Transposição didática do Sistema de Lorenz via simulação computacional

José Galúcio Campos[1], Cirlande Cabral da Silva[2] e Josefina Barrera Kalhil[3]

[1]Departamento de Ensino Superior, Coordenação de Licenciatura em Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas – IFAM/CMC, Av. 7 de setembro, 1975, Centro, Cep: 69020-120, Manaus, Amazonas, Brasil.

[2]Departamento de Ensino Superior, Coordenação de Licenciatura em Ciências Biológicas, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas – IFAM/CMC, Av. 7 de setembro, 1975, Centro, Cep: 69020-120, Manaus, Amazonas, Brasil.

[3]Escola Normal Superior, Universidade do Estado do Amazonas – UEA, Av. Djalma Batista, 3578, Flores, Cep: 69050-010, Manaus, Amazonas, Brasil.

E-mail: zecajg@gmail.com

(Received 20 December 2014, accepted 31 Ferbuary 2015)

Resumo

Neste manuscrito apresentamos uma proposta para fazermos a Transposição Didática do sistema de Lorenz – que é um sistema caótico determinístico – através da simulação computacional utilizando a linguagem de programação Python. O sistema de Lorenz foi escolhido devido ao seu aspecto simples, seu valor histórico e por ser uma novidade científica para os alunos da graduação. A linguagem de programação Python, foi escolhida dentre as demais, por ela ser mais adequada aos fins pedagógicos exigidos. A fim de que o sistema de Lorenz seja visto como um saber a ensinar, verificamos inicialmente, se ele, na condição de um sistema caótico, satisfaz as regras impostas pela Teoria da Transposição Didática. Posteriormente, avaliamos o entendimento prévio e posterior que os alunos tinham em relação ao tema através de um questionário e de uma aula dialogal, respectivamente. Todo o processo de transposição consistiu: na derivação do sistema de Lorenz, na conceituação do efeito borboleta e dos atratores estranhos, além do aprendizado de uma nova linguagem de programação. Contudo, como resultado não esperado, obtivemos o engajamento dos alunos em projetos que envolviam TIC's seja na iniciação científica (PIBIC) ou na iniciação à docência (PIBID).

Palavras chave: Ensino de Física, Transposição Didática, Simulação Computacional**.**

Abstract

In this paper, we present a proposal to implement the Didactic Transposition of the Lorenz system – it is a deterministic chaotic system – by computer simulation using the Python programming language. The Lorenz system was chosen because of its simple appearance, its historical value and because it is a scientific novice for undergraduate students. The programming Python language was chosen among the others because it is the most appropriate to required pedagogical purposes. In order that the Lorenz system be seen as a knowledge teaching, initially we find the it (deterministic chaotic systems) meet the standards rules imposed by the Didactic Transposition Theory. Subsequently, we evaluated the pre and post-understanding that students have had about the theme by questionnaire and a argumentative class, respectively. The entire implementation of Didactic Transposition process have consisted to: the Lorenz system derivation, definition of butterfly effect and strange attractors and learning of a new programming language. However, as non-expected findings we obtained the engagement of students in projects involving scientific initiation (PIBIC) or initiation to teaching (PIBID).

Keywords: Physics teaching, Chaos, Computer simulation.

PACS: 01. 40. -d, 47. 52. +j, 07. 05. Tp **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUÇÃO

A ciência entre os séculos XVII e início do século XX era dominada pelo paradigma newtoniano-cartesiano e, de acordo com este paradigma, o mundo funcionava como uma máquina. Isto implica dizer que os fenômenos naturais poderiam ser descritos através de modelos mecânicos, modelos estes que contemplam processos reversíveis e que, por mais complexo que fossem, eles poderiam ser entendidos, globalmente, pelo funcionamento de suas partes. Se o mundo era pensado como se fosse uma máquina e, toda máquina tem um fim específico, logo seu funcionamento é altamente previsível. Assim, a evolução dos fenômenos naturais podia ser determinada com precisão total. Esta visão determinista é um pressuposto do paradigma newtoniano-cartesiano [1].

As teorias científicas baseadas no determinismo ganharam grande força, dentro deste período, devido aos êxitos alcançados, sobretudo pela mecânica de Newton após a publicação da sua obra seminal intitulada Princípios Matemáticos da Filosofia Natural (*Principia*), com as suas Leis de movimento e a Teoria da Gravitação dando a base fundamental para a chamada Mecânica Clássica [2, 3].

Esta concepção determinista da Mecânica Clássica levou o cientista francês Marquês de Laplace, em 1814, a argumentar que deveria haver um conjunto de Leis científicas que nos permitissem predizer tudo o que havia de acontecer no Universo, bastando para isso sabermos qual era o estado completo do Universo em determinado momento. Por exemplo, se conhecêssemos as posições e velocidades do Sol e dos Planetas em determinada ocasião, poderíamos usar as Leis de Newton para calcular o estado do sistema solar em qualquer outro momento futuro ou do passado. O determinismo parece bastante óbvio neste caso. Contudo, Laplace foi mais longe, admitindo que haviam Leis semelhantes que governavam tudo o mais, incluindo o comportamento humano. Nas palavras de Laplace num ensaio sobre Teoria de Probabilidades em 1814, naquilo que foi conhecido posteriormente como o demônio de Laplace, ele diz que:

> *"Nós podemos tomar o estado presente do universo como o efeito do seu passado e a causa do seu futuro. Um intelecto que, em dado momento, conhecesse todas as forças que dirigem a natureza e todas as posições de todos os itens dos quais a natureza é composta, se este intelecto também fosse vasto o suficiente para analisar essas informações, compreenderia numa única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os do menor átomo; para tal intelecto nada seria incerto e o futuro, assim como o passado, seria presente perante seus olhos"* [3].

Ressaltarmos que o determinismo defendido por este paradigma diz respeito a uma propriedade do mundo, ou seja, é um determinismo ontológico; não apenas um determinismo relacionado ao nosso poder de previsão (medição) dos possíveis estados futuro do Universo [3, 4].

Poincaré, no final do século XIX, em 1889, analisando a estabilidade gravitacional do sistema Terra-Sol-Lua (conhecido como problema dos três corpos) através das leis de Newton, – que que são essencialmente determinísticas – começou a vislumbrar os aspectos irregulares e aleatórios deste sistema, que é uns sistemas determinístico. Ele percebeu que as órbitas do sistema se tornavam instáveis de tal forma, que não era mais possível estabelecer (ou predizer) a evolução do sistema com precisão.

Infelizmente, suas ideias não empolgaram seus contemporâneos e, em adição, alguns anos após as descobertas de Poincaré, foram desenvolvidas duas novas Teorias científicas que provocaram profundas mudanças na Física e na maneira como vemos o mundo: a Relatividade e a Mecânica Quântica.

Segundo [2] estas duas novas teorias criaram uma competição desleal com as descobertas de Poincaré. Assim, estejamos de acordo ou não com este autor, o estudo dos sistemas determinísticos que apresentavam comportamento aleatório e/ou irregular, só ressurgiu após o advento dos computadores e com desenvolvimento de um novo arsenal conceitual advindo de diferentes áreas do conhecimento, em meados do século XX [3].

Um trabalho muito importante que contribuiu consideravelmente para que a comunidade científica relançasse os olhares sobre os fenômenos desta natureza foi o artigo seminal de Edward Lorenz [5], onde ele mostrou que a atmosfera também apresenta dinâmica aleatória e irregular – o que posteriormente ficou conhecido como "caos" – este artigo foi decisivo para o entendimento do que conhecemos hoje como sistemas caóticos determinísticos.

Uma pergunta natural é: O que dispara este comportamento irregular e aparentemente aleatório em determinados sistemas determinísticos? Como resposta dizemos que: Todas as vezes que partes do sistema interagem (interferem e/ou competem e/ou cooperam), faz-se via interações não lineares [6]. Contudo, devemos tomar cuidado para não generalizarmos desavisadamente, pois todo sistema caótico é não linear, porém, nem todo sistema não linear é caótico.

O que posiciona bem a designação caótico para estes sistemas é que eles são muito sensíveis as condições iniciais, e é isto que justifica a imprevisibilidade da sua evolução dinâmica com total precisão [4, 6].

A quebra do paradigma newtoniano-cartesiano ocorre, pois, mesmo aqueles sistemas que podem ser modelados satisfatoriamente por equações deterministas, sem ruídos ou incertezas explícitas, podem evoluir de forma aparentemente aleatória e irregular. Na presença do caos, as próprias incertezas nas condições iniciais, associadas à precisão finita de qualquer instrumento de medição, impedem a previsão de longo prazo com 100% de certeza.

Entendemos que é importante o estudo de sistemas não lineares, como os sistemas caóticos determinísticos, no sentido de que eles correspondem a um vasto espectro de fenômenos naturais – diríamos até, que eles são a regra e não a excessão. Porém, os livros didáticos de Física Básica [7, 8] ainda investem, decisivamente na apresentação do estudo de casos idealizados ou, parafraseando, o estudo de sistemas ideais – que são aqueles cuja dinâmica pode ser descrita com poucas variáveis, são sistemas isolados, são determinísticos, são lineares, enfim, sistemas simples [4]. Sistemas assim são estudados com relativa facilidade através dos Teoremas de Conservação de Energia, Momentos Linear e Angular além da 1ª Lei da Termodinâmica [2] e em adição são meras criações didáticas ensinados fora do contexto e como se fossem um fim em si mesmo.

Não é difícil de entender porque os livros didáticos de Física Básica não investem na apresentação e na análise de sistemas não lineares tal como os sistemas caóticos.

Primeiramente, devido à dificuldade na derivação dos modelos que exigem um certo grau de sofisticação matemática. Em segundo lugar, modelos que contemplem este grau de complexidade são descritos por equações não lineares, e exóticas as vezes, e não existem técnicas analíticas para resolvê-las [2, 6, 9]. Desta forma, é fácil ver que não é tarefa simples transpor estas dificuldades inerentes ao saber sábio (de referência) e torná-lo um saber ensinado (saber escolar).

Vemos na simulação computacional uma alternativa muito interessante para transpor as dificuldades inerentes a análise de sistemas não lineares, particularmente, os sistemas caóticos deterministas. Mais ainda, dependendo do grau de não linearidade do sistema, a simulação computacional pode ser o único meio para estudar o seu comportamento.

Em resumo a simulação computacional apresenta três vantagens:

(i) ela permite a análise de sistemas não lineares, dado que em geral, eles não possuem solução analítica fechada e temos que obter soluções numéricas;

(ii) através dela podemos fazer o estudo qualitativo do comportamento dos sistemas não lineares através da análise de gráficos gerados pelas soluções numéricas e, finalmente;

(iii) ela permite explorarmos os sistemas naturais ou tecnológicos descritos por modelos cada vez mais complexos e mais próximos da realidade.

Com o objetivo de iniciar os estudantes de graduação ao estudo de sistemas mais complexos e mais próximo do real apresentamos uma proposta onde utilizamos a simulação computacional como uma poderosa ferramenta para promovermos a Transposição Didática (TD) [10] de um sistema caótico determinístico, altamente não linear, e de grande valor histórico: o sistema de Lorenz [5, 6, 9]. O sistema de Lorenz advém de simplificações da equação de Navier-Stokes – que consiste na aplicação da segunda Lei de Newton uma partícula de fluido. Para realizarmos tal tarefa lançaremos mão de um software livre e de grande refinamento gráfico, o Python.

II. CAOS DETERMINÍSTICO

II.A Linearidade e determinismo

Na modelagem matemática de sistemas Físicos é muito comum a utilização de duas abordagens: a construção de equações diferencias (ordinárias ou parciais) de movimento que em geral são exatas, determinísticas e simples. A outra abordagem é advinda da termodinâmica que é muito utilizada quando estudamos sistemas com muitos graus de liberdade; ela consiste na utilização da estatística – neste caso estudamos o comportamento médio das variáveis do sistema [1]. O que abordagens têm em comum é que ambas são lineares. Neste manuscrito vamos trabalhar com a primeira delas.

De maneira bem simplificada as equações diferencias são ditas lineares quando todas as variáveis dependentes têm potência igual a um (não importa se há potências maiores que um nas variáveis independentes) e elas não se multiplicam (termos cruzados). Por outro lado, nas equações diferencias não lineares as variáveis dependentes apresentam-se com potência maiores que um ou apresentam termos cruzados [1, 2, 6, 9].

Na modelagem buscam-se que estas equações diferenciais sejam lineares ou que pelo menos elas possam ser linearizadas dentro de algum intervalo de interesse para alguma variável importante que descreve o comportamento do sistema estudado [9, 11]. Esta prática tornou-se tão comum que houve uma época em que as equações estavam sendo linearizadas antes mesmo de ficarem prontas [1].

Uma importante propriedade das equações diferencias lineares é que elas satisfazem o princípio da superposição. De modo geral temos o seguinte: Se $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_3}$, …, $\boldsymbol{S_n}$ são soluções então:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i . \quad (1)$$

Da Equacione 1 inferimos que os sistemas lineares podem ser estudados em suas pequenas partes resolvendo-as separadamente e, ao final, recombinamo-las para darmos uma reposta. Isto significa que o todo é a soma das partes [1, 2].

Este é o espirito por de trás de algumas técnicas famosas como a análise de Fourier [2, 6, 8, 9], transformada de Laplace [2, 7, 8] e os modos normais de vibração [2, 4].

Para exemplificar a questão de como o determinismo aparece nas equações da dinâmica, vejamos o movimento de uma partícula de massa *"m"* que se move de acordo como o vetor posição, desconhecido, que em coordenadas cartesianas é dado por:

$$r(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right), \quad (2)$$

e que está sob a ação de uma força:

$$F = \left(F_x, F_y, F_z\right), \quad (3)$$

conhecida e bem-comportada, –isto quer dizer que, o comportamento da partícula não muda drasticamente com o passar do tempo. De acordo com a segunda Lei de Newton:

$$F = m\ddot{r} = m\,a, \quad (4)$$

onde:

$$\ddot{r} = a = \left(a_x, a_y, a_z\right),$$

é a aceleração do sistema.

A segunda Lei de Newton é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, logo, para calcularmos univocamente a trajetória da partícula precisamos de duas condições iniciais:

A posição:

$$r_o = \left(r_{ox}, r_{oy}, r_{oz} \right).$$

e a velocidade

$$v_o = \left(v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} \right),$$

medidas no início dos tempos t_0.

A trajetória ou função horária de posição é obtida após duas integrações sucessivas da eq. (4), dada por:

$$r(t) = r_o + v_o t + (F/2m) t^2, \quad (5)$$

vide [2, 7, 8]. Uma vez conhecida a dinâmica que governa o movimento da partícula e, as condições iniciais, informando o estado atual do sistema, podemos conhecer sua evolução com precisão total e é isto que representa o determinismo ontológico, marcadamente característico da dinâmica até o final do século XIX. Das equações de movimento obtidas via Leis de Newton, assim como a Eq. (5), retiram-se algumas propriedades [2]:

(a) dada as condições iniciais existe sempre uma solução para qualquer tempo futuro (passado),
(b) um conjunto de condições iniciais leva a uma única solução, e
(c) pequenas perturbações nas condições iniciais do sistema provocam pequenas perturbações nos estados futuros (passados) – isto, pois as soluções são estáveis e regulares.

Muitos sistemas na natureza não se comportam assim, e de acordo com as propriedades acima, sistemas descritos por equações simples deveriam se comportar de maneira simples, ao passo que aqueles descritos por equações complicadas, deveriam se comportar de maneira complicada. Todavia, foi após o advento do caos que se descobriu que sistemas não lineares, descritos por equações simples, poderiam exibir um comportamento muito rico exibindo padrões não esperados.

Neste manuscrito vamos apresentar de que maneira podemos usar o sistema de Lorenz para evidenciarmos isto nos aproveitando de que ele é uma novidade científica para os alunos.

II.B Aspectos relevantes do sistema de Lorenz

Visando buscar insights sobre as dificuldades de previsão de tempo climático Edward Lorenz, matemático e meteorologista do MIT, em seu artigo seminal intitulado *Deterministic Nonperiodic Flow* publicado em 1963 no *Journal of the Atmospheric Sciences* propôs um modelo matemático simplificado para estudar a dinâmica atmosférica.

Em essência o modelo descreve a dinâmica de um fluido viscoso numa célula de Rayleigh-Bernard. O mecanismo da célula de Rayleigh-Bernard pode ser descrito da seguinte forma [11]: têm-se duas placas de material condutor de calor sobrepostas entre si e separadas por uma camada de fluido.

A placa inferior começa a ser aquecida e, enquanto a diferença de temperatura ΔT é pequena, existe transferência de calor, apenas por condução, para placa superior através da camada de fluido que está em contato com a placa inferior. Entretanto, quando ΔT se tornar maior que um certo valor crítico (ΔT_c), a condução é substituída por convecção (turbulência), marcando o aparecimento de estruturas do tipo rolos que são as células de Rayleigh-Bernard [6, 9, 11].

Como já antecipamos anteriormente, o sistema de Lorenz é uma drástica simplificação da equação de Navier-Stokes escrita abaixo:

$$\rho(\partial v/\partial t + v \, . \, \nabla v) = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 v, \quad (6)$$

que é a aplicação da 2ª Lei de Newton para uma partícula de fluido, onde o operador Laplaciano, em coordenadas cartesianas, são escritos como:

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \nabla^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Observe que o lado direito da Equacione (6) representa a aceleração do fluido (a aceleração local e o termo de transporte: advecção ou convecção), o primeiro termo do lado esquerdo é a força gravitacional por unidade de volume (força de campo), o segundo é o gradiente de pressão (força de superfície) e o último é a força viscosa (termo de difusão).

Para uma dedução clara e bem didática do sistema de Lorenz partindo das equações fundamentais da mecânica de fluidos recomendamos [6].

Do ponto de vista da estrutura matemática o sistema de Lorenz é um simples escrito com equações simples, e determinístico, pois advém da 2ª Lei de Newton, veja abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= s(y - x), \\ \dot{y}(t) &= rx - y - xz, \\ \dot{z}(t) &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (8)$$

onde *x(t), y(t)* e *z(t)* são as variáveis de estado que significam: o fluxo convectivo, a distribuição de temperaturas horizontal e a distribuição de temperaturas na vertical, respectivamente – enquanto aos parâmetros ajustáveis *s, r* e *b* são: a relação entre a viscosidade e a condutividade térmica (número de Prandtl), a proporção entre às diferenças de temperaturas entre os lados inferior e superior da placa (número de Rayleigh reduzido), e a relação entre a altura e a largura das placas, respectivamente. Além disso, como pode ser visto da Eq. (8) ele é escrito como um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares (devido aos termos *xz* e *xy*) e acopladas (a componente *x* sofre influência de *y*, por exemplo). A evolução temporal do sistema de Lorenz pode ser vista na Figura 1.

O que torna a dinâmica descrita pela Eq. (8) surpreendentemente irregular, uma vez que o sistema de Lorenz é descrito por equações simples e determinísticas, são as não linearidades devido aos mecanismos de retroalimentação [6] –veja a evolução da componente *x(t)* na Figura 1.

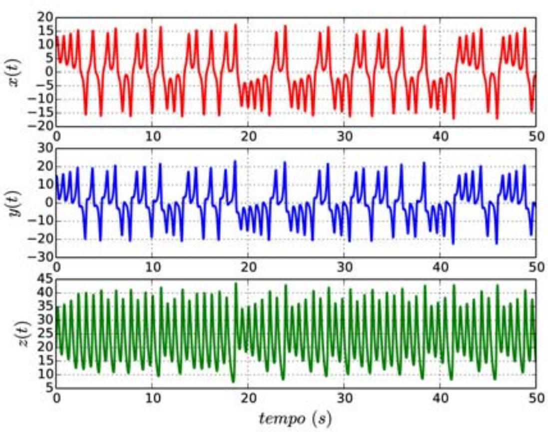

FIGURA 1. Evolução das componentes do sistema de Lorenz com os parâmetros ajustáveis iguais à s=10, r=28 e b=8/3.

Outra importante característica escondida por de trás da Eq. (8) ainda estava por vir e segundo o site da revista Época de maio de 2008 (revistaepoca.globo.com/Revista/Epoca) em reportagem publicada devido à morte de Edward Lorenz, encontra-se uma boa descrição de como Lorenz percebeu isto:

> "Edward Lorenz, em 1961, trabalhava num primitivíssimo computador nas salas do MIT simulando equações relativas à meteorologia; ele fez seus cálculos e foi tomar um café enquanto o computador imprimia os resultados. Com isso ele julgou ter obtido uma previsão do tempo suficientemente confiável. Revendo os números, ele descobriu que o computador havia reduzido (por limitação de memória) o número 0.506127 para 0.506. Era aparentemente uma variação sem nenhuma importância. Mas Lorenz tomou a decisão que mudaria sua vida (e as nossas). Insistiu em refazer os cálculos com todos os seis dígitos da fração. E o computador devolveu uma previsão de tempo completamente diferente do original".

Do excerto acima fica evidente esta propriedade dos sistemas não lineares: a impossibilidade da previsão exata a longo prazo – o que, com o passar dos tempos, passou a ser conhecida vulgarmente de efeito borboleta.

A Figura 2 ilustra muito bem esta propriedade. Tomamos duas condições iniciais muito próximas uma da outra, uma diferença de $\Delta x \approx 0.00001$ e, veja que depois de 18 segundos as trajetórias começam a divergirem entre si.

Em resumo, são estas duas propriedades que caracterizam os chamados sistemas caóticos determinísticos.

Estas propriedades sugerem que a dinâmica de um sistema caótico determinístico seja aleatória –contudo, ela é, apenas, aparentemente aleatória. Contudo, para verificarmos como se dá a ordem destes sistemas devemos observar sua evolução não no espaço Físico usual, euclidiano (cartesiano), mas sim, exibir o seu comportamento no espaço de fases.

Como explica [1] e reiterado por [4, 6, 9], cada variável é uma coordenada no espaço de fases, e cada ponto descreve toda informação à respeito do sistema. Com a análise do espaço de fases vemos que um sistema de Lorenz (sistema caótico) caótico tem comportamento apenas aparentemente aleatório, pois exibe um alto grau de ordem padronizada.

Veja por exemplo a Figura 3, chamada de atrator de Lorenz. Uma maneira não técnica de definir um atrator é como um conjunto de pontos, no espaço de fases, em que o sistema converge com o passar do tempo.

Existem três tipos de atratores [6, 9]: (a) os pontuais que são aqueles em que o sistema atinge equilíbrio estável, (b) os periódicos que correspondem a oscilações periódica e (c) os estranhos que representam os sistemas caóticos, como na Figura 3 – que é a projeção bidimensional do atrator de Lorenz que é tridimensional.

Apesar de não ser possível predizer quando a partícula de fluido passará a oscilar de um lado para o outro da borboleta (atrator) claramente deve existir um grau de ordem para formar o atrator como explica [6]: as trajetórias no espaço de fase nunca se repetem e formam um padrão altamente complexo que se repetem.

O nome *estranho* advém do fato de que o sistema de Lorenz flutua entre vários estados de equilíbrio de modo não aleatório, nem fixo, nem oscilatório, mas sim uma flutuação contínua caótica [4, 5, 6, 9].

Em resumo, as características que foram apresentadas acima através do sistema de Lorenz, marcaram uma profunda mudança na abordagem de sistemas naturais, passando de uma análise meramente quantitativa como aquela legitimada pela antiga tradição validada pelo paradigma newtoniano-cartesiano e, passou-se para análise qualitativa inaugurada por Poincaré com sua topologia [1, 6, 9]. Entretanto, não é proposta deste manuscrito nos direcionarmos pela análise topológica dado que estamos inseridos numa abordagem inicial sobre Teoria do Caos Determinístico.

Desta forma, após o que foi exposto, para o planejamento de uma proposta de Ensino que tenha como objetivo abordar os sistemas caóticos determinísticos, sobretudo nos cursos da Licenciatura (Física, Química e Matemática), devemos levar em consideração alguns aspectos que são desafiadores para o desenvolvimento da proposta, dentre os quais citamos que:

(i) os alunos, em geral, os alunos não conhecem o tema ou o conhecimento prévio é muito insipiente,

(ii) do ponto de vista matemático não é possível resolvê-lo analiticamente (mesmo quando escritos com equações simples), somente numericamente via simulações computacionais e

(iii) para resolvê-lo numericamente o aluno precisa saber programar e percebemos que o não conhecimento de alguma linguagem de programação desestimula a investida dos alunos para o estudo dos sistemas não lineares.

Entendemos a simulação computacional como uma poderosa ferramenta capaz de promover as transposições necessárias para um entendimento, mesmo que apenas conceitual, dos sistemas caóticos determinísticos, especificamente, sobre as características apresentadas pelo sistema de Lorenz nesta seção.

O primeiro passo para simulação computacional é a escolha de uma linguagem de programação, portanto, na próxima seção, apresentaremos algumas vantagens de se utilizar a linguagem de programação Python (www.python.org).

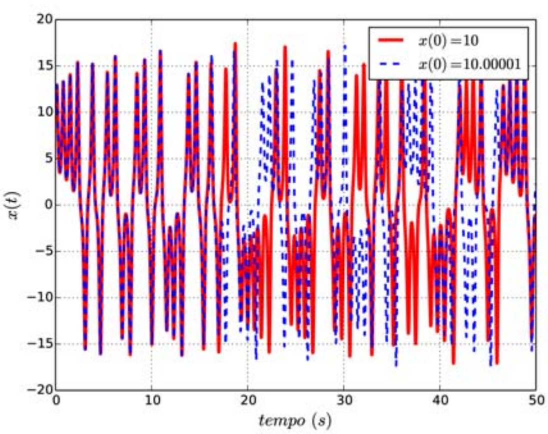

FIGURA 2. Duas trajetórias da componente x(t) que partem de posições iniciais muito próximas uma da outra e apresentam comportamento divergente após um certo tempo – este é o efeito borboleta.

III. LINGUAGEM PYTHON

Para fins pedagógicos entendemos que a escolha de uma linguagem de programação esteja baseada na ideia de que os cursos de Física Computacional devem enfatizar mais discussão sobre a Física dos problemas do que os caminhos que devemos utilizar para implementar as soluções numéricas, uma vez que, o objetivo é visualizar a dinâmica subjacente aos modelos.

Uma linguagem de programação que nos permita tal façanha, sempre será vista como um bom recurso de Ensino e a linguagem Python, que é de simples implementação, permite que nos foquemos nos modelos ao invés de enfatizarmos nos códigos computacionais.

Esta linguagem de programação apresenta uma série de vantagens em relação as demais, várias delas podem ser vistas no trabalho de Rojas *et al.* (2009) [12]. Aqui, citaremos apenas aquelas que nos parecem mais interessantes:

(1) Python é um software livre que não foi desenvolvido para criação de ambientes web, porém recentemente, os seus desenvolvedores vêm apresentando uma série de pacotes que tem com fim a computação científica (Numpy, Scipy, Panda), a visualização de dados (Visual.graph, Matplotlib e Matplotlib.pylab) e animação computacional (Tkinter, Vpython, Wxpython).

(2) É uma linguagem de fácil sintaxe fazendo com que em situações simples a codificação de um algoritmo em Python seja trivial.

(3) Ela apresenta um excelente refinamento gráfico no que é bastante apropriado para o que pretendemos fazer neste manuscrito.

(4) É uma programação orientada a objetos, isto flexibiliza muito a codificação dos *scripts* quando trabalhamos com variáveis de natureza diferentes, situação típica encontrada na computação científica.

(5) O Python funciona em qualquer plataforma: Windows, Linux, Mac e Androide.

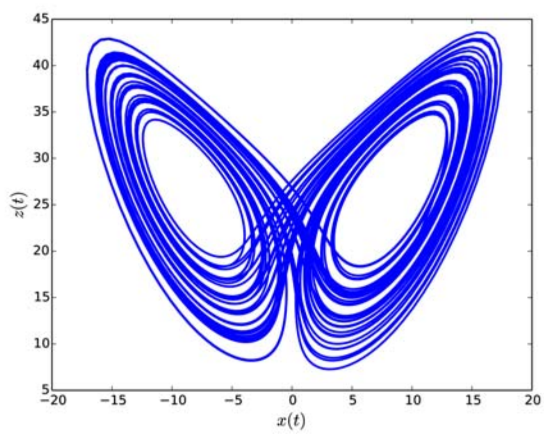

FIGURA 3. Atrator de Lorenz no espaço de fase composto pelas componentes *x(t)* e *z(t).*

Para maiores esclarecimentos sobre a linguagem Python visite o site python.org onde existem vários exemplos muito apropriados para programadores experientes e iniciantes. Sugerimos também dois excelentes livros de Computação Científica que utilizam a linguagem Python: o de Langtangen (2004) [13], que é uma litura um pouco mais técnica não muito indicado para iniciantes e o de Newman (2012) [14] escrito sob medida para Físicos e não iniciados em Python.

Além disso, uma busca rápida na internet o leitor encontrará várias apostilas e sites com material básico para os não iniciados em Python. Estas foram algumas considerações relevantes sobre a linguagem de programação. Segue na seção seguinte algumas considerações pertinentes sobre a Teoria da Transposição Didática.

IV. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA (TD)

O movimento de transformação do saber produzido pelo cientista para torná-lo compreensível e acessível para o Ensino em sala de aula e fazer com que seja posto em prática pelos professores nas escolas e universidades é, talvez, uma das práticas mais recorrentes no processo de Ensino: a chamada Transposição Didática (TD).

Do conceito de TD vemos claramente que existe uma certa distância entre os diferentes saberes, contudo isto não deve ser pensado que existe uma tentativa de marginalizar o saber escolar – o que deve ser levado em consideração são as especificidades epistemológicas do saber escolar que já transformou-se bastante ao longo do processo de transposição de maneira que o contrato didático entre professor e aluno é que ditam as regras do jogo e não mais, somente, o paradigma vigente que baliza e valida o conhecimento acadêmico.

A TD foi desenvolvida inicialmente na França pelo sociólogo Michel Verret, em 1975, e alguns anos depois pelo matemático Yves Chevallard, em 1980, quando inseriu-a num contexto mais específico e transformou-a numa Teoria: a Didática da Matemática.

Chevallard (1991) [10] utilizou a TD para analisar as transformações sofridas pelo conceito de distância desde sua origem na matemática pura, em 1906, por Fréchet, até sua inserção, em 1971, nos programas de ensino de geometria das sétimas séries [15, 16]. Existe toda uma anatomia para descrever o processo de transposição de um saber de referência até chagar nas salas de aula. É isto que veremos abaixo.

IV.A Os diferentes saberes

De acordo com Chevallard [10] a TD identifica três momentos distintos que devem ser levados em consideração. São eles:

O saber sábio: é aquele produzido pelo cientista ou pesquisador e pelos centros de pesquisa. Este conhecimento é aquele que o professor se depara quando ler as revistas científicas especializadas como a *Physical Review Letters, Europhysics Letters ou Journal of the Atmopheric Sciences*, entre outras por exemplo.

O saber ensinar: são transformações impostas sobre o saber sábio para que ele possa ser ensinado e faça parte dos currículos escolares, em qualquer nível. Esta transformação é feita por uma entidade invisível denotada por Chevallard de noosfera. A noosfera é formada pelos pedagogos, professores, os técnicos governamentais (da esfera Municipal, Estadual e Federal), os autores de livros científicos e qualquer agente envolvido com o Ensino. Este tipo de modificação do conhecimento é chamado de Transformação Didática Externa (TDE). Pondo de outra forma; o saber ensinar é aquele que chega ao público através dos livros didáticos e pelos almanaques de ciências, por exemplo.

O saber ensinado: este saber consiste na apresentação do conhecimento em sala de aula após todas as modificações sofridas desde sua origem. Estas modificações dependem, sobremaneira, da ação do professor, quando por exemplo, ele prepara seu plano de Ensino, produz seus textos e suas notas de aula ou está ministrando suas aulas. Nesta situação temos a Transposição Didática Interna (TDI).

Nas transformações sofridas pelo saber na noosfera ainda devemos levar em consideração alguns outros elementos de análise da TD responsáveis pela textualização do saber, tais como: a *desincretização*, *descontextualização*, *despersonali-zação*, *programabilidade* e a *publicidade*.

Entenda-se por *desincretização* como a fragmentação, escolha e a delimitação de saberes parciais.

A *descontextualização* desvincula o saber de qualquer contexto original (histórico) para que ele possa ser generalizado no futuro.

Despersonalização retira, do saber, as influencias pessoais de quem os produziu, isto permite com que o saber seja recontextualizado para um ambiente escolar.

A *programabilidade* tece sequências lógicas progressivas para o saber ensinar através de um material com começo, meio e fim, isto busca otimizar o processo de aprendizagem.

E, finalmente, a *publicidade* é uma forma de controle social da aprendizagem, pois ela evidencia as finalidades e os objetivos da TD realizada aponta (delimita) o que deverá ser ensinado.

Os cinco elementos destacados acima fazem com que a TD seja mal interpretada como uma mera simplificação do conhecimento, a fim de adequá-lo a realidade da sala de aula como podemos ver em [17]. Notamos que elementos geram conflitos inevitáveis restando aos autores pertencentes as diferentes esferas sociais da noosfera negociarem seus próprios interesses e pontos de vistas.

IV.B Manutenção dos saberes

Não é suficiente apenas o processo em si, o saber sábio precisa se manter como saber ensinar, por isto mesmo que Chevallard apresentou os indícios e características que o saber deve ter para que ele permaneça na esfera do saber. Desta forma como podemos ver em [16] o saber transposto deve ser:

(i) *consensual* – pois não se pode ter dúvidas quanto a sua validade científica, mesmo que momentânea. O professor não pode ter dúvidas se o que ele está ensinando é verdade e, por outro lado, o estudante não pode se questionar, se o que ele está aprendendo é correto ou não;

(ii) ele deve buscar *atualização moral e biológica* – moral no sentido de que o saber não se torne obsoleto e possa ser ensinado pelos pais. A atualização biológica vem da necessidade de que o saber deve estar de acordo com sua área de conhecimento e de acordo com a ciência vigente, deixando os conceitos superados para serem ensinados através de uma perspectiva história;

(iii) o saber deve ser *operacional* – para que, a partir dele sejam gerados sequências com atividades, exercícios, tarefas ou algum outro mecanismo que possamos fazer avaliações; e o saber sábio deve possibilitar a

(iv) *criatividade didática* – isto implica na criação de atividades de uso exclusivo das escolas e em criações de existência apenas em sala de aula e, finalmente (v) o saber deve ser *terapêutico* – ele deve se adaptar ao sistema didático, pois só permanecerá na escola aquele saber que já se verificou sua adaptação ao ambiente escolar.

Para transformar o saber sábio em saber ensinar Astolfi *et al.* [18] expõe as cinco regras que descrevem este processo de transformação que também podem ser vistas em [16, 17].

Estas regras são:

(a) Regra I – modernizar o saber escolar: A ciência vem se desenvolvendo muito rapidamente nos últimos anos e, e geral, sofremos intervenção de seus avanços na forma de novos dispositivos eletroeletrônicos. Desta forma, o currículo escolar, em todos os níveis, deve acompanhar todo esse desenvolvimento contemplando conteúdos mais modernos e contemporâneos e, mesmo aqueles conteúdos que não têm uma aplicação prática imediata, deve ser levado em consideração, pois ele pode contribuir para uma nova e mais adequada visão do mundo contemporâneo possibilitando ao docente trabalhar junto ao alunado o *fazer científico*.

(b) Regra II – atualizar o saber escolar: O saber deve ser atualizado, do contrário, ele apenas envelhece e se afasta do núcleo de pesquisa do saber sábio. Nesta situação o saber ensinado hoje, é em essência, aquilo que foi ensinado aos nossos pais. Isto banaliza o saber escolar no sentido de que o professor estaria ensinado algo que já está diluído na cultura cotidiana desarticulando o verdadeiro valor e o papel da escola e do professor, já que os próprios pais poderiam ensinar estes saberes.

(c) Regra III – articular o saber novo com o antigo: Deve-se ensinar o novo articulando-se ao antigo, não o refutando ou negando-o, pois isto pode fazer com que o estudante pense que o saber é algo instável e que logo será superado e posto de lado. O que precisa ficar claro é que existem saberes que necessitam de pouca manutenção para se adequar ao novo e atual.

(d) Regra IV – transformar um saber em exercícios e problemas: Aquele saber sábio que trouxer maiores possibilidades de exercícios e problemas será mais bem aceito pelo sistema didático. Isto porque exercícios e avaliações fazem parte do processo de avaliação. Estes terão vantagens no processo de TD.

(e) Regra V – transformar um conceito mais compreensível: Notadamente existe uma distância entre o saber sábio e o saber escolar, assim ao transformá-lo um no outro ocorrem muitas perdas, pois o professor muda a linguagem (que é muito técnica), utiliza analogias (apelando para alguma fenomenologia vivencial), retira o saber do contexto histórico.

Tudo isso para que se criem condições para generalização do saber ensinar. Isto ocorre, pois, o TD deve permitir que o professor consiga administrá-lo a seu favor na busca de tornar os novos conceitos acessíveis aos seus alunos.

Como podemos ver existem algumas perdas no processo de transformar o saber sábio em saber ensinado, porém, estas perdas fazem parte de um processo adaptativo cuja finalidade é tornar possível, por exemplo, que uma pessoa que não pertença a comunidade científica, consiga ter uma compreensão, no mínimo razoável, sobre ciência e tecnologia.

V. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho foi realizado com duas turmas do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal do Amazonas (IFAM/CMC), no segundo semestre dos anos de 2013 e 2014, na disciplina de Física Computacional (FC).

Especificamente, fizemos um recorte no planejamento inicial do curso deixando para aplicarmos a pesquisa na parte final do curso. Estas turmas tinham 12 e 10 alunos, respectivamente.

O curso de Física Computacional tem como pré-requisito a disciplina de Métodos Numéricos e Aplicações (MNA) e, é nesta disciplina, que o aluno deve aprender as técnicas matemáticas que irão auxiliá-los na resolução numérica de problemas conhecidos. A FC foi pensada para ser um fórum onde o aluno deveria aprender alguma linguagem de programação para implementar os algoritmos abordados na disciplina de MNA.

Implementamos o sistema de Lorenz, Equacione (8), utilizando a linguagem Python por ser intuitiva, de fácil assimilação e resolveríamos o problema com poucas linhas de código – bem diferente se usássemos outra linguagem como Fortran, C ou C++, que são frequentemente utilizadas nos cursos de Física, – isto permite que foquemos a maior parte de nossa atenção no entendimento da Física do problema que consiste no ato de entender os conceitos Físico-Matemáticos subjacentes aos sistemas caóticos determinísticos.

Neste manuscrito utilizamos a versão 2.7.9 do Python (a 2.6 pode utilizada também), pois tivemos problemas com os pacotes de computação científica (Numpy e Scipy) bem como o pacote para visualização de dados (Matplotlib) utilizando a versão mais atual, a 3.4.3.

Para fazermos as simulações utilizamos Desktops com configuração básica de 2G de memória RAM e processador Intel LGA que funcionavam na plataforma Linux com a distribuição Ubuntu 12.04 LTS.

A pesquisa de desenvolveu em cinco momentos distintos e complementares entre si:

(a) Primeiro momento:

Inicialmente começamos apresentando as facilidades e vantagens da utilização do sistema operacional Linux para utilização de softwares voltados para computação científica.

Ensinamos os alunos a instalarem o sistema operacional, a atualizarem o sistema e instalar os softwares utilizando o terminal Linux – apenas usando linhas de comando e nada de interface gráfica. O objetivo foi de estimular os alunos às práticas voltadas para programação *shell* e se ambientarem ao novo *modus operandi* utilizado pela comunidade Linux. Isto é importante, pois diferentemente de outros sistemas operacionais, é possível resolvermos muitos problemas no Linux fazendo buscas em sites na internet e em *blogs* especializados. Ao final desta etapa foi solicitado que os alunos nos explicassem: *Qual o entendimento que vocês fazem sobre a Teoria do Caos? Existem diferentes manifestações do caos na natureza?*

Suas respostas deveriam ser entregadas num texto na aula seguinte, pois o curso acontecia apenas uma vez por semana (3 horas/aula).

(b) Segundo momento:

A linguagem de programação Python foi utilizada ao longo de todo o curso de FC. Assim, neste momento específico, direcionamos o curso para a implementação de *script*s que resolvessem sistemas caóticos determinísticos que tinham proximidade com sistemas mecânico e elétrico previamente conhecidos pelos alunos. Para tanto, utilizamos o pêndulo não linear caótico e o circuito Chua [2, 6]. Antes da implementação fazíamos uma rápida derivação dos modelos e abríamos para o debate sempre levando em consideração que os sistemas caóticos determinísticos possuem termos adicionais visíveis nas equações de movimento.

(c) Terceiro momento:

Apresentamos o sistema de Lorenz fazendo comentários pertinentes sobre sua origem, sua derivação, e sua utilização pela comunidade científica, especialmente, a dos meteorologistas. Neste momento focamos a maior parte de nosso tempo dialogando sobre as vantagens e ou desvantagens de estudarmos a convecção atmosférica através do sistema de Lorenz. Neste momento foi importante para esclarecer:

(i) alguns conceitos como sensibilidade as condições inicias (Figura 2), atrator, atrator estranho (Figura 3), órbitas e espaço de fase;

(ii) enfatizar que o sistema de Lorenz é uma drástica simplificação da equação de Navier-Stokes que descreve a dinâmica atmosférica de acordo com o que vimos na seção II deste manuscrito.

(d) Quarto momento:

Solicitamos que os alunos trabalhassem na construção de um *script* para simular o sistema de Lorenz utilizando as facilidades do pacotes Numpy e Scipy e Matplotlib. Neste *script* deveriam haver saídas para os gráficos das componentes x(t), y(t) e z(t) do sistema de Lorenz calculadas para diferentes condições inciais muito próximas umas das outras, e diferentes valores de, ao menos um dos parâmetros r, s, b – cujo as escolhas ficavam a cargo dos alunos. E finalmente, deveriam gerar o atrator de Lorenz (forma de borboleta, Figura 3) utilizando os dados padronizados para reproduzirem a mesma figura obtida por Lorenz em 1963.

Neste momento ficávamos apenas fazendo mediação, de maneira muito tímida, pois tínhamos o interesse de ver como os alunos iriam lidar com esta situação/problema, que estratégias computacionais iriam utilizar para resolvê-la valendo-se da pouca experiência adquirida com esta nova linguagem de programação. O *script* foi um projeto que valeria a última nota do curso.

(e) Quinto momento:

Finalizamos a pesquisa nesta etapa. Aqui confrontamos as respostas inicias dos alunos retiradas do questionário com a concepção adquirida depois desta caminhada. Além disso, solicitamos que os alunos narrassem quais foram as estratégias computacionais utilizadas para construírem o *script.*

Este momento foi muito fortuito para avaliarmos o conhecimento conceitual adquirido sobre a nova linguagem de programação e sobre o caos determinístico através do sistema de Lorenz.

VI. RESULTADOS E DISCUSSÃO

VI.A Teoria do Caos como um saber a ensinar

Vamos começar fazendo uma análise para verificar se o tema proposto satisfaz as regras impostas pela TD a fim de que ele seja objeto do saber a ensinar.

Pela inspeção da literatura especializada vemos facilmente que o tema personificado pelo sistema de Lorenz consiste num saber consensual, pois a comunidade científica reconhece que a teoria do caos determinístico descreve uma vasta gama de sistemas naturais e tecnológicos [6, 9, 11].

O tema traz consigo as atualizações moral e biológica do saber que já propõe uma nova visão do mundo, bem diferente daquela visão proposta nos livros didáticos de Física Básica.

Nesta nova visão do mundo as interações entre as partes do sistema e, do sistema com o meio, articulam interações não lineares que são traduzidas ou manifestas por uma dinâmica que evolui de maneira irregular, aparentemente aleatória, indeterminista e de grande complexidade. Assim, quando trabalharmos numa proposta que procura viabilizar a inserção do tema estaremos promovendo a atualização escolar do saber que está em consonância com as exigências das regras I e II.

Em atenção a regra III podemos articular o saber antigo com o atual quando discutimos e mostramos as evoluções sofridas pelo estudo do movimento desde a dinâmica ideal, determinista, não dissipativa e linear até a evolução dos sistemas caóticos determinísticos. Exemplificando: tomemos o pêndulo simples que executa um movimento harmônico simples que é um modelo de movimento que não contempla a força de resistência do ar, oscilações de grandes amplitudes e não está sujeito a ação de uma força externa [7, 8]. Ao adicionarmos termos como o atrito e, não fizermos a aproximação para pequenos ângulos, o sistema exibe comportamento caótico. O interessante é perceber através da equação de movimento que o pêndulo simples é um caso particular do pêndulo caótico determinístico [2, 7, 8].

Em adição, o tema proposto, sem perder o foco na simulação computacional de algum sistema caótico particular, como estamos propondo, ou em vários, é operacional, pois podemos transformar este saber em exercícios e problemas atendendo assim o que está posto na regra IV. Para tanto, no que tange ao sistema de Lorenz podemos passar como exercício que o aluno calcule os parâmetros *r, s* e *b* levando em consideração dados da atmosfera local e construa o atrator de Lorenz, isto consistiu numa interessante atividade de pesquisa executada em nossa proposta. Pelo exposto acima não vemos nenhuma dificuldade em traçar alguma estratégia avaliativa.

Em nosso entendimento a regra V é a mais desafiadora.

Na hora de tornar conceitos novos, ainda mais quando forem abstratos como são os conceitos de caoticidade, não linearidade e indeterminismo, os professores se apropriam de várias estratégias: uso de metáforas e/ou analogias, experiências em sala de aula utilizando materiais de baixo custo, experiências em laboratórios, análise de textos, filmes, músicas, utilização de espaços não formais, etc. Neste manuscrito usamos a simulação computacional como ferramenta de auxílio para realizar esta árdua tarefa de quebrar a abstração conceitual inerente as entidades Físicas.

O que ocorre é que como o sistema de Lorenz (i) não tem solução analítica-matemática, o investimento no Ensino de técnicas matemáticas sofisticadas para solucioná-lo não se justifica, sobretudo numa primeira abordagem, e (ii) a visualização gráfica do sistema de Lorenz, pós resolução via métodos numéricos, fornece uma imagem do comportamento do sistema e ilustra claramente as diferenças entre um sistema caótico determinístico daqueles que não são. Além disso, como já antecipamos anteriormente, a análise gráfica consiste numa abordagem teórico-metodológica que não tem o positivismo como fundamentação epistemológica, pois não se insere como pesquisa quantitativa – é, de fato, qualitativa.

Uma boa maneira de iniciarmos o estudo de sistemas caóticos é através dos chamados *toy models* que são modelos desenvolvidos apenas para fins didático-pedagógicos [20, 21].

Isto ilustra que no estudo de sistemas caóticos há a criatividade didática e que, por sua vez, se os *toy models* foram e continuam a serem desenvolvidos e utilizados nas escolas, isto implica em terapêutica.

Em resumo vemos que a Teoria do Caos atende todas as exigências feitas pelas regras da TD sejam aquelas apontadas por Chevallard ou por Astolfi *et al.* [16, 17].

VI.B Questionário e categorias

Após a leitura cuidadosa dos questionários respondidos pelos alunos percebemos, de maneira meramente interpretativa, que suas respostas cabem dentre de três categorias diferentes. Ellas sao:

1.-Entende bem a teoria do caos (ETC): o estudante inserido nesta categoria é capaz explicar conceitos relativos a teoria do caos como o efeito borboleta, indeterminismo, aleatoriedade, não linearidade e são capazes de percebê-lo no cotidiano. Este estudante nunca fez um curso formal sobre teoria do caos mas teve contato com o assunto lendo material científico ou de divulgação bem como filmes de divulgação;

2.-Não entende a Teoria do Caos (NTC): nesta categoria inserimos o estudante que nunca ouviu falar na teoria do caos ou aqueles que ouviram, mas não sabiam que era uma teoria científica,

3.-Sabe que a Teoria existe, mas não é capaz de substantivar (STC): aqui cabe aquele estudante que já ouviu falar da Teoria através de filmes, ou ouvindo comentários rápidos de terceiros, tem um raso conhecimento Físico sobre o assunto, a ponto de ser incapaz de conceituar ou definir algo que diga respeito ao aspecto formal da teoria. Esta foi a categoria mais trabalhosa para definir, pois as vezes era muito difícil separar se o estudante caberia nesta categoria ou na primeira delas.

Nesta categoria retiramos respostas do tipo:

". . . só sei que caos é uma palavra utilizada para indicar que está tudo muito bagunçado por algum motivo que pode ser conhecido ou não" (aluno 8/2014).

Interessante notarmos que este estudante, mesmo sendo graduando de um curso de Licenciatura em Física, uma Ciência básica que vem sustentando dando subsídios para os avanços tecnológicos, se valeu apenas, do significado usual dado pelo senso comum da palavra caos – que indica desordem e confusão. Em situações como esta o aluno não consegue discernir que a evolução irregular da dinâmica do sistema caótico determinístico é apenas aparente, como podemos ver na componente *x(t)* da Figura 1, na verdade, a aleatoriedade ou a caoticidade é que leva o sistema a atingir o equilíbrio termodinâmico com o passar do tempo [4, 6, 9].

Não tem como deixar de notar que alunos pertencentes a categoria apresenta algum grau de analfabetismo científico [22].

Na categoria ETC não percebemos diferenças qualitativas nas respostas dos alunos de 2013 e 2014, no sentido de que, conversando com eles ao longo do curso, vimos que as leituras de divulgação científica sobre o assunto foram essencialmente as mesmas, especificamente, o livro do Ian Stewart (1991) [22] cujo o título é a provocativa frase dita no ontológico debate entre Albert Einstein e Niels Bohr: Será que Deus joga dados? [23].

O motivo dessa coincidência deve-se ao fato de que este livro pertence ao acervo da biblioteca da Instituição.

Um filme que a maioria dos alunos também assistiram foi:

O Efeito Borboleta de 2004, que já está disponível no Youtube (www.youtube.com). Nesta categoria os alunos são capazes de conceituar o que significa caos, apesar de que nem todos sabiam que existiam classes de sistemas caóticos diferentes.

Porém, eles tinham clareza do significado do efeito borboleta (como foi divulgado amplamente a questão da sensibilidade às condições iniciais) e apresentavam uma certa compreensão de que a aleatoriedade, nos sistemas caóticos é apenas aparente. Desta categoria foi possível extrair excertos do tipo:

"O caos é um tipo de manifestação da natureza, inclusive ..., é a maneira mais comum..." (aluno 1/2013).

"Nós não entendemos bem a teoria do caos, quer dizer, não conseguimos dizer o que vai acontecer no futuro ... qualquer perturbação pode fazer o sistema ir parar em lugares que nem conseguíamos imaginar" (aluno 4/2014).

"Não é fácil dizer o que é um sistema caótico, mas

podemos mostrar exemplos do cotidiano como o clima e a economia, na verdade é só perceber o que acontece ao nosso redor que veremos o caos em todos os lugares..." (aluno 2/2013).

Destes três excertos vemos que os livros de divulgação científica e os filmes cumpriram seu papel de oferecer ao leitor e espectador um certo grau de conhecimento sobre o tema. O entendimento dos alunos sobre o efeito borboleta, e serem capazes de perceber a presença do caos nas questões da previsão de tempo e clima e na flutuação da economia mostram que, de alguma maneira, eles internalizaram conceitos relevantes do assunto abordado na proposta.

Desta maneira, fomos capazes de ver a importância de se usar materiais de divulgação científica mesmo no ensino de graduação, sobretudo para os cursos de licenciatura. Nós, professores dos cursos de licenciatura não temos apenas o papel de ensinar disciplinas, mas, também, de fornecer subsídios (instrumentos, estratégias) para que os futuros professores abordem, por exemplo, temas da Física Moderna e Contemporânea com seus alunos do Ensino Básico. Isto ajuda a revitalizar o Ensino [24] e torna o Ensino de uma Ciência dura (*hard physics*) mais agradável. A divulgação cientifica *per se*, tem o propósito de aproximar o leitor não familiarizado com temáticas da Ciência.

Em nossa opinião serve como um bom ponto de partida para que o professor a utilize antes de transpor algum tópico de grau de dificuldade elevado e observar que sentido os alunos atribuem aos para os novos conceitos aprendidos [25], além é claro, de promover a imersão dos seus alunos na literatura.

Na categoria STC tivemos 6 alunos do ano de 2013 e, apenas, a metade desse número em 2014. Foi tarefa difícil discernir quais alunos deveriam ser inseridos nela ao invés da ETC. Alguns alunos só nos foi possível nos assegurar de qual categoria ele deveria estar inserido no quinto momento da proposta – quando tivemos a oportunidade de vê-lo substantivando sobre o assunto.

O caso interessante que vale apena ser narrado é que um aluno do ano de 2014, com talento matemática acima da média (comprovado em cursos anteriores), apresentou o seguinte como resposta:

"De modo geral as equações não lineares não podem ser resolvidas analiticamente, ou seja, usando aquelas técnicas que aprendemos no curso de cálculo III (equações diferencias ordinárias). Mas isso não é problema ... existem técnicas que transformam equações não lineares em equações lineares e, agora sim, podemos resolvê-las. É assim que os cientistas fazem ... não precisamos ficar botando dificuldade onde não tem ..." (aluno 5/2014).

Vemos que estes estudantes têm habilidades matemáticas para lidar com equações diferencias, conhecia algumas técnicas de linearização, mas mostrou-se incauto nas conceituações – não foi capaz de conceituar o efeito borboleta ou simplesmente disparava conceitos sem nexo para todos os lados e sempre usando vocabulário, mas técnico.

Pelo acompanhamento das publicações em revistas especializadas sabemos que vários autores defendem a conceituação em detrimento da matematização dos fenômenos no Ensino de Ciências, sobretudo da Física, em particular. Já vimos inúmeras vezes isto se repetir no Ensino Básico e nas primeiras disciplinas da graduação em Física.

Mas nunca tínhamos observados tal comportamento para um aluno que se encontra no quinto período do curso, pelo menos não desta forma.

O estudante chegou a oferecer resistência para o aprendizado conceitual. Depois, quando iniciamos a programação (*scripts*) percebemos que ele abaixou a guarda e seguiu no curso. Ao final, no quinto momento da proposta, ainda se fazia perceber a sua inclinação pelo aspecto quantitativo do assunto, e ainda apresentava repostas um pouco apressadas que deixavam a desejar.

O quinto momento (momento final) foi pensado para que os alunos falassem, esse momento foi articulado para eles. Gostaríamos de ouvi-los falar sobre a nova linguagem de programação assimilada (Python), caos determinístico e, sobretudo, que nos dissessem quais foram as maiores dificuldades encontradas na construção dos *scripts*.

No que diz respeito a linguagem de programação citamos os seguintes excertos:

"Professor não foi fácil escrever o script mas achamos muita coisa feita na internet e apenas adequamos a nossa necessidade" (aluno 9/2014).

" ... usar o Python foi fácil, pois eu achei várias apostilas de introdução ao Python na internet. O que mais gostei foi a comodidade de fazer um programa e no mesmo script gerar a saída para os gráficos ..." (aluno 6/2013).

Outro aluno complementou a frase acima dizendo:

" Eu já sabia programar então não foi difícil assimilar o Python mas ter um programa que já faz o gráfico é muito melhor, no Fortran agente só faz os cálculos que vão gerar os gráfico mas precisamos usar outro software para fazer as figuras" (aluno 8/2013).

Sobre a Teoria do Caos obtivemos repostas mais uniformizadas, isto nos faz conjecturar que as turmas, ao estudarem juntas, – pois haviam comunicação continua entre eles devido as outras disciplinas inclusive nos horários extra aula – criaram significados conceituais semelhantes [25].

Assim:

" O efeito borboleta é a essência do caos. Há sistemas não lineares que não são caóticos! " (aluno 7/2013).

" O caos está em todos os lugares, é impressionante como tudo pode ser caótico" (aluno 5/2014).

" Isto nos deu uma nova visão da Física que nós já estudamos e estamos lançando um olhar diferente" (aluno 2/2013).

Do primeiro excerto acma verificamos que tivemos sucesso em nossa empreitada de apontar as claras diferenças entre os sistemas não lineares que são caóticos e outros que não. O "efeito boboleta", em nosso entendimento, é a característica mais imediata para identificarmos isto. Existem outras maneiras como por exemplo a análise topológica dos atratores. Infelizmente, isto não é tarefa muito fácil, desqualificando assim o uso da topologia numa primeira abordagem.

Notar que o caos, como manifestação fenomenológica natural está onipresente, sempre a nossa volta, foi fantástico.

E mais ainda, perceber que o estudo do caos consiste numa atualização moral e biológica do Ensino da Física, como no último excerto acima, nos deixou bastante motivados a continuar e pensar em mais estratégias para a inserção de temas delicados da FMC no curso de Licenciatura.

Como vemos a apresentação de uma nova Física, a Teoria do Caos, para os futuros professores, demos, de certa forma um *upgrade* para que eles continuassem seus estudos. E em adição, demos subsídios para que eles usassem a simulação computacional como instrumento poderoso em suas aulas no Ensino Básico.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Começamos este trabalho enunciando uma proposta cujo objetivo foi transpor o saber sábio "Teoria do Caos" particularizando-a no caos determinístico via sistema de Lorenz utilizando o auxílio da simulação computacional codificada na linguagem Python. Antes de procedermos, tivemos a preocupação de verificar se a "Teoria do Caos" satisfazia as exigências impostas por Chevallard em 1991 [10] e as regras de Astolfi (1997) [16] – todas foram satisfeitas.

Diante disso só nos restava aplicar a pesquisa junto aos alunos.

Entendemos que alcançamos os objetivos propostos que foi o de ensinar uma linguagem de programação mais adequada a fins pedagógicos e de inserir os alunos ao estudo de sistemas que englobam uma vasta gama de fenômenos naturais e tecnológicos: o caos determinístico. Enfim, colocá-los diante de situações que dessem mais suporte intelectual para que eles fossem capazes de entender o processo de modelização de sistemas naturais, aguçassem mais sua sensibilidade com os fenômenos Físicos do cotidiano, isto pois, não há dúvidas que um dos motivos dentro os quais os alunos não vislumbram a Física no cotidiano, é que ela é abordada, em sua maioria das vezes, através de situações ideais. Isto traz um grande prejuízo na formação intelectual do futuro professor no sentido de que se apresentam para eles as "criações didáticas" (cinemática, associação de resistores, fluido ideal, etc) como se fossem fenômenos naturais – o que é um grande absurdo já que as "criações didáticas" são elementos da Didática que auxiliam o docente no processo de ensino e o estudante no processo de aprendizagem.

Assim, consideramos como um ponto importante apresentar a "Teoria do Caos" como um grande avanço Científico na direção de investigação fenomenológica de modelos mais próximos da realidade e, ainda assim, enfatizar que o modelo de Lorenz é uma simplificação grosseira do escoamento atmosférico convectivo. Pondo mais claramente: o modelo de Lorenz nos permite vislumbrar aspectos quase aleatórios dos sistemas determinísticos, mas como ele é um *toy model*, ele pode e, em nossa opinião, deve ser encarado, como uma "criação didática" desde que a motivação seja pedagógica, pois do contrário, não faz sentido.

Contudo, obtivemos dois resultados inesperados:

(i) dentre os alunos participantes da pesquisa e que já trabalhavam como professor, começaram a utilizar a programação (simulação) computacional em suas aulas desenvolvendo *scripts* simples junto aos seus alunos cujo objetivo era que eles reproduzissem aqueles gráficos encontrados nos livros didáticos de Física e,

(ii) do total de 22 alunos que participaram da proposta, 7 se engajaram em projetos de iniciação científica (PIBIC e PAIC) que tinham relação com programação computacional e 4 se envolveram com programa de iniciação a docência (PIBID) em projetos que envolviam tecnologias de informação e comunicação (TIC). Indiretamente semeamos o engajamento dos alunos envolvidos na proposta com o Ensino através de simulações computacionais distribuídos entre projetos científicos ou de docência como propõem os autores citados neste manuscrito.

Diante do que foi exposto não temos dúvidas do poder pedagógico oferecido pela simulação computacional [26, 27], sobretudo quando utilizamos uma linguagem acessível e intuitiva como a linguagem Python.

REFERENCIAS

[1] Capra, F. & Luisi, P. L., *Visão sistêmica da vida* (Cultrix, São Paulo, 2014).

[2] Taylor, J. R., *Mecânica clássica* (Bookman, Porto Alegre, 2013).

[3] Moreira, I. de C., *Sistemas caóticos em física: Uma introdução*, Revista Brasileira de Ensino de Física **15**, 163-181 (1993).

[4] Prigogine, I., *As leis do caos*, (Unesp, São Paulo, 2002).

[5] Lorenz, E. N., *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the atmospheric sciences **20**, 130-141 (1963).

[6] Strogatz, S. H., *Nonlinear dynamics and chaos; with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (Westview Press, Cambridge, 2000).

[7] Nussenveigh, M., *Um curso de Física Básica: Mecânica,* (Edgar Blucher Ltda, São Paulo, 2013).

[8] Alonso, M. & Finn, E. J., *Física: Um curso universitário Vol. I.* (Edgard Blucher, São Paulo, 2014).

[9] Lam, L., *Nonlinear Physics for Beginners: Fractals, chaos, solitons, pattern formation, cellular automata and complex systems* (World Scientific Publishing, Singapore, 1998.

[10] Chevallard, Y., *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado* (La Pensée Sauvage, Buenos Aires, 1991).

[11] Nicolis, G. & Nicolis, C., *Foundations of complex systems: Emergence, information and prediction,* (World Scientific Publishing Company, New Jersey, 2012).

[12] Rojas, J. F. *et al.*, *Física computacional: Una propuesta educativa*, Revista Mexicana de Física **55**, 97-111 (2009).

[13] Langtangen, H. P. *A primer on scientific programming with Python* (Springer-Verlag, Berlim, 2004).

[14] Newman, M., *Computational physics* (CreateSpace Independent Publishing Platform, Londres, 2012).
[15] Astolfi, J. P. & Develay, M., *A didática das Ciências* (Papirus, Campinas, 2006).
[16] Brockington, G. & Pietrocola, M., *Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de Física Moderna?* Investigação em Ensino de Ciências 10, 387-404 (2005).
[17] Alves-Filho, J. de P., *Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático*, Caderno Catarinense de Ensino de Física **17**, 174-182 (2000).
[18] Astolfi, J. P., *et al*. *Motsclés de la didactique des sciences* (De Boeeck & Larcier, Bruxelas, 1997).
[19] Bolt, M. E. & Klebanoff, A., *A new and simply chaotic toy*, International Journal of Bifurcation and Chaos **12**, 1843-1857 (2002).
[20] Wood, A. J. *et al*., *Daisy world: A review*, Reviews of Geophysics, 46, 1-23 (2008).
[21] Chassot, A., *Alfabetização científica: Questões e desafios para a Educação* (Unijuí, Ijuí, 2000).
[22] Stewart, I., *Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos* (Zahr, Rio de Janeiro, 1991).
[23] Valadares, E. de C., *Novas estratégias de divulgação científica e revitalização do ensino nas escolas*, Física na Escola **2,** 10-13 (2001).
[24] Silva, A. C. *et al*., *Fragmentos do paradoxo EPR em um trecho de divulgação científica: Uma pesquisa de cunho exploratório com ingressantes na universidade*, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **32,** 53-75 (2015).
[25] Nogueira, A. F. L., *O uso da simulação numérica de campos eletromagnéticos como ferramenta de ensino*, Revista Brasileira de Ensino de Física **30**, 4306 (2008).
[26] de Macedo, J. A. *et al*. *Levantamento das abordagens e tendências dos trabalhos sobre as Tecnologias de Informação e Comunicação apresentados no XIX Simpósio Nacional de Ensino de Física*, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **31**, 167-197 (2014).