

Oscilações e vibrações mecânicas. Abordagem teórica e simulações

EDVCA TIO PHVSICORVM



ISSN 1870-9095

**Bogos Nubar Sismanoglu^{1a}, Eduardo Cezar Barbosa de Barros Aragão^b,
Marcelo Pego Gomes^a, Delmo Mattos^d**

^a*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Física, Laboratório de Mecânica, Laboratório de Óptica e Espectroscopia, São José dos Campos, São Paulo.*

^b*Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, campus Janaúba.*

^d*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Depto. de Humanidades, Departamento de Física, São José dos Campos, São Paulo.*

E-mail: paulo.victor@ifrj.edu.br.

(Recibido el 18 de marzo de 2024, aceptado el 24 de mayo de 2024)

Resumo

Neste trabalho iremos elencar os tópicos pertinentes ao estudo das oscilações mecânicas, desde o caso mais simples do oscilador harmônico simples até o caso mais complexo das oscilações amortecidas e forçadas. As definições de frequência, período e frequência angular são apresentadas para os casos relacionados aos movimentos periódicos com amplitude constante e também para o caso das Vibrações forçadas. Estas são as provocadas por forças perturbadoras externas ao sistema, como por exemplo um pequeno terremoto vibrando uma mesa em equilíbrio no solo ou a vibração das janelas do trem ou ônibus em movimento. No regime estacionário com aplicação de força externa e com viscosidade, a vibração ocorre numa frequência diferente da frequência natural vista no movimento harmônico simples. Então, a Ressonância ocorre quando a frequência das vibrações forçadas coincide ou se aproxima bastante da frequência natural do sistema, elevando bastante a Amplitude (afastamento máximo do ponto de equilíbrio) do movimento até um limite fixo máximo que depende do Fator de Qualidade do sistema, Q , proporcional à razão entre a energia média armazenada no sistema pela energia média perdida no ciclo devido ao amortecimento, sendo 2π a constante de proporcionalidade. As Vibrações transitórias são as que desaparecem com o tempo. As livres são de caráter transitório (no caso real, pois no ideal não há amortecimento e o movimento se perpetua no tempo) e as forçadas tendem a seguir o regime estacionário após um certo tempo de oscilação transitória complexa, depois que a energia mecânica por muitas vezes varia caoticamente, até atingir um equilíbrio na vibração permanente. Os graus de liberdade de um sistema físico dependem do número de variáveis independentes (coordenadas generalizadas na Mecânica Lagrangiana) necessárias para descreverem seu movimento. Por exemplo, no pêndulo simples oscilando num plano vertical, a coordenada que descreve o movimento pode ser o ângulo θ formado entre a vertical e o fio de sustentação, e no movimento de uma massa fixa a uma mola, a oscilação pode ser descrita pela coordenada x de afastamento da posição de equilíbrio. A energia potencial na mola é dada por $U = kx^2/2$, onde x é a deformação da mola, e a energia cinética dada por $E_c = mv^2/2$, onde m é a massa presa à mola e v a sua velocidade. Usamos a notação, a última sendo a aceleração. Quando há conservação da energia mecânica, por exemplo no caso de um OHS, a taxa de variação da energia mecânica nesse caso fornece a equação diferencial do movimento desse OHS: Gráficos serão apresentados ao longo deste trabalho, obtidos através do software Origin.

Palavras-chave: Oscilação, Período, Ressonância, Física.

Abstract

In this work we will list the relevant topics to the study of mechanical oscillations, from the simplest case of the simple harmonic oscillator to the more complex case of damped and forced oscillations. The definitions of frequency, period and angular frequency are presented for cases related to periodic movements with constant amplitude and also for the case of forced vibrations. These are those caused by disturbing forces external to the system, such as a small earthquake vibrating a table balanced on the ground or the vibration of the windows of a moving train or bus. In the steady state with the application of external force and viscosity, the vibration occurs at a frequency different from the natural frequency seen in simple harmonic movement. Therefore, Resonance occurs when the frequency of the forced vibrations coincides with or is very close to the natural frequency of the system, greatly increasing the Amplitude (maximum distance from the equilibrium point) of the movement up to a fixed maximum limit that depends on the Quality Factor of the system, Q , proportional to the ratio between the average energy stored in the system and the average energy lost in the cycle due to damping, with 2π being the proportionality constant. Transient vibrations are those that disappear over time. The free ones are transient in nature (in the real case, as in the ideal there is no damping and the movement is perpetuated over time) and the forced ones tend to follow the stationary regime after a certain time of complex transient oscillation, after the mechanical energy for many sometimes it varies chaotically, until it reaches a permanent equilibrium in vibration. The degrees of freedom of a physical system depend on the number of independent variables

(generalized coordinates in Lagrangian Mechanics) necessary to describe its movement. For example, in a simple pendulum oscillating in a vertical plane, the coordinate that describes the movement can be the angle θ formed between the vertical and the support wire, and in the movement of a mass fixed to a spring, the oscillation can be described by the coordinate x away from the equilibrium position. The potential energy in the spring is given by $U = kx^2/2$, where x is the deformation of the spring, and the kinetic energy given by $E_k = mv^2/2$, where m is the mass attached to the spring and v its speed. We use the notation e , the last being acceleration. When there is conservation of mechanical energy, for example in the case of an OHS, the rate of change of mechanical energy in this case provides the differential equation of motion for that OHS: Graphics will be presented throughout this work, obtained using Origin software.

Keywords: Oscillation. Period of time. Resonance. Physics.

I. INTRODUÇÃO

Oscilações na física são fenômenos que se repetem durante um intervalo de tempo, ou seja, são movimentos repetitivos que voltam à sua configuração inicial após um certo tempo chamado de Período (T , τ , P , etc). Como exemplos temos: sistema massa - mola, pêndulos, oscilações elétricas (circuito RLC e outros), batimentos cardíacos, respiração, movimento dos planetas, diapasão, metrônomo musical, etc, sendo que muitos dos casos envolvendo oscilação requerem soluções computacionais e a maioria se resolve por aproximações para o limite idealizado de oscilação harmônica simples [1, 2]. O oscilador harmônico simples (OHS) é o problema mais importante da física porque ele aparece na maioria dos sistemas mecânicos em movimento, inclusive os microscópicos, como na mecânica quântica. Uma rede cristalina que vibra pode ser entendido como um acoplamento de um número muito grande de átomos unidos por molas, que fazem o papel das forças intermoleculares. O OHS é uma oscilação senoidal simples e periódica em torno do ponto de equilíbrio. Na situação real, no laboratório, existe sempre uma força de atrito agindo sobre o corpo, geralmente com pequena intensidade e proporcional à velocidade. Molas tem massas e podemos expressar o atrito entre os elos como força de atrito proporcional à velocidade. A força de atrito que aparece entre superfícies lubrificadas ou entre um corpo sólido e um meio líquido ou gasoso, geralmente depende de uma maneira complicada da velocidade e uma tabela de dados experimentais pode dar informações sobre ela. Em certos casos a força de atrito é proporcional a algumas potências da velocidade, lembrando-se que essa força é sempre oposta à velocidade, realizando trabalho negativo com absorção de energia. Então, para que um pêndulo possa oscilar *ad infinitum*, uma força externa deve suprir energia para contrabalançar essa perda por atrito e, num estado estacionário, a taxa de variação da energia mecânica seria nula. As equações diferenciais para o movimento do oscilador harmônico aparecem em muitos problemas de interesse e elas podem ser deduzidas através do emprego das leis de Newton, da energia mecânica, do análogo circuito elétrico RLC ou também através da Lagrangiana ou Hamiltoniana do sistema oscilador. A energia potencial pode fornecer a força deformadora do oscilador para casos conservativos. Se a energia potencial do sistema tem uma curva complexa em função da posição, nos pontos de mínimo da curva o movimento de oscilação da partícula para pequenas oscilações em torno destes pontos pode ser aproximado ao MHS. Assim, vibrações mecânicas de pequena amplitude de corpos materiais reduzem-se a um OHS, desde que não se ultrapasse

o limite elástico do material. O movimento de estiramento de molas, membranas, as vibrações sonoras num gás contido num sistema fechado, é representado pelos Modos Normais de Vibração; um circuito elétrico contendo um indutor (L), uma resistência (R) e uma capacitância (C), além de uma fem $E(t)$ senoidal, tem uma equação para a carga (q) e a corrente elétrica (j) variando no tempo idêntica à equação do movimento de uma mola que oscila num meio viscoso e sob a ação de uma força externa oscilante. A equação de Schrodinger para o movimento de um átomo deduzida a partir do operador energia ($\varepsilon = -i\hbar d/dt$) pode ser colocada como no caso de um oscilador.

Alguns conceitos usados no estudo das oscilações ou vibrações serão fornecidos agora. **Vibrações mecânicas** são geralmente definidas para corpos que possuem massa e certo grau de elasticidade. O movimento desse corpo se repete em intervalos definidos de tempo. O **Período** (T) é um intervalo de tempo em que o movimento se repete, ou seja, deverá alcançar a configuração inicial. No caso do pêndulo simples, o período é o tempo gasto para que a massa retorne ao ponto inicial de partida. Se há amortecimento, então este ponto nunca será alcançado e o tempo de oscilação é chamado de **pseudo-período**, com nos movimentos amortecidos. No caso da mola com um peso onde ela é deformada até um certo ponto e abandonada do seu repouso, o período é o tempo para que ela retorne até este ponto (movimento de ida e volta). Para o caso de um movimento amortecido (por exemplo, um pêndulo mergulhado na água, uma mola pesada onde sua massa não é desprezada), a oscilação é verificada mas observamos que a amplitude diminui com o tempo até que o movimento cessa. Neste caso, o intervalo de tempo de ida e volta não caracteriza uma oscilação completa, e chamamos este tempo de **pseudo-período**. No caso da mola pesada ou quando nós consideramos sua massa, há atrito interno devido a isso e a força de atrito pode ser considerada como proporcional à velocidade da oscilação, $-\rho\dot{x}$. Um **Ciclo** é constituído de um movimento completo efetuado durante o período ou pseudo-período. **Frequência** (f) é o número de ciclos por unidade de tempo. Para um único ciclo, o intervalo de tempo é T . Logo, $f = T^{-1}$ e $[T] = s$, $[f] = s^{-1}$. **Vibrações livres** são as que ocorrem em um sistema, causadas por forças internas ao mesmo, como forças gravitacionais ou forças elásticas, como no caso de um pendulo simples. **Vibrações forçadas** são as provocadas por forças perturbadoras externas ao sistema, como por exemplo um pequeno terremoto vibrando uma mesa em equilíbrio no solo ou a vibração das janelas do trem ou ônibus em movimento, o a vibração da máquina de lavar desbalanceada, onde durante a centrifugação as roupas ficam amontoadas num canto do tambor. Nos casos citados, poderá ter o

amortecimento, quando por exemplo o pêndulo oscila no ar (fluido viscoso) ou a mesa vibrando no mesmo fluido. No caso real, sempre haverá amortecimento. O amortecimento retira energia do sistema enquanto que a força externa poderá fornecer energia. No regime estacionário de movimento de oscilação, o balanço energético total é nulo, ou seja, a taxa de variação nula da energia mecânica é a soma entre a potência (negativa - energia dissipada) da força de atrito e da potência (positiva - energia absorvida) da força externa. A frequência natural f_0 de um sistema é aquela das vibrações livres. A frequência angular natural será dada por $\omega_0 = 2\pi f_0$ (rads⁻¹). Na mola, $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ onde k é a constante elástica natural da mola, e no pêndulo simples, $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$, onde g é o módulo da aceleração gravitacional e l o comprimento do fio que sustenta um peso. No regime estacionário com aplicação de força externa e com viscosidade, a vibração ocorre numa frequência diferente desta. Neste caso, a **Ressonância** ocorre quando a frequência das vibrações forçadas coincide ou se aproxima bastante da frequência natural do sistema, elevando bastante a **Amplitude** (afastamento máximo do ponto de equilíbrio) do movimento até um limite fixo máximo que depende do Fator de **Qualidade do sistema, Q**, proporcional à razão entre a energia média armazenada no sistema pela energia média perdida no ciclo devido ao amortecimento, sendo 2π a constante de proporcionalidade. As **Vibrações transitórias** são as que desaparecem com o tempo. As livres são de caráter transitório (no caso real, pois no ideal não há amortecimento e o movimento se perpetua no tempo) e as forçadas tendem a seguir o regime estacionário após um certo tempo de oscilação transitória complexa, depois que a energia mecânica por muitas vezes varia caoticamente, até atingir um equilíbrio na vibração permanente. Os graus de liberdade de um sistema físico dependem do número de variáveis independentes (coordenadas generalizadas na Mecânica Lagrangiana) necessárias para descreverem seu movimento. Por exemplo, no pêndulo simples oscilando num plano vertical, a coordenada que descreve o movimento pode ser o ângulo θ formado entre a vertical e o fio de sustentação, e no movimento de uma massa fixa a uma mola, a oscilação pode ser descrita pela coordenada x de afastamento da posição de equilíbrio. A energia potencial na mola é dada por $U = kx^2/2$, onde x é a deformação da mola, e a energia cinética dada por $E_c = mv^2/2$, onde m é a massa presa à mola e v a sua velocidade. Usamos a notação $\dot{x} \equiv v$ e $\ddot{x} \equiv a$, a última sendo a aceleração. Quando há conservação da energia mecânica, por exemplo no caso de um OHS, a taxa de variação da energia mecânica nesse caso fornece a equação diferencial do movimento desse OHS: $m\ddot{x} + kx = 0$.

II. OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

O OHS é uma idealização de oscilador linear cujo movimento oscilatório não cessa no tempo, também conhecido como oscilador livre. Vamos usar o caso de um sistema massa-mola da Figura [1]. Seja o movimento 1D de um bloco de massa m sob a ação de uma mola de constante elástica k . A força \vec{F} aplicada ao corpo é uma força restauradora.

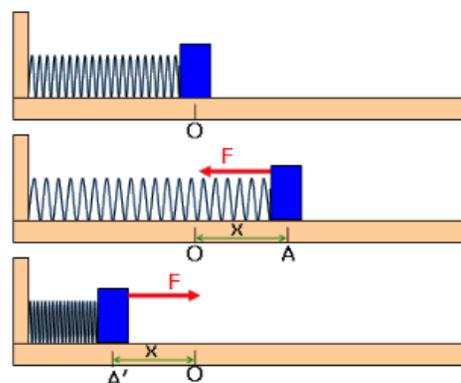


FIGURA 1. Sistema massa-mola.

Se a mola está na região elástica, na qual a Lei de Hooke é válida, a força que a mola faz na massa m é dada por: $\vec{F} = kx(-\hat{x})$, onde x é a deformação da mola. Escolhendo um referencial inercial, podemos usar a Segunda Lei de Newton, 2LN (Princípio Fundamental da Dinâmica, PFD):

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a} = m\ddot{\hat{x}} = m\ddot{x}\hat{x} = -kx\hat{x} \Rightarrow, \quad (1)$$

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

que representa a equação do MHS.

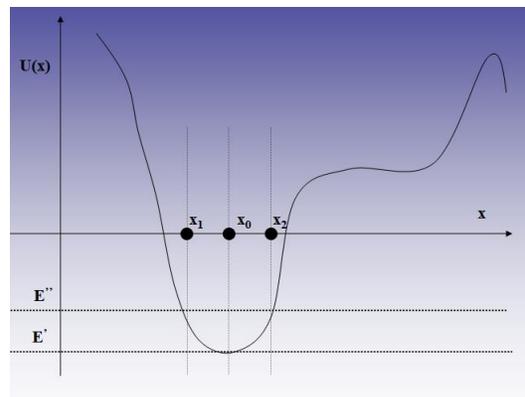


FIGURA 2. Energia potencial.

No OHS a força do sistema em movimento advém de uma energia potencial pois a energia mecânica se conserva: $E_M = E_c + E_p$, com a energia potencial, $E_p = U(x)$. Observe na Figura 2 o gráfico de uma energia potencial qualquer, $U(x)$ em função de x , para um movimento conservativo unidimensional, onde este potencial claramente não é o de um OHS na sua totalidade. Porém, para o intervalo de x correspondente a $[x_1, x_2]$, com ponto médio em x_0 , a curva se aproxima muito de uma parábola com a concavidade voltada para cima. Assim, para uma energia mecânica E'' nesta figura, a partícula material oscila entre os pontos mencionados, tendo como x_0 o ponto de equilíbrio estável, pois para E' não há movimento (imagine na mesa uma mola sem de formação unida a dois corpos, na situação de equilíbrio, onde x_0 representa o comprimento natural da mola, l). Para os pontos extremos x_1 e x_2 a energia potencial é máxima e $U(x_1) = U(x_2) = E''$ quando a energia mecânica é E'' . No movimento

oscilatório para esta energia, a energia cinética é nula para estes pontos e é máxima no ponto de equilíbrio x_0 . Portanto, para pontos próximos ao ponto de equilíbrio, a partícula oscila. A força é dada por $F(x) = -dU/dx$, então F é positiva entre x_1 e x_0 e negativa entre x_0 e x_2 . O trabalho da força neste intervalo é dado por $W = -\Delta U(x)$, só depende dos pontos extremos e $\Delta U(x) = -\Delta E_C$, resultando $\Delta(U + E) = 0$. Para descrevermos o movimento em torno do ponto de equilíbrio nesta figura, podemos a princípio fazer uma mudança na origem do sistema de coordenadas. Sendo mais rigorosos, expandimos a função $U(x)$ deste potencial complexo utilizando a série de Taylor em torno de $x = x_0 = 0$:

$$U(x) \approx U(x=0) + \left[\frac{dU(x)}{dx} \right]_{x=0} x + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right]_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \left[\frac{d^3U(x)}{dx^3} \right]_{x=0} x^3 + \frac{1}{24} \left[\frac{d^4U(x)}{dx^4} \right]_{x=0} x^4 + \dots \quad (2)$$

Note que a primeira derivada em $x = 0$ resulta zero por ser um ponto de mínimo; Chamando a segunda derivada de k , temos finalmente, numa primeira aproximação: $U(x) \approx kx^2 / 2$,

$$F(x) = -kx, \quad k = \left[\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right]_{x=0} = - \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=0} \quad (3)$$

Como $\left[\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right]_{x=0}$ é sempre positivo, k será positivo e a força será restauradora.

Como a energia mecânica é conservada, a sua taxa de variação temporal resulta em $m\ddot{x} + kx = 0$, que é a equação no MHS, movimento em torno do ponto de equilíbrio. Assim, mesmo que o gráfico do potencial seja anarmônico, o movimento próximo ao ponto de equilíbrio estável poderá ser aproximado ao MHS.

Observe que na expansão na série de Taylor em torno do ponto mínimo da curva o termo $\frac{d^3U(x)}{dx^3}$ também é nulo, e se quisermos ser mais precisos para um sistema não-linear, podemos escrever $F(x) = -kx - \epsilon x^3$, com $\epsilon \ll k$.

III. LINEARIDADE DA SOLUÇÃO DO MHS

Vimos que a equação $m\ddot{x} + kx = 0$ representa um MHS. Sendo $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ a frequência angular natural do OHS, independente das condições iniciais, com a razão k/m constante, a equação diferencial do MHS é dada por $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Uma combinação linear de duas soluções x_1 e x_2 também é solução desta equação.

Nesta equação diferencial: a) x é a variável dependente e t é a variável independente. A equação é **Ordinária** porque só

existe uma variável independente; b) a equação é **Linear** pois só existem termos lineares com respeito à variável dependente, x (por exemplo, não há o produto $x dx/dt$ ou outros); c) a equação é de 2ª ordem, pois a ordem da maior derivada é a 2ª; d) a equação é **Homogênea**, pois não contém outros termos além das incógnitas (variáveis dependentes) e suas derivadas.

IV. SOLUÇÃO DA EDLOH DO MHS

A solução para a equação MHS é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow \text{multiplicando por } 2\dot{x} \text{ vem}$$

$$\rightarrow 2\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 2\dot{x}x = 0 \therefore \int 2\dot{x}\ddot{x} = -\int \omega_0^2 2\dot{x}x \rightarrow$$

$$\dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 + C \text{ é a equação integrada;}$$

aplicando as condições iniciais:

$$x(t=0) = A \rightarrow \dot{x}(t=0) = 0 = -\omega_0^2 x^2 + C \rightarrow C$$

$$= \omega_0^2 A^2 \therefore \dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 + \omega_0^2 A^2 \rightarrow \dot{x} = \pm \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Tomando-se o sinal negativo e integrando, temos:

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega_0 \int dt. \text{ Fazendo a substituição}$$

trigonométrica apropriada, vem:

$$\cos^{-1} \left(\frac{x}{A} \right) = \omega_0 t + \alpha \rightarrow x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Ela possui 2 constantes arbitrárias pois a equação é de 2ª ordem. Nela, $A = (2E/k)^{1/2}$ é a amplitude, ou seja, o máximo deslocamento da posição de equilíbrio e α é a constante de fase ou fase inicial. O período de oscilação para completar um ciclo é $T = 2\pi/\omega_0$. A frequência angular ω_0 é uma constante que representa uma característica fundamental da oscilação. Seu valor é determinado unicamente pelas propriedades mecânicas do sistema, não dependendo das condições iniciais. A fase variando no tempo pode ser escrita como $\phi(t) = \omega_0 t + \alpha$.

Após um período, $t' = t + T$, escrevemos

$$\phi(t+T) = \omega_0(t+T) + \alpha = \phi(t) + 2\pi \rightarrow$$

$$T = \frac{\phi(t+T) - \phi(t)}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4)$$

V. CÁLCULO DAS CONSTANTES PARA A SOLUÇÃO DO OHS

Vimos que a solução é dada pela equação senoidal: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$. Para a origem dos tempos $t = 0$, temos a solução para $x(t)$: $x(t=0) = A \cos(\alpha)$. Para a solução da velocidade: $v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$.

Nessa equação, para $t = 0$, $v(0) = -A\omega_0 \sin \alpha$.

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{1}{\omega_0} \frac{v(0)}{x(0)}, \\ A^2 &= x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}(\phi_0) \text{ para } t_0 = 0 \text{ onde} \\ \phi_0 &= \operatorname{arcsen} x_0 \sqrt{\frac{k}{2E}}. \end{aligned} \quad (10)$$

VI. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

Vamos integrar $m\ddot{x} + kx = 0$, com as seguintes condições iniciais: $x(t = 0) = x_0$ e $v(t = 0) = v_0$. Usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} \therefore m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + kx = 0 \\ &\rightarrow m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}_f} \dot{x} d\dot{x} = -k \int_{x_0}^{x_f} x dx \\ \frac{m\dot{x}_f^2}{2} - \frac{m\dot{x}_0^2}{2} &= \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2} \rightarrow \\ \frac{m\dot{x}_f^2}{2} + \frac{kx_f^2}{2} &= \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = E_M \rightarrow \\ &\text{conservação da En. mecânica.} \end{aligned} \quad (6)$$

Podemos obter essa Lei de outra maneira, observando que x é função do tempo:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \rightarrow \text{multiplicando por } \dot{x} \rightarrow \\ m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0, \\ \text{assim: } \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} &= E_M = \text{constante de} \\ &\text{movimento.} \end{aligned} \quad (7)$$

Através da Lei de conservação, podemos obter novamente a equação do MHS:

$$\begin{aligned} \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_M &\rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{2}} \rightarrow \\ \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{2}}} &= \int_{t_0=0}^t dt, \end{aligned} \quad (8)$$

através da substituição trigonométrica

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}(\phi), \text{ obtemos:} \\ \phi &= \phi_0 + \sqrt{\frac{k}{m}} t, \text{ o que fornece a seguinte} \\ \text{equação horária: } x &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}(\phi_0 + \omega_0 t). \end{aligned} \quad (9)$$

A velocidade em função do tempo é:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\phi_0 + \omega_0 t). \quad (11)$$

Podemos mostrar que a relação $x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}(\phi_0 + \omega_0 t)$ é equivalente a combinação linear de funções seno e cosseno

$$\begin{aligned} x &= A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \cos \omega_0 t ; \\ x &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}(\phi_0 + \omega_0 t) = \\ &\sqrt{\frac{2E}{k}} (\operatorname{sen} \phi_0 \cos \omega_0 t + \operatorname{sen} \omega_0 t \cos \phi_0) \text{ e} \\ &\text{usando as constantes} \\ A &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \phi_0 \text{ e } B = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \phi_0, \\ \text{obtemos } x &= A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (12)$$

VII. PÊNDULO SIMPLES

Seja um pêndulo simples de massa m (uma bola pequena ou outro objeto), Figura 3, e um fio de comprimento l . No laboratório, podemos montar facilmente este pêndulo, usando uma linha fina, com comprimento que podemos variar a cada medição do período T , e também de um peso, por exemplo um objeto irregular, cujo centro de massa queremos também determinar, além da aceleração da gravidade local. Assim, as incógnitas são o valor de g e do CM do corpo pendular. O período é conhecido por todos (iremos deduzir depois) e é

dado por $T = 2\pi \sqrt{\frac{l+x}{g}}$, onde x é a localização do CM. Desta

equação obtemos a equação de uma reta em T^2 :

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2 - x.$$

Experimentalmente, variamos o comprimento do fio 10 vezes e para cada comprimento, medimos o período com um cronômetro. O gráfico resulta numa reta onde o coeficiente angular fornece g e o coeficiente linear, x .

Devemos oscilar o pêndulo num ângulo de abertura pequeno, conforme mostraremos a seguir, para que o movimento seja um MHS.

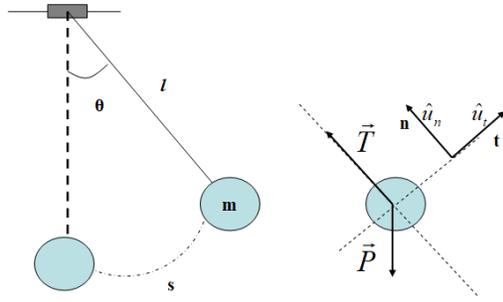


FIGURA 3. Pêndulo simples.

Na Figura 3, o pêndulo tem comprimento l ($x = 0$) e decompondo as forças no sistema de coordenadas normal e tangencial, temos:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow -mg \cos(\theta)\hat{u}_n + T\hat{u}_n - mg\text{sen}(\theta)\hat{u}_t = m\vec{a}. \quad (13)$$

Na direção tangencial, $-mg\text{sen}(\theta) = ma_t$ e a aceleração vetorial é dada por

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n. \quad (14)$$

O comprimento do fio é constante onde

$$v = l\dot{\theta} \rightarrow \dot{v} = l\ddot{\theta} = a_t, \therefore g\text{sen}(\theta) + a_t = 0 \rightarrow g\text{sen}(\theta) + l\ddot{\theta} = 0. \quad (15)$$

Assim:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) = 0. \quad (16)$$

Para pequenos ângulos, $\theta \ll 1$ rad, podemos desconsiderar termos superiores para θ , a fim de transformar a equação acima numa equação de MHS:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \text{ esta é uma equação análoga ao do OHS}$$

da mola, onde aqui $\omega_0 = \sqrt{g/l} = 2\pi/T$.

Podemos observar que o período de um pêndulo simples para pequenas amplitudes iniciais, não depende da amplitude (pequena), não depende da massa m , mas depende do comprimento l .

VIII. PÊNDULO FÍSICO OU COMPOSTO

O pêndulo físico da Figura 4 é um corpo rígido suspenso e livre para balançar em torno de um eixo que não passa pelo

centro de massa e que se especifica a posição do corpo pelo ângulo θ , entre a vertical e uma linha perpendicular ao eixo e que passa pelo ponto O, e passando pelo centro de massa G. Aplica-se o torque total exercido pelo peso P que passa pelo ponto G para obter a equação do MHS para pequenas amplitudes [1].

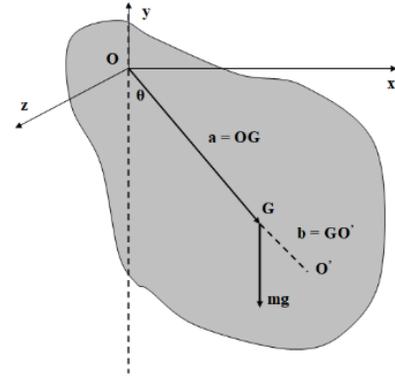


FIGURA 4. Pêndulo físico.

Na figura do pêndulo físico acima, o torque do peso em relação a O será:

$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{P} = I_O \ddot{\theta} \hat{k} = I_O \ddot{\theta} \hat{k}$. Sendo $\vec{r} = a\text{sen}(\theta)\hat{i} - a\cos(\theta)\hat{j}$ o vetor posição da força peso em relação ao ponto O e $\vec{P} = -mg\hat{j}$. Assim, $\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{P} = -mg\text{sen}(\theta)\hat{k}$. Portanto: $I_O \ddot{\theta} \hat{k} = -mg\text{sen}(\theta)\hat{k} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mga}{I_O}\text{sen}(\theta) = 0$ é a equação diferencial do pêndulo composto. Fazendo a expansão em seno e para pequenos ângulos, fica: $\ddot{\theta} + \frac{mga}{I_O}\theta = 0$, análoga ao do pêndulo simples.

Definindo o raio de giração K_O como $I_O = mK_O^2$, temos: $\ddot{\theta} + \frac{ga}{K_O^2}\theta = 0$. A frequência angular para o MHS será $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_O}} = \sqrt{\frac{ga}{K_O^2}}$. Para um pêndulo simples de mesma massa m e que está a uma distância l do ponto O, para $l = I_O/m = K_O^2/a$, o movimento desse pêndulo simples corresponde ao do pêndulo composto, onde $l = a + b$ na figura.

O ponto O' na Figura 4 situado a uma distância l de O é chamado de **centro de oscilação ou de percussão**. Deste modo:

$$l = a + b \rightarrow al = a^2 + ab \rightarrow K_O^2 = a^2 + ab. \quad (17)$$

Porém, pelo teorema de Steiner, sabemos que

$$I_O = I_G + ma^2 \rightarrow K_O^2 = K_G^2 + a^2. \quad (18)$$

Comparando estas duas últimas equações, temos que $K_G^2 = ab$.

Como esta equação é simétrica em relação a ab , conclui-se que se o corpo fosse suspenso por um eixo paralelo passando por O' , o centro de oscilação estaria em O.

IX. SUPERPOSIÇÃO DE 2 MHS

A superposição de movimentos harmônicos é particularmente importante no estudo da ondulatória. Fenômenos de

batimentos e interferências são explicados através da superposição. Vamos estudar alguns casos de superposição. Vimos que a equações de MHS são lineares e, portanto, a combinação linear de duas soluções também é a solução procurada. Se x_1 e x_2 são soluções, então $ax_1 + bx_2$ também será uma solução.

X. 2 MHS COM MESMA FREQUENCIA E FASES DISTINTAS, MESMA DIREÇÃO

Sejam: $x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$ e $x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$. A superposição desses 2 MHS é dada por $x = x_1 + x_2$. Como a projeção de um MCU fornece um MHS, para obter x basta fazer a soma vetorial (regra do paralelogramo na figura trigonométrica no plano xy). Outra maneira seria usar a notação complexa, obtendo-se:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \text{ onde} \quad (19)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} \text{ e}$$

com a fase dada por

$$\text{tg } \phi_0 = \frac{A_2 \text{sen}(\phi_2 - \phi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} \quad (20)$$

Agora teremos a superposição

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (21)$$

onde

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (22)$$

e

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (23)$$

Esta superposição só será periódica se $aT_1 = bT_2$, ou seja, se $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$ (racionais, podem ser escritos na forma de fração). Caso contrário, são incomensuráveis. Um caso particular é obtido quando [1, 2]

$$\omega_1 \approx \omega_2 \rightarrow |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1. \quad (24)$$

Seja $A_1 = A_2$.

Neste caso:

Oscilações e vibrações mecânicas. Abordagem teórica e simulações

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$$

$$2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t =$$

$$A(t) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t. \quad (25)$$

Na equação acima, o primeiro termo (diferença entre as frequências) varia muito lentamente com o tempo e o segundo termo (soma das frequências) varia muito rapidamente.

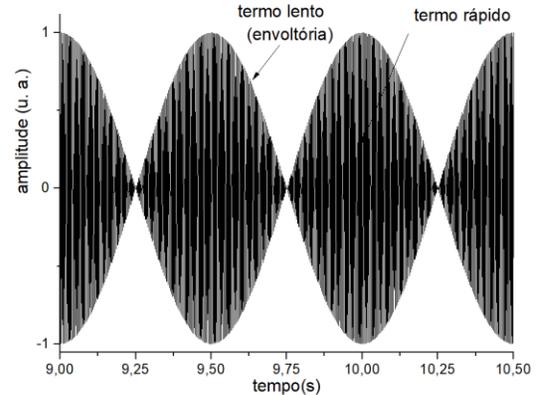


FIGURA 5. Superposição de 2 MHS.

Na Figura 5, feita no Origin (OriginPro 9 64 bits for free download), fizemos o gráfico onde

$$y = \cos(1602.165 * \text{col}(A)) * \cos(6.283 * \text{col}(A)), \quad (26)$$

e coluna $A(\text{tempo}) = 0.0001 * (i-1)$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, para a superposição de 2 MHS com frequências de 256Hz e 254Hz, amplitudes iguais $A = 1$ (u. a.); as frequências angulares dos termos rápidos e lentos são de 510π rad/s e 2π rad/s; A envoltória $A(t)$ modula o batimento, pois num intervalo de 1s, temos 2 zeros, ou seja, a amplitude da resultante se anula 2 vezes, com período de batimento de 0,5s, ou seja, a cada 0,5s a amplitude se anula. A frequência de batimento é dada por $f_b = (f_2 - f_1)$.

XI. 2 MHS COM DIREÇÕES ORTOGONAIS

Seja uma força restauradora em 2D:

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x\hat{i} + y\hat{j}) = m\ddot{\vec{r}} \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0, \quad (27)$$

e

$$m\ddot{y} + ky = 0, \quad (28)$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi_x) \text{ e } y = B \cos(\omega_0 t + \phi_y). \quad (29)$$

Vamos supor $\phi_x = 0$ e $\phi_y = \phi$

Como eles tem a **mesma frequência**, então a superposição será periódica. O sistema deve percorrer uma trajetória no plano xy e para ver melhor podemos fazer o gráfico de $y = f(x)$. Então: $x = A\cos\omega_0 t$ e $y = B\cos(\omega_0 t + \phi)$.

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{A}\right)\left(\frac{y}{B}\right)\cos\phi = \sin^2\phi. \quad (30)$$

No caso em que a **frequências não são iguais**, poderemos ter as **figuras de Lissajous** na superposição de 2 oscilações harmônicas. Sejam:

$$x = A\cos(\omega_x t) \text{ e } y = B\cos(\omega_y t). \quad (31)$$

Se a razão $\omega_x/\omega_y \in \mathbb{Q}$, a trajetória será fechada nos movimentos periódicos e as figuras de Lissajous serão observadas (ver figura abaixo).

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{A}\right)\left(\frac{y}{B}\right)\cos((\omega_x - \omega_y)t) = \sin^2((\omega_x - \omega_y)t). \quad (32)$$

Esta é uma equação da elipse que se deforma com o tempo (Figura 6).



FIGURA 6. Figuras de Lissajous.

Na situação tridimensional, a trajetória da massa m no espaço será fechada se ω_x, ω_y e ω_z forem comensuráveis, ou seja:

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}, \quad (33)$$

e o movimento será periódico. Na composição gráfica de 2 movimentos oscilatórios formando a figura de Lissajous, sendo que em cada direção há uma frequência fixa, se por exemplo há uma determinada frequência na vertical e na horizontal temos o dobro dessa frequência, então podemos escrever:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{1}{2} = \frac{\text{número de tangentes em } x}{\text{número de tangentes em } y}. \quad (34)$$

XII. OSCILAÇÕES AMORTECIDAS

Vimos que o oscilador linear ou OHS é uma caso de oscilador livre, ou seja, o sistema oscilante é conservativo e a energia mecânica E se conserva, pois é uma constante de movimento. A taxa de variação temporal de E é nula. Na prática, no caso real, ocorre a dissipação de energia e a oscilação será amortecida com amplitudes cada vez menores ao longo do

tempo. Vamos então incluir o efeito do amortecimento através de uma força de amortecimento dissipativa na ED os oscilador, a fim de simular o caso real (Figura 7). No sistema 1D vamos considerar que o sistema massa-mola se move num fluido ou líquido onde há forças de atrito dissipativas, descartando possíveis turbulências para velocidades não muito elevadas.

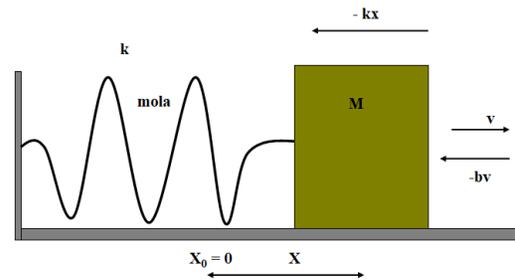


FIGURA 7. Oscilador amortecido.

A força de atrito é oposta à velocidade e seu módulo aumenta com a velocidade. Nos fluidos ela é dada por:

$$\vec{F}_{atr} = -\rho\dot{x}\hat{i} - c\dot{x}^2\hat{i}. \quad (35)$$

O primeiro termo à direita é o termo viscoso e o segundo é o termo de pressão para velocidades muito elevadas. Para baixas velocidades, $\vec{F}_{atr} = -\rho\dot{x}\hat{i}$, onde ρ é o coeficiente de amortecimento viscoso. Seguindo o procedimento anterior, vamos aplicar a 2LN ao sistema:

$$PFD: F_{res} = ma = m\ddot{x} \rightarrow -\rho\dot{x} - kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0 \text{ (EDOH).}$$

onde foi definido $\omega_0^2 \equiv k/m$, $\gamma \equiv \rho/2m$, sendo k a constante da mola e γ o amortecimento.

As unidades são: $[\omega_0] = \text{rad/s}$, $[\gamma] = \text{s}^{-1}$, $[\rho] = N/(m/s) = \text{Ns}/m = \text{kg/s}$.

Portanto: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Veremos depois que a frequência natural da mola ω_0 e o amortecimento (que tem unidade de frequência também), concorrem para comandar o tipo de oscilação que resultará desta composição.

Vamos usar a notação complexa z cuja parte real nos dará a posição do móvel $x(t)$, $Re(z) = x$, e resolvemos a equação

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \text{ cuja solução é } z = e^{\alpha t} \rightarrow \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (36)$$

As raízes desta equação característica são:

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (37)$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (41)$$

A solução então depende da relação entre γ e ω_0 :

a) $\gamma < \omega_0 \rightarrow$ o amortecimento é subcrítico ou subamortecido e a solução será oscilatória com amplitude decrescente.

b) $\gamma > \omega_0 \rightarrow$ o amortecimento é supercrítico ou superamortecido e a solução será exponencial (não oscilatória).

c) $\gamma = \omega_0 \rightarrow$ o amortecimento é crítico e a solução exponencial (não oscilatória).

XII.a CASO a: $\gamma < \omega_0 \rightarrow$ O AMORTECIMENTO É SUBCRÍTICO OU SUBAMORTECIDO

Vimos que

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}; \quad (38)$$

é o caso mais importante, onde o amortecimento é suave, principalmente quando $\gamma \ll \omega_0$. Na raiz da equação característica, $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ é imaginário, pois $\gamma < \omega_0$. Seja

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \rightarrow \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \\ &\pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i\omega \rightarrow \alpha = -\gamma \pm i\omega. \end{aligned} \quad (39)$$

A solução para z é:

$$\begin{aligned} z &= A_1 e^{-\gamma + i\omega t} + A_2 e^{-\gamma - i\omega t} \text{ onde} \\ A_1 &= |A_1| e^{i\phi_1} \text{ e } A_2 = |A_2| e^{i\phi_2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Assim: $x(t) = \text{Re}(z) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$. Observe que $x(t)$ é real, com as constantes A e φ reais e $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Se o amortecimento pode ser desprezado, então $\gamma = 0$ e a solução será $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, que é a solução para o MHS. Na solução para o caso subcrítico,

$x(t) = \text{Re}(z) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$, podemos verificar que esta solução é oscilatória com a amplitude variando com o tempo, $Ae^{-\gamma t}$, sendo A a amplitude máxima em $t = 0$.

Chamamos a curva $Ae^{-\gamma t}$ de **envoltória** e podemos visualizar o gráfico de $x(t)$ em função do tempo na figura abaixo. Fizemos a Figura 8 no Origin [3] com os seguintes dados:

$A = 1$ (u.a.); $\varphi = 0$; $\omega_0 = 2\pi$ rad/s; para o amortecimento γ , consideramos os casos: fraco, $\gamma = 0,5s^{-1}$; médio, para $\gamma = 2,0s^{-1}$; forte, $\gamma = 5,0s^{-1}$, para situações onde sempre $\gamma < \omega_0$. Há também a curva para o OHS ($\gamma = 0$) e a envoltória $e^{-0,5t}$ (linha vermelha tracejada) que modula a curva $x(t)$ para $\gamma = 0,5s^{-1}$. Observe que a amplitude decai exponencialmente quando há amortecimento. A envoltória da oscilação tende a zero no ∞ . A frequência ω (sempre menor que ω_0 natural da mola) na solução

não é verdadeiramente uma frequência natural, como é ω_0 , pois o oscilador **nunca** passa 2 vezes pela mesma posição com a mesma velocidade. Logo, o sistema **não é periódico**. Chamaremos de **pseudo-período** o intervalo de tempo $T = 2\pi/\omega$.

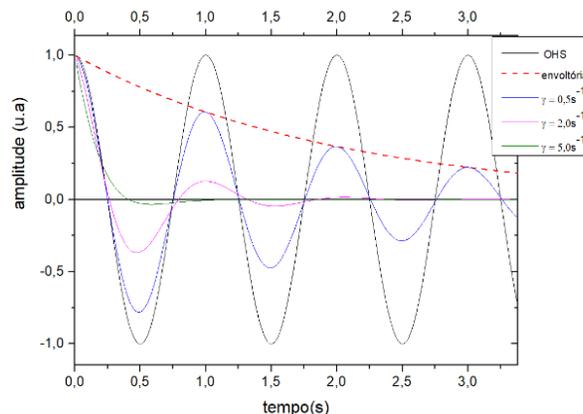


FIGURA 8. Oscilação amortecida.

As constantes serão:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega^2}} \text{ e } \text{tg } \varphi = -\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}. \quad (42)$$

A energia mecânica do oscilador amortecido pode ser escrita como $E(t) = E_{cin}(t) + E_{pot}(t)$ e a taxa instantânea de dissipação dessa energia pode ser obtida através do **Balço de Energia**:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} (E_{cin} + E_{pot}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) \\ &= m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x}. \end{aligned} \quad (43)$$

Pela equação do movimento, temos que

$$m \ddot{x} + kx = -\rho \dot{x}. \quad (44)$$

Assim:

$$\dot{E}(t) = -\rho \dot{x}^2, \quad (45)$$

onde ρ é o coeficiente de amortecimento viscoso.

A presença da força de atrito viscoso $\vec{f}_{atr} = -\rho \dot{x} \hat{i}$ resulta na perda gradual de energia que ocasiona o decaimento com o tempo. De outro modo, podemos afirmar que $E(t) = E(0) + W_{fat}$, onde $E(0)$ é a energia total em $t = 0$ e W_{fat} é o trabalho feito pela força de atrito no intervalo de 0 a t . Sabendo-se que $\vec{f}_{atr} = -\rho \dot{x} \hat{i}$, pode-se calcular a diferencial do trabalho da força de atrito dW_{fat} :

$$\begin{aligned} dW_{fat} &= f_{atr} dx = f_{atr} \frac{dx}{dt} dt = (-\rho \dot{x}) \dot{x} dt = \\ &= -\rho \dot{x}^2 dt \rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = \frac{dE(0)}{dt} + \frac{dW_{fat}}{dt} = -\rho \dot{x}^2, \end{aligned} \quad (46)$$

Que é negativo, o que representa a energia dissipada na forma de calor.

Podemos analisar que fração da energia é dissipada em cada ciclo do oscilador, onde consideraremos cada ciclo como a ocorrência entre 2 máximos consecutivos; para o amortecimento fraco, $\gamma \ll \omega_0$, podemos aproximar o termo de amortecimento $e^{-\gamma t}$ como **constante em 1 ciclo de oscilação** (a envoltória cai muito suavemente com o tempo, e em 1 ciclo completo ela cai muito pouco). Também, podemos estudar a **energia média** durante o pseu-período de oscilação, que se obtém através da equação:

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(t') dt' \quad (47)$$

Vimos que

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \dot{x}(t) \\ &= -A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) - A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \approx \\ &= -A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \text{ pois } \gamma \ll \omega_0. \end{aligned} \quad (48)$$

Substituindo x e v na equação da energia, vem:

$$\begin{aligned} \bar{E}(t) &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \\ &= \frac{1}{2} m A^2 e^{-2\gamma t} \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (49)$$

Para obter $\bar{E}(t)$, como $e^{-\gamma t}$ foi aproximado para uma constante no ciclo, então basta calcular a média do seno e do cosseno ao quadrado na equação da energia obtida acima.

Assim:
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-2\gamma t} \omega^2 (1/2) + \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} (1/2).$$

Porém, vimos que $\omega \approx \omega_0$ se $\gamma \ll \omega_0$.

Logo: $\bar{E}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$. Para o amortecimento fraco, a energia média do oscilador decai exponencialmente com o tempo. Escrevemos então: $\bar{E}(t) = \bar{E}_0 e^{-2\gamma t}$, onde a energia inicial em $t = 0$ é \bar{E}_0 . Na Figura 9 abaixo vemos o gráfico da **energia mecânica** variando no tempo para o caso de amortecimento suave, onde $m = 1\text{kg}$, $\omega = 2\pi\text{rad/s}$, $\gamma = 0,5\text{s}^{-1}$ (linha cheia) e também o gráfico da **energia média** com aproximação feita acima. Observa-se em $\bar{E}(t) = \bar{E}_0 e^{-2\gamma t}$ que a energia decai muito mais rapidamente, mais rápido do que o decaimento da amplitude (A cai com $e^{-\gamma t}$). O tempo necessário para que a energia caia para $1/e$ ($= 0,368$) de seu valor inicial é chamado de **tempo característico** ou **constante de decaimento**, τ_{dec} , dado por:

$$\bar{E}(t = \tau_{dec}) = \bar{E}_0 / e = \bar{E}_0 e^{-2\gamma \tau_{dec}} \rightarrow 2\gamma \tau_{dec} = 1. \quad (50)$$

Portanto, $\tau_{dec} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{2m}{2\rho} = \frac{m}{\rho}$. Se γ é pequeno, $\tau_{dec} \rightarrow \infty$, e se γ é grande, $\tau_{dec} \rightarrow 0$. Também, podemos escrever a derivada temporal do logaritmo da energia:

$$\frac{d}{dt} (\ln \bar{E}) = \frac{1}{\bar{E}} \frac{d\bar{E}}{dt} = -2\gamma, \quad (51)$$

que representa a taxa fracional do decréscimo da energia. Vimos que $dE/dt = -\rho v^2$, então a perda da energia não é uniforme. Essa perda é máxima quando a velocidade for máxima e será nula quando a velocidade for nula (na amplitude máxima), conforme se observa na figura abaixo (direita).

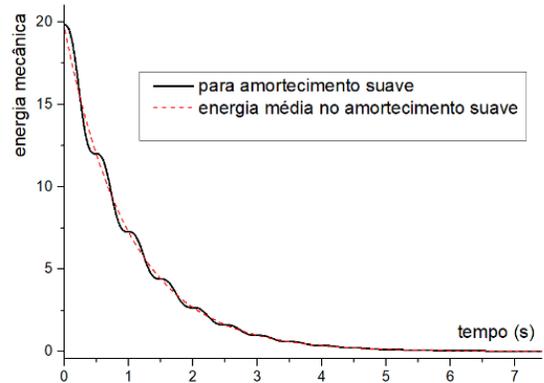


FIGURA 9. Energia mecânica E versus tempo.

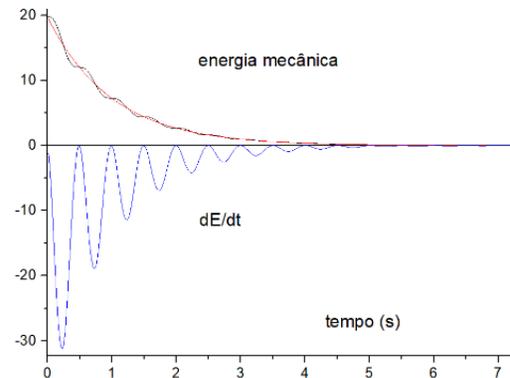


FIGURA 10. Taxa de variação de E.

Vamos abordar agora o fator Q de qualidade. Q é uma quantidade adimensional que representa o grau de amortecimento de um oscilador. Quanto maior o valor de Q , menor será o amortecimento. No caso de um OHS idealizado, este valor tende ao infinito. Q é definido como sendo o produto de 2π pela razão entre a energia média armazenada no sistema e a energia média perdida num ciclo:

$$Q = 2\pi \frac{\bar{E}}{(-d\bar{E})}. \text{ Como vimos, o tempo de decaimento para a}$$

energia é dado por $\tau_{dec} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{2m}{2\rho} = \frac{m}{\rho}$, e a energia cai para

$1/e$ de seu valor inicial. Logo, o número de radianos deslocados até que a energia caia para \bar{E}_0 / e será dado por:

$$Q = 2\pi \frac{\tau_{dec}}{T}, \text{ onde } T \text{ é o pseudo-período do oscilador.}$$

Portanto, $Q = \frac{2\pi}{T} \tau_{dec} = \omega \tau_{dec} = \omega \frac{m}{\rho} = \frac{\omega}{2\gamma}$. Lasers podem alcançar $Q = 10^{14}$ e átomos excitados, 10^7 . Para o caso de amortecimento fraco, onde $\gamma \ll \omega_0$, temos que $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$. Neste caso, $Q = \omega_0 \frac{m}{\rho} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ e a energia média

será $\bar{E}(t) = \bar{E}_0 e^{-2\gamma t} = \bar{E}_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$. A taxa de variação temporal da energia é:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} \bar{E}_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q} t} = -\frac{\omega_0}{Q} \bar{E}$$

e o fator Q pode ser obtido: $Q = 2\pi \frac{\bar{E}}{(-d\bar{E})}$.

XII.b $\gamma > \omega_0 \rightarrow$ o AMORTECIMENTO É SUPERCRÍTICO OU SUPERAMORTECIDO

Vimos que de um dado z complexo, $\text{Re}(z) = x$, e resolvemos a equação diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z &= 0, \text{ cuja solução é } z = \\ e^{\alpha t} \rightarrow \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 &= 0, \end{aligned} \quad (52)$$

onde as raízes desta equação característica são:

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \beta, \text{ onde } \beta \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (53)$$

Solução:

$$x = C e^{\alpha t} = C e^{(-\gamma \pm \beta)t} = C_1 e^{(-\gamma + \beta)t} + C_2 e^{(-\gamma - \beta)t}, \quad (54)$$

onde temos 2 exponenciais decrescentes, pois $-\gamma + \beta < 0$ e $-\gamma - \beta < 0$, onde $e^{(-\gamma + \beta)t}$ vai a zero mais lentamente. Esta solução nos remete às funções hiperbólicas (Figura 11):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \rightarrow \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \rightarrow \sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} =$$

$$i \sinh x \rightarrow \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x; \frac{d}{dx} \sinh x =$$

$$\cosh x; \frac{d}{dx} \text{tgh} x = \text{sech}^2 x$$

Os gráficos destas funções estão na figura a seguir.

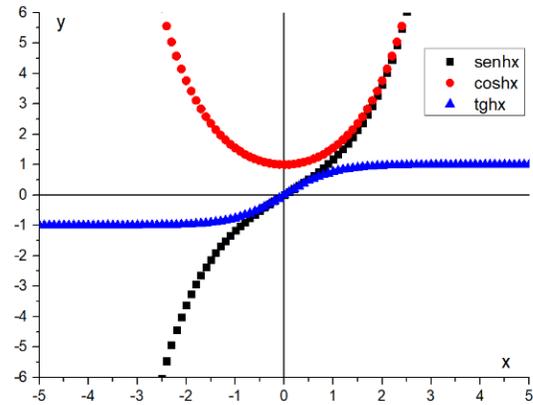


FIGURA 11. Funções hiperbólicas.

Vimos que

$$\begin{aligned} x &= e^{-\gamma t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) = e^{-\gamma t} \left[C_1 \left(\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} - \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right) \right] = \\ &e^{-\gamma t} [(C_1 + C_2) \cosh \beta t + (C_1 - C_2) \sinh \beta t] \rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} [a_1 \cosh \beta t + a_2 \sinh \beta t] \end{aligned} \quad (55)$$

este resultado para $x(t)$ representa um comportamento não-oscilatório, cujo deslocamento depende das condições iniciais $x(t=0)$. Como $\gamma > \omega_0$, não há oscilação pois há um elevado amortecimento. Na Figura 12 vemos a situação de $x(t)$, onde $x(0) = 0$.

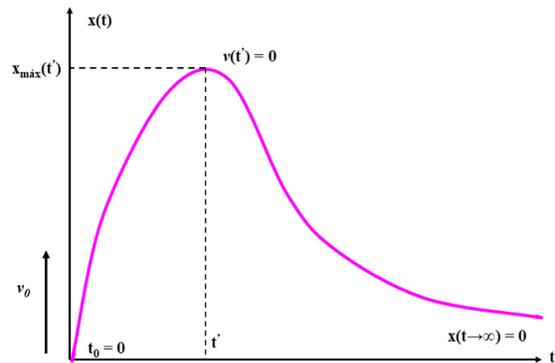


FIGURA 12. Amortecimento supercrítico.

Vamos agora ver os cálculos das constantes. Sejam as seguintes condições iniciais: $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = v_0$, para a posição e para a velocidade. Deste modo:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} [a_1 \cosh \beta t + a_2 \sinh \beta t] \rightarrow x(t=0) \\ &= e^0 [a_1 \cosh 0 + a_2 \sinh 0] = a_1 \rightarrow x_0 = a_1 \\ \dot{x}(t) &= -\gamma e^{-\gamma t} [a_1 \cosh \beta t + a_2 \sinh \beta t] + \\ &e^{-\gamma t} [a_1 \beta \sinh \beta t + a_2 \beta \cosh \beta t] \\ \therefore \dot{x}(t=0) &= -\gamma(a_1 + 0) + (0 + a_2 \beta) = \\ -\gamma x_0 + a_2 \beta &= v_0 \rightarrow a_2 = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\beta}. \end{aligned} \quad (56)$$

Portanto: $x(t) =$

$$e^{-\gamma t} \left[x_0 \cosh \beta t + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\beta} \right) \sinh \beta t \right], \quad (57)$$

ou então em termos das exponenciais:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{v_0 + x_0(\gamma + \beta)}{2\beta} \right) e^{\beta t} + \left(\frac{x_0(\beta - \gamma) - v_0}{2\beta} \right) e^{-\beta t} \right] \quad (58)$$

O sistema superamortecido onde $x_0 = 0$ e com velocidade inicial v_0 será:

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{v_0}{2\beta} \right) e^{\beta t} + \left(\frac{-v_0}{2\beta} \right) e^{-\beta t} \right] = \\ & \frac{v_0}{\beta} e^{-\gamma t} \sinh \beta t. \end{aligned} \quad (59)$$

Derivando, obtemos a velocidade:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma v_0}{\beta} e^{-\gamma t} \sinh \beta t + v_0 e^{-\gamma t} \cosh \beta t, \quad (60)$$

$$\rightarrow \dot{x}(t=0) = v_0. \quad (61)$$

Na Figura 12 vemos que no instante t' temos um ponto de máximo (velocidade nula):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t') &= 0 \rightarrow -\frac{\gamma v_0}{\beta} e^{-\gamma t'} \sinh \beta t' + \\ & v_0 e^{-\gamma t'} \cosh \beta t' = 0 \rightarrow \\ & a) e^{-\gamma t'} = 0 \rightarrow t' \rightarrow \infty, \text{ ou} \\ & b) \tanh \beta t' = \frac{\beta}{\gamma} \rightarrow t' = \\ & \frac{1}{\beta} \operatorname{arctgh}(\beta / \gamma). \end{aligned} \quad (62)$$

Há um único ponto onde a velocidade se anula. Isto mostra que só há um valor para o deslocamento máximo.

XII.c $\gamma = \omega_0 \rightarrow$ AMORTECIMENTO CRÍTICO

Como vimos, a solução da equação característica do movimento amortecido é dada por $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Para o caso de amortecimento crítico, $\gamma = \omega_0$, o que leva a ter $\alpha = -\gamma$. Isto representa o caso de menor valor de ρ para o movimento deixar de ser oscilatório. Temos uma raiz dupla cuja solução seria $x(t) = A \exp(-\gamma t)$. Esta não é a solução geral, pois há apenas uma constante a determinar. Vamos então testar mais uma Ansatz: $x(t) = (Bt) \exp(at)$. Substituindo na equação do movimento $\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$:

$$x(t) = Bte^{at} \rightarrow \dot{x}(t) = Be^{at} + \alpha Bte^{at} \rightarrow$$

$$\ddot{x}(t) = B\alpha e^{at} + \alpha Be^{at} + \alpha^2 Bte^{at}$$

$$\therefore B\alpha e^{at} + \alpha Be^{at} + \alpha^2 Bte^{at} +$$

$$2\gamma (Be^{at} + \alpha Bte^{at}) + \omega_0^2 Bte^{at} = 0 \rightarrow$$

$$2\alpha + \alpha^2 t + 2\gamma + 2\alpha\gamma t + \omega_0^2 t = 0 \rightarrow$$

$$\text{substituindo } \omega_0 = \gamma \rightarrow$$

$$2\alpha + \alpha^2 t + 2\gamma + 2\alpha\gamma t + \gamma^2 t = 0$$

$$\text{mas } \alpha = -\gamma \rightarrow (\alpha + \gamma)^2 = 0$$

$$\therefore 2(\alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma)^2 t = 0.$$

A solução geral é: $x(t) =$

$$e^{-\gamma t} (a + bt) \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são as constantes} \quad (63)$$

a determinar através das condições iniciais.

O cálculo das constante pode então ser obtido agora. Sejam as condições iniciais: $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = v_0$.

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a + bt) \rightarrow x(t=0) = a \therefore x_0 = a$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} (a + bt) + b e^{-\gamma t} \rightarrow \dot{x}(t=0) =$$

$$v_0 = -\gamma x_0 + b \rightarrow b = v_0 + \gamma x_0$$

$$\therefore x(t) = e^{-\gamma t} [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]. \quad (64)$$

Este movimento decai mais rapidamente que o supercrítico, perdendo energia mecânica mais rapidamente, conforme pode ser visto na Figura 13. Com a constante de atrito $\rho = 2\sqrt{mk}$ o movimento deixa de ser periódico e a massa retorna à sua posição de equilíbrio, quando solta da sua posição inicial A_0 , caracterizando o chamado amortecimento crítico. Um exemplo prático de amortecimento crítico ocorre nos amortecedores de automóveis, projetados para amortecerem as oscilações do sistema de suspensão composto por molas de grandes constantes elásticas. No amortecimento supercrítico o sistema nem chegaria a completar meia oscilação, demorando um tempo muito longo até que o sistema chegasse à posição de equilíbrio.

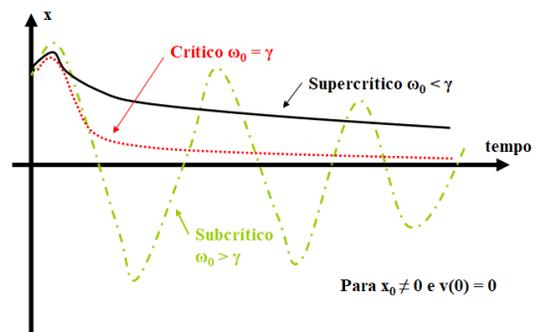


FIGURA 13. Amortecimento supercrítico, crítico e subcrítico.

O artigo [4] também trata de movimento oscilatório. O problema é de uma máquina de Atwood, conforme a Figura

XIII. OSCILAÇÕES FORÇADAS

14, onde a massa m_2 fica no solo enquanto as outras duas massas se movimentam para baixo, e depois no movimento para cima, ela se solta do chão e acompanha as outras, e assim sucessivamente, num movimento amortecido até parar.

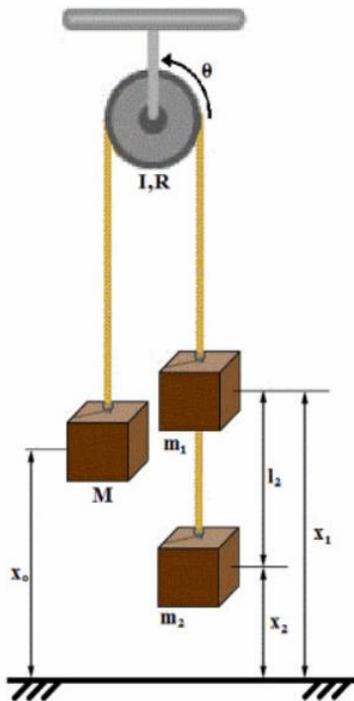


FIGURA 14. Máquina de Atwood com massa variável.

Na Figura 15, observa-se a curva de variação da energia mecânica, semelhante ao que mostrou-se para movimento amortecido.

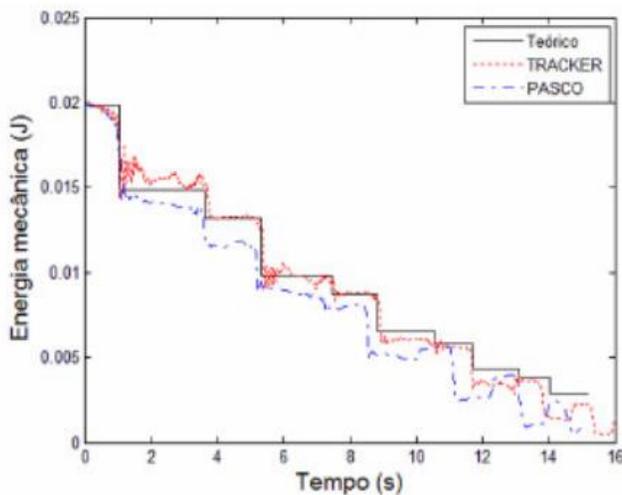


FIGURA 15. Energia mecânica variável para um movimento amortecido.

Nas oscilações livres o sistema recebe inicialmente uma quantidade de energia e era liberado. Um oscilador livre oscila para sempre. Na prática, isto não existe, pois sempre ocorre dissipação de energia e a oscilação cessa após certo tempo. Então, para manter a oscilação, deveremos aplicar uma força externa ao sistema oscilante para que a energia perdida seja repostada. Vamos então introduzir uma agente externo que fornece energia ao sistema e estudaremos o efeito dessa atuação no movimento resultante. Seja um sistema massa-mola 1D sujeito a uma força externa $F(t)$. Pela 2LN (PFD):

$$F(t) - kx = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}, \text{ onde} \quad (65)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \text{ com } \omega_0 \text{ sendo a frequência natural}$$

da mola, do oscilador livre.

Esta equação $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$ para o movimento forçado é

linear e de segunda ordem, sendo não-homogênea; então, o princípio da superposição **não** é válido, ou seja, a combinação linear de 2 soluções **não** é solução.

-Equação diferencial não-homogênea

Seja a EDL não-homogênea:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t). \quad (66)$$

A solução desta equação poderá ser obtida a partir da solução da equação homogênea (x_h) e de uma solução particular (x_p) da equação completa. Seja $x = \alpha x_h + x_p$, onde α é uma constante. x_h é a solução já conhecida da equação homogênea $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ na equação apresentada acima.

-Forças periódicas

Seja um sistema massa-mola 1D sujeito a uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Observe que ω é a frequência da força excitadora externa e que pode assumir qualquer valor, inclusive o valor particular de ω_0 .

A equação do movimento é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m}, \text{ onde } \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}. \quad (67)$$

A equação homogênea (para $F(t) = 0$) é um MHS e sua solução é $x_h = B \cos(\omega_0 t + \phi_0)$. Como a força externa é senoidal, podemos supor a seguinte solução particular para x_p : $x_p = A \cos(\omega t + \phi)$. Substituindo na equação do movimento, vem:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m} \rightarrow$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m} \rightarrow$$

$$A(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m}. \quad (68)$$

A fase φ dará o sinal da amplitude resultante:

se $\varphi = 0 \rightarrow A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (69)$

se $\varphi = -\pi \rightarrow A = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (70)$

Para $\omega_0 > \omega$, usaremos $\varphi = 0$. Para $\omega_0 < \omega$, usaremos $\varphi = -\pi$. Em geral:

$$A = \frac{F_0}{m|(\omega_0^2 - \omega^2)|}. \quad (71)$$

-Ressonância

A expressão da amplitude que encontramos $A = \frac{F_0}{m|(\omega_0^2 - \omega^2)|}$ possui uma divergência para $\omega \rightarrow \omega_0$ ($\omega \approx \omega_0$). Essa divergência deixa de existir ao se considerar a dissipação de energia, o que sempre ocorre em sistemas reais. Por outro lado, nesse limite, de fato a amplitude de oscilação cresce muito, o que invalida o modelo de pequenas oscilações. Dessa forma, aparecem efeitos não-lineares que podem ter consequências catastróficas. A esse efeito chamamos Ressonância.

-Cálculo das constantes

Seja a solução:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t + B \cos(\omega_0 t + \phi_0). \quad (72)$$

Consideraremos as seguintes condições iniciais: $x(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$.

$$x(t = 0) = 0 \rightarrow \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + B = 0 \rightarrow B = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$v(t = 0) = \dot{x}(t = 0) = 0 \rightarrow \frac{F_0 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{sen}(0)$$

$$-B\omega_0 \text{sen}(\phi_0) = 0 \rightarrow$$

$$-B\omega_0 \text{sen}(\phi_0) = 0 \rightarrow \phi_0 = 0$$

$$\therefore x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t), \quad (73)$$

na equação para $x(t)$ acima, temos a superposição de 2 MHS.

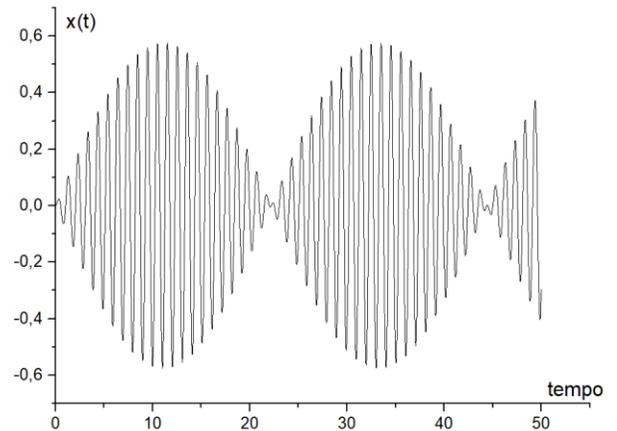


FIGURA 16. Superposição de 2 MHS.

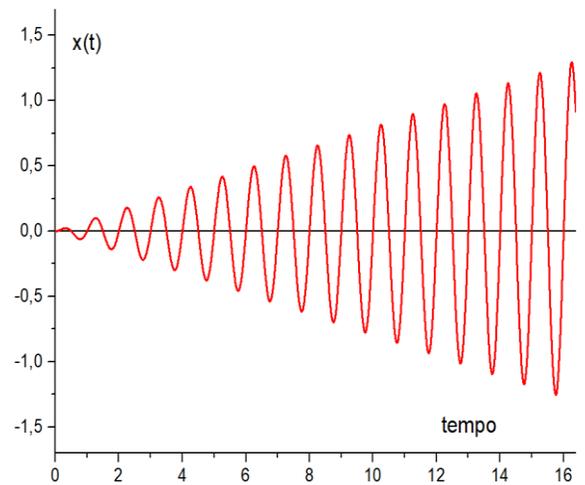


FIGURA 17. Ressonância na superposição de MHS.

Nas Figuras 16 e 17, vemos a resultante $x(t)$ para dois casos: a Figura 16 representa a superposição de dois MHS com frequências $\omega = 6\text{rad/s}$ e $\omega_0 = 6,283\text{rad/s}$, observando-se o **batimento**, e na Figura 17, temos o resultado para frequências **muito próximas**, $\omega \approx \omega_0$, $\omega = 6,280\text{rad/s}$ e $\omega_0 = 6,283\text{rad/s}$, onde se verifica o fenômeno da **ressonância**.

Vamos analisar melhor o sistema para frequências muito próximas, $\omega \approx \omega_0$.

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \rightarrow x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega t}{(\omega_0 - \omega)}$$

$$\therefore \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{0}{0} = ? = L' \text{Hospital} = \frac{\frac{d}{d\omega} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t)}{\frac{d}{d\omega} (\omega_0 - \omega)} \Bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{t \text{sen} \omega_0 t}{-1} = -t \text{sen} \omega_0 t \quad (74)$$

Demonstra-se assim o crescimento da amplitude de oscilação, como já mostrado na figura acima, da direita. O efeito então

da **ressonância** é produzir um **crescimento linear** da amplitude de oscilação.

-Princípio da superposição e as Séries de Fourier

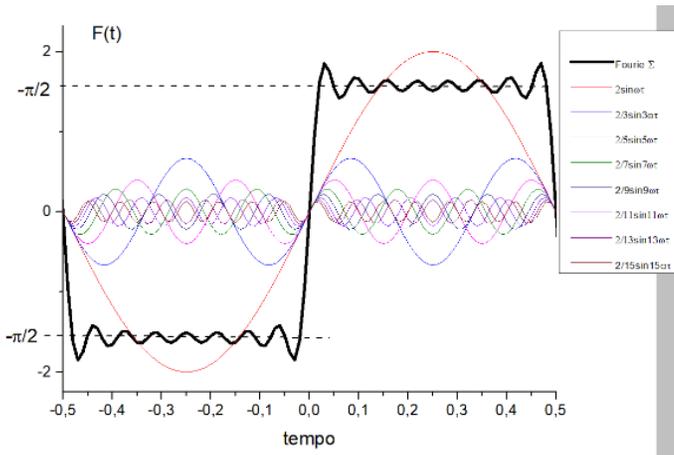


FIGURA 18. Expansão em séries de Fourier.

Quando uma força externa aplicada ao oscilador é periódica mas não-harmônica, e contínua no intervalo de um período, onde $F(t + T) = F(t)$, essa força pode ser expressa por uma soma termos harmônicos (Figura 18). Assim, toda função $F(t)$, definida no intervalo $[-T/2, T/2]$ (ou $F(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$), pode ser escrita como uma série com termos em senos e cossenos:

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \dots + B_1 \text{sen}\omega t + B_2 \text{sen}2\omega t + \dots + B_n \text{sen}n\omega t + \dots \Leftrightarrow F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \text{sen}n\omega t). \quad (75)$$

onde A_n e B_n são constantes e $n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \infty$, determinadas por integração:

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt; A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos n\omega t dt; \quad (76)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \text{sen}n\omega t dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (77)$$

-Sistemas oscilantes não-lineares simétricos

Seja uma força não-linear $F(x)$, onde escrevemos: $m\ddot{x} + F(x) = 0$ onde $F(x)$ é a força restauradora e é não-linear. Como vimos antes, vamos expandir $F(x)$ em série de Taylor em torno de x_0 , obtendo:

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4F}{dx^4}\right)_{x_0} (x - x_0)^4 + \frac{1}{5!} \left(\frac{d^5F}{dx^5}\right)_{x_0} (x - x_0)^5 + \dots \quad (78)$$

onde $F(x_0) = 0$, pois x_0 é o ponto de equilíbrio (vamos colocar $x_0 = 0$). Observa-se que na expansão na série de Taylor em torno do ponto mínimo da curva simétrica da energia potencial $U(x)$, os termos $\frac{d^3U(x)}{dx^3}$ e $\frac{d^5U(x)}{dx^5}$ são nulos (todos os termos ímpares), e se quisermos ser mais precisos para um sistema não-linear, podemos escrever $F(x) = -kx - \epsilon x^3$, com $\epsilon \ll k$, onde:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 = k_1 = -k, \frac{1}{6} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_0 = k_3 = -\epsilon. \quad (79)$$

Há situações onde o potencial é anarmônico "para dentro", sendo $\epsilon > 0$, ou "para fora", com $\epsilon < 0$, o que altera $F(x)$ Figura 18.

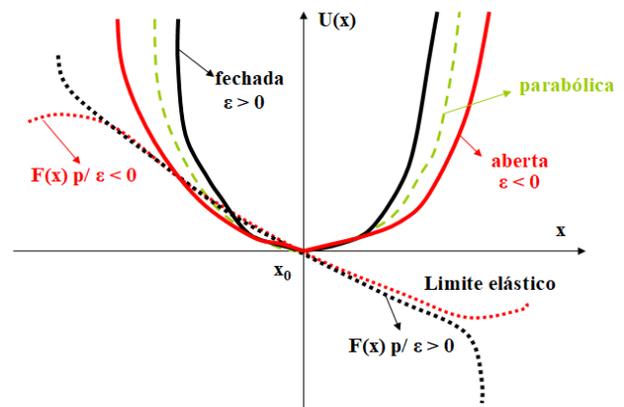


FIGURA 19. Potencial anarmônico.

Para $F(x) = -kx - \epsilon x^3$, lembrando que $F(x) = -dU/dx$, o potencial simétrico será

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \epsilon x^4, \quad (80)$$

(a intensidade da força é a mesma para x ou para $-x$).

-Analogia entre o OH e os circuitos elétricos

Atualmente são construídos circuitos elétricos para o estudo de vibrações mecânicas por engenheiros, visto que os circuitos RLC se comportam de maneira análoga aos osciladores mecânicos com massa, mola e amortecimento, além de força externa (Figuras 19 e 20).

Resumidamente, quanto aos elementos da eletricidade, podemos lembrar para o circuito RLC:

Bogos Nubar Sismanoglu et al.

definição de intensidade de corrente elétrica: $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, onde $q(t)$ é a carga elétrica acumulada no capacitor C; A tensão no capacitor será $V_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int Idt$; a tensão no indutor é $V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$; a tensão no resistor é $V_R = RI = R \frac{dq}{dt}$; pela Lei de Kirchhoff, tem-se: $V_L + V_R + V_C = 0$.
 $\rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon \cos\omega t$, sob a ação de uma fem alimentando o circuito.

Podemos comparar com o oscilador mecânico já estudado anteriormente $m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$, onde:

$x \leftrightarrow q$; $\dot{x} \leftrightarrow \dot{q} = I$; $m \leftrightarrow L$; $1/k \leftrightarrow C$; $\rho \leftrightarrow R$; $F \leftrightarrow \varepsilon$

Na EDLOH do oscilador harmônico forçado, $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$, temos por analogia:

$$\gamma = \frac{\rho}{2m} \rightarrow \gamma_{(RLC)} = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_{0(RLC)} = \sqrt{\frac{1/C}{L}} \rightarrow \omega_{0RLC} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \rightarrow \omega_{(RLC)} = \sqrt{\frac{1}{(LC)^2} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

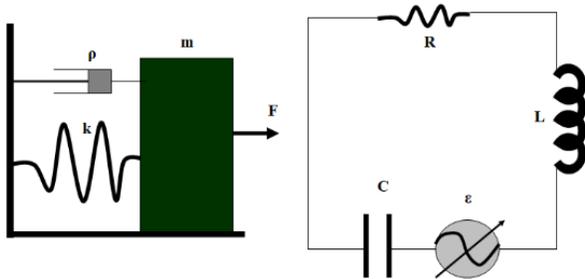


FIGURA 20. Analogia entre OH e circuitos elétricos RLC.

XIV. CONCLUSÕES

Neste artigo fizemos um apanhado geral sobre a teoria das oscilações, desde o simples caso e não menos importante oscilador harmônico simples até o caso do oscilador harmônico acoplado com a ação de forças externas. O caso da ressonância, de conhecimento importante nas engenharias e na física para a manufatura de sistemas que possam sofrer vibração, foi descrito. Na medida do possível, simulamos no software Origin os gráficos de funções temporais e amplitudes para os movimentos estudados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio parcial das agências FAPESP e CNPq sob nº FAPESP/12/13064-4, CNPq/MCTI/SECIS406035/2013-0, CNPq/310419/2012-3DT, CNPq/306095/2013-0 PQ e CAPES/ITA/88881.030340/2013-01 BJT.

REFERÊNCIAS

- [1] Symon, K. R., *Mecânica* (Editôra Campus, Rio de Janeiro, 1982).
- [2] Goldstein, H., *Classical Mechanics* 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, USA, 1980).
- [3] <https://www.originlab.com/demodownload.aspx>.
- [4] Lucatto, B., Caprecci, M. B., Gonçalves, J. V. A., Sismanoglu, B. N., *Atwood Machine with variable mass in atypical oscillatory motion*, Rev. Bras. Ensino Fís. **36**, 2503 (2014).