Existencia, unicidad y estabilidad de la solución a la ecuación termoelástica generalizada

ISSN 1870-9095

Josermi De-la-Cruz [1,2], Juan Toribio-Milane[1]
[1] *Instituto de Matemáticas e Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Santo Domingo, Santo Domingo 10105, Dominican Republic; Código Orcid (0000-0002-0782-1827).*
[2] *Departamento de ciencias naturales y exactas. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM). República Dominicana. Código Orcid (0009-0000-0081-1557).*

E-mail: j.delacruz@ce.pucmm.edu.do, jtoribio34@uasd.edu.do

(Recibido el 23 de febrero de 2024, aceptado el 30 de mayo de 2024)

Resumen
En este artículo se analizan la existencia y unicidad de la solución al problema termoelástico en su forma general, apoyándose en la teoría de operadores fuertemente continuos originada por Hille y Yosida [1, 2] sobre el estudio de semigrupos contractivos. Se demostrará que el operador termoelástico es generador de un C_0-semigupo de contracciones, utilizando específicamente el teorema de Liu-Zheng que simplifica las exigencias que debe satisfacer el operador para probar que es generador. Para ello se prueba que es un operador disipativo con dominio denso y que su resolvente tiene a cero como elemento. Además, se estudiará la estabilidad exponencial de la solución, lo cual resulta útil para comprender el comportamiento asintótico del C_0-semigrupo en un tiempo prolongado. Esto se demostrará verificándose las hipótesis del teorema de Gearhart en el operador termoelástico.

Palabras clave: C_0-semigrupo, termoelasticidad, existencia y unicidad de una solución, estabilidad exponencial, teoría de semigrupo.

Abstract
In this article, the existence and uniqueness of the solution to the thermoelastic problem in its general form are analyzed, based on the theory of strongly continuous operators originated by Hille and Yosida [1, 2] on the study of contractive semigroups. It will be shown that the thermoelastic operator is a generator of a C_0-semigroup of contractions, specifically using the Liu-Zheng theorem that simplifies the requirements that the operator must satisfy to prove that it is a generator. To do this, it is proved that it is a dissipative operator with a dense domain and that its resolvent has zero as an element. In addition, the exponential stability of the solution will be studied, which is useful to understand the asymptotic behavior of the C_0-semigroup in a long time. This will be demonstrated by verifying the hypotheses of Gearhart's theorem in the thermoelastic operator.

Keywords: C_0-semigroup, thermoelasticity, existence and uniqueness of a solution, exponential stability, semigroup theory.

I. INTRODUCCIÓN

La ecuación termoelástica es un problema de ecuaciones en derivadas parciales que describe la deformación que presentan un cuerpo cuando es sometido a cambios de temperatura. Carlson D. E. (1972) [3] estableció un modelo lineal para el fenómeno termoelástico en un cuerpo aislado, con condiciones simples de isotropía y homogeneidad. Matemáticamente, el problema termoelástico lineal está dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered}
u_{tt} = \mu\nabla\cdot\nabla u + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u + m\nabla\theta\,; \quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty) \\
\theta_t = c^{-1}\rho^{-1}\theta_a m\nabla\cdot u_t + c^{-1}k\Delta\theta\,; \ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\
u(x,t)=0\,; \ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\
u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=v_0(x),\ \theta(x,0)=\theta_0(x)\,;\ x\in\Omega,
\end{gathered} \tag{1}$$

donde $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ y $\partial\Omega$ de clase C^1. Estos resultados pueden consultarse en [3]. El vector u es el desplazamiento del cuerpo y θ es un escalar que determina su temperatura. Los valores de ρ, c, k y m son constantes positivas, λ y μ son constantes tales que $\lambda+2\mu>0$ (Condición de elipticidad) y θ_a es la temperatura ambiente que también se considerará constante.

Se establece una nueva variable $v=\rho\, u_t$ que representa la velocidad de la deformación. Así, en el espacio de Hilbert $Y=[H_0^1(\Omega)]^n\times[L^2(\Omega)]^n\times[L^2(\Omega)]$ se toma el producto interior definido como

$$\begin{aligned}\langle(u,v,\theta),(a,b,\phi)\rangle_Y = \int_\Omega (\,\rho^{-1}v\cdot b + \mu\nabla u:\nabla a \\ +(\mu+\lambda)(\nabla\cdot u)(\nabla\cdot a) + c\theta_a^{-1}\,\theta\,\phi)\,dx,\end{aligned} \tag{2}$$

donde el producto especial se define como

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x_j}} \frac{\partial v_i}{\partial \mathrm{x_j}}.$$

Para más detalles puede consultar [7], pág. 96.

El problema de Cauchy asociado a la ecuación termoelástica es

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ y(0) = (u_0, v_0, \theta_0) \in Y, \end{cases} \tag{3}$$

donde el operador $A: D(A) \subseteq Y \to Y$ se define como
$A(u, v, \theta) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \rho^{-1} I & 0 \\ \mu \nabla \cdot \nabla + (\mu + \lambda) \nabla\nabla \cdot I & 0 & m \nabla \\ 0 & c^{-1} \rho^{-1} \theta_a m \nabla \cdot I & c^{-1} k \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \tag{4}$$

y su dominio $D(A) = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]$.

Para el análisis de existencia y unicidad de este problema se presentan algunos resultados preliminares que serán fundamentales en el desarrollo de esta exposición. Para ello definimos los operadores disipativos a continuación.

Definición 1.1. Sea X un espacio de Hilbert. Se dice que un operador $A: D(A) \subseteq X \to X$ es disipativo si para cada $x \in D(A)$ se satisface que $\Re\langle Ax, x\rangle \leq 0$.

Un operador que es disipativo y la vez contiene al cero en el resolvente garantiza que este es un C_0-semigrupo de contracciones como establece el siguiente teorema.

Teorema 1.1. (Liu-Zheng). *Sea A un operador con dominio denso $D(A)$ en un espacio de Hilbert X. Si A es disipativo y $0 \in \rho(A)$, entonces A es un generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones en X.*
Consultar [4] pág. 3.

Este resultado (Teorema 1.1), permitirá demostrar que el operador asociado al problema termoelástico (3) es generador de un C_0-*semigrupo* y por consiguiente tendrá solución única como establece el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ un generador de un C_0-semigrupo $\{S(t) ;\, t \geq 0\}$, entonces existe una única solución al problema de Cauchy abstracto:*

$$\begin{cases} u_t(t) = Au(t), \\ u(0) = x \quad \in D(A). \end{cases}$$

Consultar Lema 1.1.1 en [5], pág. 38.

II. EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN TERMOELÁSTICA

A continuación se demuestra la existencia y unicidad de la solución a la ecuación termoelástica probándose que el operador genera un C_0-semigrupo de contracciones.

Teorema 2.1 *El operador termoelástico $A: D(A) \subseteq Y \to Y$ definido en (4) es generador de un C_0 −semigrupo de contracciones.*

Demostración. El espacio $[C_0^\infty(\Omega)]^n \times [C_0^\infty(\Omega)]^n \times [C_0^\infty(\Omega)] \subset D(A)$ es denso en Y, luego el dominio $D(A)$ es denso. Luego, el operador A es lineal y, siendo composición de una matriz y operadores diferenciales, es también cerrado.

Para probar que es disipativo, se puede observar que

$$\begin{aligned} &\langle A(u, v, \theta), (u, v, \theta)\rangle_Y \\ &\quad = \langle\ (\rho^{-1} v, \quad \mu\nabla \cdot \nabla u + (\lambda + \mu) \nabla\nabla \cdot u + m\nabla\theta, \\ &\qquad\quad c^{-1}\rho^{-1}\theta_a m\nabla \cdot u_t + c^{-1} k\Delta\theta\ ), \quad (u, v, \theta)\ \rangle_Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \int_\Omega \{\, &\rho^{-1}(\mu\nabla \cdot \nabla u + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot u + m\nabla\theta) \cdot v \\ &+ \mu\nabla(\rho^{-1}v) : \nabla u + (\lambda + \mu)\big(\nabla \cdot (\rho^{-1}v)\big)(\nabla \cdot u) \\ &+ c\theta_a^{-1}(c^{-1}\rho^{-1}\theta_a m\nabla \cdot v + c^{-1}k\Delta\theta)\theta\ \}\, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \rho^{-1} \int_\Omega \{\, &\mu(\nabla \cdot \nabla u) \cdot v + (\lambda + \mu)(\nabla\nabla \cdot u) \cdot v + m\nabla\theta \cdot v \\ &+ \mu\nabla v : \nabla u + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot v)(\nabla \cdot u) \\ &+ m(\nabla \cdot v)\, \theta + k\, \rho\, \theta_a^{-1}\, \Delta\theta\, \theta\ \}\, dx, \end{aligned}$$

y aplicando integración por partes se simplifica la integral a la expresión

$$\begin{aligned} \langle A(u, v, \theta), (u, v, \theta)\rangle_Y &= -k\, \theta_a^{-1} \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx. \\ &= -k\, \theta_a^{-1} \|\nabla\theta\|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Esto implica que $A: D(A) \subseteq Y \to Y$ es disipativo. Para completar la demostración, probaremos que $0 \in \rho(A)$. Sea $\hat{y} = (f, g, \phi) \in Y$, y de la ecuación característica

$$(0I - A)y = -Ay = \hat{y},$$

se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -\rho^{-1} v = f, & (6) \\ -\mu\nabla \cdot \nabla u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) - m\nabla\theta = g, & (7) \\ -c^{-1}\rho^{-1}\theta_a m\nabla \cdot v - c^{-1}k\Delta\theta = \phi, & (8) \end{cases}$$

con las condiciones de contorno $u(x) = 0\ \ y\ \ \theta(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

La solución de la ecuación (6) se obtiene trivialmente despejando $v = -\rho f \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Luego, sustituyendo v en la ecuación (8), se tiene $\Delta\theta = k^{-1}(\theta_a m\nabla \cdot f - c\phi)$, y como $f \in [H_0^1(\Omega)]^n$ entonces $\nabla \cdot f \in L^2(\Omega)$ y por tanto $\varphi = k^{-1}(\theta_a m\nabla \cdot f - c\,\phi) \in L^2(\Omega)$. Así, se obtiene

$$\begin{cases} \Delta\theta = \varphi \quad ; \quad x \in \Omega \\ \theta = 0 \;; \quad x \in \partial\Omega \\ \quad \varphi \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

que es el clásico problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson que tiene solución única $\theta \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Además, $\nabla\theta \in [L^2(\Omega)]^n$ y por lo tanto $\hat{f} = m\nabla\theta + g$ está en $[L^2(\Omega)]^n$. Luego, sustituyendo en la ecuación (7) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -\mu\nabla \cdot \nabla u - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot u) = \hat{f} \quad ; \quad x \in \Omega \\ \quad u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \\ \quad \hat{f} \in [L^2(\Omega)]^n. \end{cases} \tag{9}$$

Como por hipótesis se supone que $\lambda + 2\mu > 0$, entonces la ecuación diferencial es elíptica y tiene una única solución débil $u \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$.

Por lo tanto, el sistema $-Ay = \hat{y}$ tiene solución única $y = (u, v, \theta) \in D(A)$ para cada $(f, g, \phi) \in Y$, lo cual implica que $0 \in \rho(A)$. Finalmente, quedando satisfechas las hipótesis del Teorema 1.1, se concluye que el operador A es generador de un C_0 $-$semigrupo de contracciones. □

Inmediatamente, como consecuencia de este teorema previo y el Teorema 1.2, la ecuación termoelástica descrita en (1) tiene solución única.

III. ESTABILIDAD EXPONENCIAL

En muchos problemas físicos es importante comprender el comportamiento a largo plazo ($t \to \infty$) del fenómeno de estudio. Es de interés en el análisis del problema termoelástico analizar la tendencia estable que toma un sólido que se deforma por cambios de temperatura.

Definición 3.1. *Un C_0-semigrupo {S(t); $t \geq 0$} se dice es estable exponencialmente si existe una constante positiva α y $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 3.2 (Gearhart). *Sea {S(t) ; $t \geq 0$} un C_0-semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert X. Entonces, $S(t)$ es exponencialmente estable si y solo si*

i) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$,

ii) $\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty$.

La demostración puede Consultarse en [5].

Para obtener la energía asociada al sistema se multiplica por u_t la primera ecuación del sistema en (1), e integrando en Ω se tiene

$$\int_\Omega (\mu\nabla \cdot \nabla u \cdot u_t + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot u) \cdot u_t + m\nabla\theta \cdot u_t - \rho\, u_{tt}u_t)dx = 0,$$

y así,

$$\mu\int_\Omega \nabla \cdot \nabla u \cdot u_t\,dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega \nabla(\nabla \cdot u) \cdot u_t dx + m\int_\Omega \nabla\theta \cdot u_t\,dx - \frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_t|^2\,dx = 0.$$

De donde se obtiene

$$\mu\int_\Omega \nabla u : \nabla u_t\;dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot u_t)\,dx - m\int_\Omega \nabla\theta \cdot u_t\,dx + \rho\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_t|^2\,dx = 0. \tag{10}$$

Por otro lado, multiplicando por θ la segunda ecuación de (1) e integrando se tiene que

$$\int_\Omega (k\,\Delta\theta\,\theta + m\,\theta_a\,\nabla \cdot u_t\,\theta - c\theta_t\,\theta)dx = 0.$$

$$-k\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + m\,\theta_a\int_\Omega \nabla \cdot u_t\,\theta\,dx - \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\theta|^2 dx = 0. \tag{11}$$

Sabiendo que $\int_\Omega \nabla \cdot u_t\,\theta = -\int_\Omega \nabla\theta \cdot u_t\,dx$ y combinando (10) y (11) se tiene que

$$\theta_a\,\mu\int_\Omega \nabla u : \nabla u_t\,dx + \theta_a(\lambda+\mu)\int_\Omega (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot u_t)\,dx + \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\theta|^2 dx + \rho\theta_a\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_t|^2\,dx = -k\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx,$$

y así

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (\rho|u_t|^2 + \mu(\nabla u : \nabla u) + (\lambda+\mu)(\nabla \cdot u)^2 + c\theta_a^{-1}|\theta|^2)dx = -k\theta_a^{-1}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx \leq 0.$$

Donde

$$\mathrm{E(t)} := \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (\rho|u_t|^2 + \mu(\nabla u : \nabla u) + (\lambda+\mu)(\nabla \cdot u)^2 + c\theta_a^{-1}|\theta|^2)dx,$$

es la energía asociada al sistema. Además, esta energía es no creciente y $0 \leq E(t) \leq E(0)$ para todo $t \geq 0$.

Para probar la estabilidad exponencial del sistema termoelástico se debe garantizar que se satisfacen las hipótesis del teorema Gearhart (Teorema 3.2) que se muestran en los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Si el dominio $D(A)$ del generador A definido en (4) es compacto, entonces se satisface la inclusión $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.*

Demostración.

Ya se demostró en el Teorema 2.1 que $0 \in \rho(A)$. La demostración se realizará para el resto de valores. Por contradicción, se hará la suposición de que existe algún $\beta \in$

$\mathbb{R}$ y $\beta \neq 0$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$. Luego, la compacidad del dominio $D(A)$ garantiza que necesariamente $i\beta$ es un valor propio. Entonces, existe un vector propio $y \neq 0$ que satisface la ecuación característica $(i\beta\, I - A)y = 0$. Esto implica que

$$\begin{cases} i\beta\, u = \rho^{-1}\, v, & (12) \\ i\beta\, v = \mu\, \nabla \cdot \nabla\, u + (\lambda + \mu)\nabla\,(\nabla \cdot u) + m\,\nabla\theta, & (13) \\ i\beta\theta = c^{-1}\, k\, \Delta\, \theta + c^{-1}\rho^{-1}\,\theta_a\, m\nabla \cdot v\,. & (14) \end{cases}$$

Multiplicándose la expresión

$$\mu\, \nabla \cdot \nabla\, u \cdot I + (\lambda + \mu)\nabla\,(\nabla \cdot u) \cdot I,$$

por izquierda, en la ecuación (12) e integrándose se tiene que

$$i\beta\, \mu \int_\Omega \nabla \cdot \nabla\, u\, u\, dx + i\beta\,(\lambda + \mu)\int_\Omega \nabla\,(\nabla \cdot u) \cdot u\;\, dx$$
$$= \rho^{-1}\mu \int_\Omega \nabla \cdot \nabla\, u \cdot v\, dx + \rho^{-1}(\lambda + \mu)\int_\Omega \nabla\,(\nabla \cdot u) \cdot v\, dx,$$

y esto es

$$i\beta\rho\left(\mu \int_\Omega (\,\nabla\, u : \nabla\, u\,)dx + (\lambda + \mu)\int_\Omega (\nabla \cdot u)^2 dx\right)$$
$$= \mu \int_\Omega (\nabla u : \nabla v)dx + (\lambda + \mu)\int_\Omega (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)dx. \quad (15)$$

Del producto especial $\nabla v : \nabla u$ induce una norma en la que se utilizará la notación $\left\|\nabla u:\right\|^2 = \int_\Omega (\nabla u : \nabla u)dx$. Luego, simplificando en (15) se obtiene la ecuación

$$i\beta\rho\left(\mu\, \left\|\nabla u:\right\|^2 + (\lambda + \mu)\|\nabla \cdot\, u\,\|^2\right)$$
$$= \mu \int_\Omega (\nabla u : \nabla v)dx + (\lambda + \mu)\int_\Omega (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)dx. \quad (16)$$

De la ecuación (13), se multiplica por v e integra para obtenerse

$$i\beta \int_\Omega |v|^2\, dx = \mu \int_\Omega (\nabla \cdot \nabla\, u) \cdot v dx$$
$$+ (\lambda + \mu)\int_\Omega (\nabla\,\nabla \cdot\, u) \cdot v\;\, dx + m \int_\Omega \nabla\theta \cdot v\;\, dx,$$

esto es,

$$i\beta \int_\Omega |v|^2\, dx = -\mu \int_\Omega (\nabla u : \nabla v)dx$$
$$-(\lambda + \mu)\int_\Omega (\nabla \cdot\, u)(\nabla \cdot v)dx\; - m \int_\Omega \theta\,(\nabla \cdot\, v)dx. \quad (17)$$

Sustituyendo (16) en (17) e igualando a cero se tiene

$$m \int_\Omega \theta\,(\nabla \cdot\, v)\, dx$$
$$+ i\beta\rho\left(\mu\, \left\|\nabla u:\right\|^2 + (\lambda + \mu)\|\nabla \cdot\, u\,\|^2 + \rho^{-1}\|v\|^2\right) = 0.$$

Luego, las partes real e imaginaria tienen que ser cero respectivamente y por tanto

$$\int_\Omega \theta\,(\nabla \cdot\, v)\, dx = 0 \qquad y \qquad (18)$$
$$\beta\rho\left(\mu\, \left\|\nabla u:\right\|^2 + (\lambda + \mu)\|\nabla \cdot\, u\,\|^2 + \rho^{-1}\|v\|^2\right) = 0.$$

Lo cual implica que $\left\|\nabla u:\right\| = \|\nabla \cdot\, u\,\| = \|v\| = 0$ y así $v = 0$. Además, regresando a la ecuación (12) se tiene que $|\beta|\,\|u\| = \rho^{-1}\,\|v\| = 0$ y sabiéndose por hipótesis que $\beta \neq 0$, entonces $u = 0$.

En (14) se multiplica por θ e integra para obtenerse la igualdad

$$i\int_\Omega |\theta|^2 dx = c^{-1}k\int_\Omega \Delta\theta\;\theta\; dx$$
$$+ c^{-1}\rho^{-1}\,\theta_a\, m \int_\Omega (\nabla \cdot\, v)\,\theta\; dx\,. \quad (19)$$

Luego, sustituyendo en esta igualdad la primera proposición de (18) e integrando por partes se tiene

$$c^{-1}\, k\int_\Omega |\nabla\,\theta|^2\; dx + i\beta\int_\Omega |\theta|^2 dx = 0\,,$$

y tomando las partes real e imaginaria, implicaría que

$$c^{-1}k\int_\Omega |\nabla\,\theta|^2\; dx = c^{-1}k\;\, \|\nabla\,\theta\|^2 = 0$$
$$y \quad \beta\int_\Omega |\theta|^2 dx = \beta\;\, \|\theta\|^2 = 0.$$

Por lo tanto, $\theta = 0$. Finalmente, $y = (u, v, \theta) = (0,0,0)$ contradiciendo el supuesto de que y es un vector propio. Entonces, $i\beta$ no puede estar en el espectro de A y por lo tanto $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. □

Lema 3.2. *El generador A del C_0-semigrupo termoelástico definido en (4) satisface la acotación*

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\;\, \|(i\beta\; I - A)^{-1}\|_{L(Y)} < \infty.$$

Demostración. Sabiendo que $i\beta \in \rho(A)$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $i\,\beta\, I - A$ es invertible y para

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \in D(A), \quad \text{existe} \quad y \in D(A) \quad \text{tal que}$$

$y = (i\,\beta\, I - A)^{-1}F$ y satisface la ecuación $i\beta y - Ay = F$. De donde se tiene el sistema

$$i\beta u - \rho^{-1}v = f_1, \quad (20)$$

$$i\beta v - \mu\, \nabla \cdot \nabla\, u - (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot u - m\nabla\theta = f_2, \quad (21)$$

$$i\beta\theta - c^{-1}k\Delta\theta\; - c^{-1}\rho^{-1}\theta_a\, m\nabla \cdot v = f_3. \quad (22)$$

Entonces, multiplicándose $\mu\,\nabla\cdot\nabla\,u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)$ por izquierda y luego integrándose en (20) se obtiene

$$i\beta\int_\Omega \mu\ (\nabla\cdot\nabla)u\cdot u\ +(\lambda+\mu)(\nabla\nabla\cdot\ u)\cdot u)\,dx$$
$$-\rho^{-1}\int_\Omega (\ \mu(\nabla\cdot\nabla\,u)\cdot v\ +(\lambda+\mu)(\nabla\nabla\cdot\ u)\cdot v)\,dx$$
$$=\int_\Omega (\ \mu\ (\nabla\cdot\nabla\ u)\cdot f_1\ +(\lambda+\mu)(\nabla\nabla\cdot\ u)\cdot f_1)dx,$$

y luego,

$$i\beta\left(\mu\int_\Omega (\nabla u{:}\nabla u\,)dx\ +(\lambda+\mu)\int_\Omega (\nabla\cdot u)^2dx\right)$$
$$-\rho^{-1}\left(\mu\int_\Omega (\nabla u{:}\nabla v\,)dx\ +(\lambda+\mu)\int_\Omega (\nabla\cdot u)(\nabla\cdot v\,)dx\right)$$
$$=\int_\Omega (\ \mu\ \nabla u:\nabla f_1\ +(\lambda+\mu)(\nabla\cdot\ u)(\nabla\cdot f_1)dx \tag{23}$$

Por otro lado, multiplicándose por $\rho^{-1}v$ en (21) e integrándose.

$$i\beta\int_\Omega \rho^{-1}\,|v|^2dx-\rho^{-1}\mu\int_\Omega (\nabla\cdot\nabla\ u)\cdot v dx$$
$$-\rho^{-1}\,(\lambda+\mu)\int_\Omega (\nabla\nabla\cdot\ u)\cdot v dx-\rho^{-1}\ m\int_\Omega \nabla\theta\cdot v\,dx$$
$$=\rho^{-1}\int_\Omega f_2\cdot v\,dx$$

Entonces, integrándose por partes, se tiene

$$i\beta\int_\Omega \rho^{-1}|v|^2dx+\rho^{-1}\,\mu\int_\Omega (\nabla\,u:\nabla v)dx$$
$$+\rho^{-1}(\lambda+\mu)\int_\Omega (\nabla\cdot\ u)(\nabla\cdot v)dx-\rho^{-1}m\int_\Omega \nabla\theta\cdot v\,dx$$
$$=\rho^{-1}\int_\Omega f_2\cdot v\,dx\,. \tag{24}$$

En el caso de la ecuación (22), se multiplica por $c\theta_a^{-1}\theta$ e integra para obtener

$$i\beta\int_\Omega c\theta_a^{-1}|\theta|^2dx-k\theta_a^{-1}\int_\Omega \Delta\theta\ \theta\ dx$$
$$-\rho^{-1}m\int_\Omega (\nabla\cdot\ v)\theta\ dx=\ c\theta_a^{-1}\int_\Omega f_3\theta\ dx,$$

que resulta en

$$i\beta\int_\Omega c\theta_a^{-1}|\theta|^2dx+k\theta_a^{-1}\int_\Omega |\nabla\theta\,|^2\ dx$$
$$+\rho^{-1}m\int_\Omega \nabla\theta\cdot v\ dx=\ c\theta_a^{-1}\int_\Omega f_3\theta\ dx. \tag{25}$$

Así, sumando (23), (24) y (25) se obtiene la ecuación

$$i\beta\int_\Omega (\rho^{-1}|v|^2\ +\mu\ \nabla u{:}\nabla u+(\lambda+\mu)(\nabla\cdot u)^2$$
$$+\,c\theta_a^{-1}|\theta|^2\,)\,dx+k\theta_a^{-1}\|\nabla\theta\|^2$$
$$=\int_\Omega (\ \mu\ \nabla u:\nabla f_1\ +(\lambda+\mu)(\nabla\cdot u)(\nabla\cdot f_1)dx$$
$$+\rho^{-1}\int_\Omega f_2\cdot v\,dx+c\theta_a^{-1}\int_\Omega f_3\theta\ dx,$$

Esto es,

$$i\beta\|y\|_Y^2+k\theta_a^{-1}\|\nabla\theta\|^2$$
$$=\int_\Omega (\mu\ \nabla u:\nabla f_1\ +(\lambda+\mu)(\nabla\cdot u)(\nabla\cdot f_1)+\rho^{-1}\,f_2\cdot v$$
$$+\,c\theta_a^{-1}f_3\theta\,)dx\,.$$

Luego, por la definición del producto interior en Y, se tiene el resultado

$$k\theta_a^{-1}\|\nabla\theta\|^2+i\beta\|y\|_Y^2=\ \langle y,F\rangle_Y\,. \tag{26}$$

Separando las parte real e imaginaria se concluye que

$$k\theta_a^{-1}\|\nabla\theta\|^2=\Re\langle y,F\rangle_Y \qquad \text{y} \qquad \beta\|y\|_Y^2=\Im\,\langle y,F\rangle_Y\,.$$

Aplicándose valor absoluto a la parte imaginaria, acotando y empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$|\beta\,|\ \|y\|_Y^2=|\Im\,\langle y,F\rangle_Y\,|\leq\ |\langle y,F\rangle_Y\,|\leq\|\,y\|_Y\,\|\,F\|_Y\,.$$

Simplificando la desigualdad se logra $|\beta|\ \|y\|_Y\leq\ \|\,F\|_Y$ y recordándose que $y=(i\,\beta I-A)^{-1}F$, entonces

$$|\beta|\ \|(i\,\beta I-A)^{-1}F\|_Y\leq\ \|\,F\|_Y,$$

lo cual implica que

$$|\beta|\ \|(i\,\beta I-A)^{-1}\|_{L(Y)}\leq\ 1\,,$$

y por lo tanto

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\ \|(i\beta\ I-A)^{-1}\|_{L(Y)}<\infty. \qquad \square$$

Teorema 3.1. *Si el dominio $D(A)$ del generador A, definido en (4), es compacto, entonces el C_0-semigrupo generado por A, solución de la ecuación diferencial termoelástica (1), es exponencialmente estable.*

Demostración. Del Teorema 2.1, el C_0-semigrupo generado por A es de contracciones. Los lemas 3.1 y 3.2 garantizan las hipótesis (i) e (ii) del Teorema 3.1 (Gearhart), lo cual demuestra la estabilidad exponencial de la solución a la ecuación termoelástica. $\square$

IV. CONCLUSIONES

Se ha demostrado la existencia y unicidad de la solución al problema termoelástico, en una formulación más generalizada, utilizando los principales resultados de la teoría de semigrupos de clase C_0. Además, se verificaron las hipótesis del Teorema de Gearhart que garantizan la estabilidad de la solución, como es de esperarse en el modelo físico. Estas deducciones justifican la incorporación de análisis numéricos y garantizan resultados coherentes al momento de estudiar la termoelasticidad lineal.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Universidad Autónoma de Santo Domingo. Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto de investigación.

La investigación de J. Toribio-Milane fue parcialmente apoyada por el Fondo Nacional de Innovación y Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDOCYT), República Dominicana, bajo subvención 2020-2021-1D1-137.

REFERENCIAS

[1] Hille, E., *Functional Analysis and Semi-groups,* Colloq. Publ. (Amer. Math. Soc., New York, 1948).

[2] Yosida, K., *On the diferentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. J. Math. Soc. Japan* **1**, 15-21 (1948).

[3] Carlson, D. E., *Mechanics of solids: Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. Linear and Nonlinear Theories of Rods, Plates, and Shells.* Handbuch der Physik, C. Truesdell, Ed., pp. 297-346, (Springer, Berlin, Germany, 1972).

[4] Liu, Z. & Zheng, S., *Semigroups associated with dissipative systems*, (Chapman & Hall-CRC, New York, 1999).

[5] Filinkov, A., Melnikova, I., *Abstract cauchy problems: Three Approaches*, (Chapman & Hall/CR, USA, 2019)

[6] Santiago, Y., *Una demostración del teorema de Gearhart*. Lima, (PESQUIMAT, Perú, 2013).

[7] Vrabie, I. I., *C0-Semigroups and applications*. Amsterdam, (Elsevier Science B.V., The Netherlands, 2003).