.4, \end{cases} \tag{22}$$

donde el valor $t = b = 13.40$ se obtiene al resolver la ecuación

$$19.6 - 1.47t = 0. \quad (23)$$

En forma independiente, utilizando únicamente conceptos de Física General, se puede verificar que el valor $t = 13.40$ s corresponde al instante de tiempo medido desde $t = 0$ s cuando el bloque inició su movimiento sobre la superficie horizontal lisa.

El análisis es como se indica a continuación: Al comenzar a moverse sobre la superficie rugosa, el bloque tiene una velocidad de 5.00 m/s. De acuerdo con (2) el bloque se mueve sobre dicha superficie con una aceleración $a_x = -1.47$ m/s^2. De la ecuación de cinemática

$$v_f = v_o + a_x t, \quad (24)$$

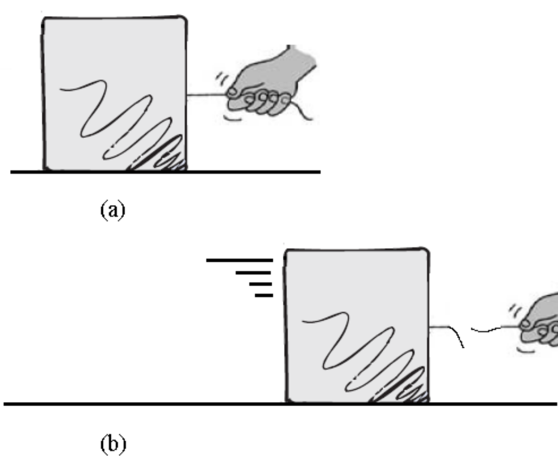
con $v_o = 5.00$ m/s, $v_f = 0.00$ m/s y $a_x = -1.47$ m/s^2, se obtiene

$$t = 3.40 \text{ s}. \quad (25)$$

Finalmente, considerando que el bloque llevaba 10.0 s moviéndose sobre la superficie lisa, se comprende que el valor numérico para $t = b$ obtenido en (23) incluye tanto al intervalo de tiempo de 10.0 s que el bloque lleva desplazándose sobre la superficie lisa, como el intervalo de tiempo de 3.40 s que le toma frenarse sobre la superficie rugosa.

B. Bloque que se desplaza sobre una superficie horizontal libre de fricción, jalado por una cuerda, la cual, en un instante dado, se rompe

Suponga que un bloque de masa m se mueve sobre una superficie horizontal lisa, libre de fricción, jalado por una cuerda que ejerce una tensión $\vec{T}$ constante. El bloque inicia su movimiento a partir del reposo, sujeto a la fuerza de tensión pero, en el instante $t = a > 0$, la cuerda se rompe y el bloque continúa moviéndose sobre la superficie lisa horizontal. La Figura 6 ilustra la situación descrita anteriormente.



(a)

(b)

FIGURA 6. (a) Un bloque de masa m se mueve sobre una superficie horizontal lisa, sujeto a una fuerza de tensión horizontal de magnitud constante T. El bloque parte del reposo. (b) La cuerda se rompe en un cierto instante de tiempo $t = a$ pero el bloque continúa moviéndose sobre la misma superficie horizontal.

Dado que el bloque inicia su movimiento a partir del reposo $(v(0) = 0)$ y está sujeto a una fuerza constante desde $t = 0$ hasta $t = a$, se moverá con una aceleración constante dada por (4) alcanzando una rapidez v_f justo cuando se rompe la cuerda. A partir de ese momento el bloque continuará moviéndose con velocidad constante, de acuerdo con la primera ley de Newton.

La componente horizontal de la fuerza f ejercida sobre el bloque se puede expresar como una función por partes del tipo mostrado en (5):

$$f(t) = \begin{cases} T, & 0 \leq t < a, \\ 0, & t \geq a, \end{cases} \quad (26)$$

donde $t = a$ corresponde al instante en el que la cuerda se rompe.

De acuerdo con (7) es posible expresar (26) como

$$f(t) = T - Tu(t - a). \quad (27)$$

La segunda ley de Newton queda expresada, para esta situación, como

$$m\frac{dv}{dt} = T - Tu(t - a), \quad (28)$$

donde se ha expresado la aceleración como $a = dv/dt$.

La aplicación de (9), (10) y (11) a (28) resulta, luego de algunas simplificaciones, en

$$V(s) = \frac{T}{m}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2}\right] \quad (29)$$

donde $\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$ y $v(0) = 0$.

De acuerdo con (12) la solución $v(t)$ a la EDO (17) está dada por (19):

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}.$$

Aplicando (13), (14) y (19) a (29) se obtiene que la solución general $v(t)$ a la EDO (17) es

$$v(t) = \frac{T}{m}[t - (t - a)u(t - a)], \quad (30)$$

la cual puede reescribirse, en términos de una función por partes, como

$$v(t) = \begin{cases} \frac{T}{m}t, & 0 \leq t < a, \\ \frac{T}{m}a, & t \geq a. \end{cases} \quad (31)$$

La primera línea en (31) indica lo que ya se esperaba del análisis cualitativo: $v(t)$ aumenta de manera uniforme, de acuerdo con (24), mientras el bloque se desplaza sobre la superficie lisa desde $t = 0$ hasta $t = a$. Durante ese intervalo de tiempo, $v_o = 0$ y a_x está dada por (4). En el instante $t = a$, cuando la cuerda se rompe, el bloque adquiere una velocidad $v_f = a\frac{T}{m}$ y a partir de ese instante, de acuerdo con lo analizado, se mueve con velocidad constante; esto es lo que indica que sucederá la segunda línea en (31).

Al igual que en la subsección anterior, para fines del artículo, se ha resuelto el escenario en forma general, aunque quizás sea más conveniente, al trabajar con los estudiantes, resolverlo con valores numéricos para que, entre otras posibilidades, puedan ellos hacer predicciones numéricas resolviendo primero el problema utilizando sus conocimientos de Física General y luego verificarlas resolviendo el problema desde el punto de vista de las EDOs. A manera de ejemplo, suponga que un bloque de masa $m = 2.00$ kg parte del reposo, moviéndose sobre una superficie horizontal, libre de fricción, sujeto a una fuerza de tensión horizontal de magnitud constante $T = 10.0$ N ejercida por una cuerda, y que justo a los 15.0 s la cuerda se rompe.

La sustitución en (31) de los valores numéricos indicados en el párrafo anterior da como resultado

$$v(t) = \begin{cases} 5.00t, & 0 \leq t < 15.0, \\ 75.0, & t \geq 15.0. \end{cases} \qquad (32)$$

En forma independiente, utilizando únicamente conceptos de Física General, se sabe que la aceleración del bloque, de acuerdo con (4), tiene el valor $a_x = 5.00$ m/s^2. Y dado que el bloque parte del reposo, sujeto a una aceleración constante, justo a los 15.0 s tiene una velocidad v_f dada por (24):

$$v_f = 0 + (5.00),$$

$$v_f = 75.0 \text{ m/s.} \qquad (33)$$

Finalmente, dado que a partir de $t = 15.0$ s la cuerda se rompe, deja de ejercer fuerza sobre el bloque, y este, por la Primera ley de Newton, continuará su movimiento con velocidad constante de magnitud 75.0 m/s dado que la superficie horizontal sobre la cual se mueve no ejerce fuerza de fricción.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone la utilización de problemas de Física General como herramienta para que, entre otros objetivos, los estudiantes logren una mejor comprensión de la función escalón unitario y su uso en aplicaciones. Para este fin resulta conveniente que los problemas considerados sean sobre el movimiento de una partícula en una dimensión, sujeta a una fuerza neta que durante cierto intervalo inicial de tiempo tenga un valor constante y en un subsiguiente intervalo tome otro valor, siempre constante. Esto permite, por tanto, el empleo de forma natural de la función escalón unitario para representar la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

Adicional al beneficio indicado en el párrafo anterior, el empleo de este tipo de problemas de Física General permite que el estudiante pueda predecir, a partir de principios básicos, cómo será el comportamiento de la velocidad de la partícula durante todo su movimiento. Esto último será de gran ayuda al momento de resolver el problema desde el punto de vista de las EDOs porque le permitirá comprender mejor el significado de cada uno de los términos que aparecen en la solución para $v(t)$ dado que ya conoce de antemano la solución y su interpretación física.

Aunque en este artículo, por razones de espacio, no se ha graficado las soluciones (22) y (32) para $v(t)$, resulta muy importante realizarlas en clase y discutirlas con los alumnos para lograr enlazar la parte gráfica con la parte analítica, lo cual sabemos es muy importante. También es recomendable realizar preguntas del tipo "¿qué pasa si…" para que los estudiantes predigan qué esperarían sucediera al variar algún(os) parámetro(s) del escenario bajo estudio y luego verificar de manera analítica sus predicciones.

Finalmente, aunque aquí únicamente se han considerado, a manera de ejemplo, dos escenarios, se pueden considerar otros escenarios, tales como, por ejemplo: (a) una partícula moviéndose sobre dos superficies horizontales rugosas de diferente coeficiente de fricción (cada uno diferente de cero), o (b) una partícula moviéndose sobre una superficie horizontal lisa, acelerado en cierto intervalo de tiempo por una fuerza horizontal de magnitud constante y posteriormente acelerado (o frenado) por otra fuerza horizontal pero de diferente magnitud constante. También puede considerarse el estudio de sólidos que pueden girar alrededor de un eje fijo, sujetos a torcas de magnitud constante y la predicción, utilizando las leyes de Newton para el movimiento rotacional, para posteriormente verificar esas predicciones resolviendo el problema desde el punto de vista de las EDOs. Por supuesto, en este último caso, se emplea $\tau = Id\omega/dt$, donde I representa el momento de inercia del sólido respecto del eje de rotación y ω representa la velocidad angular de dicho sólido.

REFERENCIAS

[1] Edwards, C. y Penney, D., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* 4ª Edición, (Pearson Educación, México, 2009).
[2] Zill, D. y Cullen, M., *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera* 7ª Edición, (Cengage Learning, México, 2009).
[3] Nagle, R., Saff, E. y Snider, A., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* 4ª Edición, (Pearson Educación, México, 2005).
[4] Resnick, R., Halliday, D., Krane, D., *Física Volumen 1* 4ª Edición, (Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V., México, 2000), pp. 71-75.