Diseño de una situación didáctica para el estudio de la tangente a partir de estudios históricos sobre la variación

Luis Arturo Serna Martínez, Apolo Castañeda
Programa de Matemática Educativa, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria. Instituto Politécnico Nacional.

E-mail: acastane@ipn.mx

(Recibido el 10 de octubre de 2014, aceptado el 28 de febrero de 2015)

Resumen

La enseñanza del cálculo diferencial centrada en manejo algorítmico provee de un eficiente dominio procedimental, sin embargo, de acuerdo a diversos estudios, los estudiantes enfrentan dificultades cuando resuelven problemas y tienen que visualizar y explicar comportamientos gráficos. Esto nos condujo a problematizar la actual configuración de la matemática escolar, analizando su estructura epistemológica, cuestionando el enfoque didáctico así como las características del discurso matemático. Particularmente nos enfocamos en la recta tangente, la cual es un concepto relevante en la definición de derivada, y proporciona un vínculo al estudio de la variación sobre la curva de una función. Para este estudio se realizó una investigación histórica en la que se analizaron fuentes documentales originales, con el propósito de observar el tratamiento matemático, conceptos relevantes, problemas y situaciones particularmente referidos al concepto de tangente variacional. Esta investigación ofrece reflexiones sobre las contribuciones de la historia en el desarrollo de secuencias didácticas, así como las oportunidades didácticas en la clase de matemáticas.

Palabras clave: Tangente variacional, estudios históricos, diseño de secuencias didácticas.

Abstract

The teaching of differential calculus focused on algorithmic management provides an efficient procedural rule, however, according to various studies, students face difficulties when solving problems and have to display graphics and explain behavior. This led us to problematize the current configuration of school mathematics, analyzing their epistemological structure, questioning the didactic approach and the characteristics of mathematical discourse. In particular we focus on the tangent line, which is an important concept in the definition of derivative, and provides a link to the study of the variation on the curve of a function. For this study was realized a historical research in which original documentary sources were analyzed for the purpose of observing the mathematical treatment, relevant concepts, problems and situations particularly in relation to the concept of variational tangent was performed. This research offers reflections on the contributions of history in developing teaching sequences, as well as teaching opportunities in math class.

Keywords: Variational tangent, Historical studies, Design sequences.

PACS: 01.40.J-, 01.40.-d, 01.65.+g **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En las investigaciones de Biza y Zachariades [1], Biza, Christou y Zachariades [2], Dolores [3] y Parra [4] se documenta que: el estudio del concepto de derivada en clase está basado en un fuerte trabajo algorítmico, el cual conduce a la memorización de definiciones y procedimientos, sin la posibilidad de problematizar su estructura y forma. En este modelo de enseñanza, el profesor se limita a exponer los conceptos, explicar procedimientos y resolver problemas; y el estudiante debe *atender a la explicación*, concentrarse para poder repetir los pasos y resolver ejercicios similares [5]. De esta forma, los estudiantes llegan a nivel superior dominando las reglas algorítmicas, pero sin habilidades para hacer interpretaciones numéricas, gráficas o físicas [6].

Esta apreciación coincide con los resultados que señala Artigue [7], al puntualizar que los estudiantes desarrollan una aproximación procedimental de la matemática y enfrentan serias dificultades cuando se les cuestiona la parte conceptual y los significados asociados. A su vez, este enfoque de enseñanza motiva una evaluación que valora aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es *lo algorítmico*. Los estudiantes construyen poco a poco una idea sobre lo que es *esencial para la clase de matemáticas,* la cual está arraigada en el dominio de métodos y memorización de procedimientos; de tal forma que su ruptura es compleja ya que estudiantes se sienten cómodos con este modelo de aprendizaje y evaluación. De acuerdo con el estudio de Muñoz [8] sobre la dinámica de clase, se observó que el 88.9% de los estudiantes de nivel superior prefieren que la secuencia de la clase sea teoría-ejemplo-ejercicios. En este reporte, también se evidencia que los alumnos no son proclives a la resolución de problemas en donde tengan que utilizar sus habilidades para la resolución de los mismos. La secuencia teoría-ejemplo-ejercicios supone certidumbre, ya que no hay mucho margen para reflexionar o cuestionar, dado que únicamente se requiere repetir y reafirmar procedimientos.

Es usual que la introducción escolar de la derivada se base en la identificación de la recta tangente como el límite de familia de rectas secantes. Además de que este modelo geométrico de la derivada ha sido reportado en varios estudios como generador de grandes dificultades entre los estudiantes [2, 1], es común que en etapas mas avanzadas de un curso no se vuelva a retomar ni a reflexionar sobre este modelo [9].

A. Primera exploración

Con el propósito de establecer un punto de partida a la investigación, se les planteó a tres profesores de nivel bachillerato las siguientes preguntas:

(q1) ¿Para qué se estudia la tangente en cálculo diferencial?

(q2) ¿Consideras fundamental el estudio de la tangente en cálculo? Si o no. Favor de justificar la respuesta.

Profesor A (q1). *Podemos empezar con la definición de tangente:…toda recta que toca a la circunferencia en un solo punto, a este punto se le conoce como punto de tangencia. Al derivar una función, la derivada de una función en el punto x no es otra cosa que la pendiente de la tangente a la curva.*

Profesor A (q2). *Si, considero que en todo fenómeno donde haya una razón de cambio, existen curvas en las funciones, donde siempre existirán tangentes a dichas curvas, donde la gráfica expuesta anteriormente lo justifica.*

Profesor B (q1). *El concepto fundamental para el estudio del cálculo diferencial es precisamente la derivada, y esta tiene varias definiciones, pero en la mayoría de las escuelas de nivel bachillerato el concepto que más se llega a manejar es desde un punto de vista meramente geométrico, a la cual la define como la pendiente de la recta tangente en un punto determinado de la curva. De esta forma, dependiendo de la recta tangente en un punto de la curva, podemos predecir características de suma importancia en la curva; por esta razón el estudio de la recta tangente se vuelve indispensable para la compresión de la derivada y del cálculo diferencial.*

Profesor B (q2). *En la forma en que vienen planteados los programas de nivel bachillerato para el estudio del cálculo diferencial, y también porque no decirlo, mucho tiene que ver la formación académica que recibimos en nuestra época de estudiantes y el como nosotros mismos (profesores) definimos el concepto de la derivada. Definitivamente, creo que sí es fundamental el estudio de la recta tangente. Al alumno se le enseña a manejar las razones de cambio promedio, con apoyo de rectas secantes se logra determinar una aproximación del comportamiento de la curva, posteriormente se manejan razones de cambio instantáneas con el apoyo de una sucesión de rectas secantes hasta encontrar la recta tangente, y de esta forma se llega explicación de la derivada de una función. Por otro lado, creo de una forma muy personal, que no es esencial el estudio de la recta tangente, pero para ello deberíamos romper ciertos paradigmas de la forma de enseñar actualmente el cálculo diferencial; deberíamos conocer los orígenes del cálculo diferencial. El mismo Newton –hasta donde he leído– no se basaba en un manejo geométrico (y por ende de la recta tangente) para el desarrollo de la derivada de una función.*

Profesor C (q1). *Desde mi punto de vista, creo que es fundamental que se vea la tangente, ya que esta es una herramienta que nos permite dar una explicación geométrica de lo que es la derivada, es decir, el cambio en la variable, y cuando la variable x experimenta un cambio infinitesimal (pendiente de la tangente).*

El profesor C no contestó (q2). Los tres profesores relacionan a la tangente con una explicación geométrica. El profesor A menciona que la recta tangente toca a la curva en un solo punto, sin embargo, esto no es necesariamente cierto, pero es una idea que se encuentra presente en los estudiantes y en algunos profesores –tal y como es reportado en Cantoral [10] –. Observamos también que el profesor da una respuesta en forma de definición, no explica el motivo por el cual se estudia la recta tangente en cálculo diferencial. Esta respuesta coincide con lo señalado por Gascón [11], el cual menciona que se puede encontrar entre los profesores un modelo clásico docente que él denomina *teoricismo*, que consiste en una enseñanza (en el sentido de mostrar) una teoría cristalizada que se manifiesta a través de los conceptos. El profesor B reconoce que se pueden predecir características importantes de la curva a través de la variación de la tangente, señala que es fundamental el estudio de la recta tangente en los actuales programas de estudio, aunque comenta que no debería ser esencial su estudio ya que, erróneamente explica, que en el origen del concepto, no se utilizaban métodos geométricos para estudiar el cálculo. El profesor C, menciona que el estudio de la recta tangente es importante, porque permite dar explicaciones geométricas e introducir una explicación a la razón instantánea de cambio.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para profundizar en la naturaleza variacional de la tangente, y su relación con los conceptos del cálculo, se realizó una investigación histórica sobre su origen.

En este estudio se propone analizar las ideas, argumentos, definiciones del pasado, reconociendo el contexto donde se desarrollaron [12, 10] con el fin de utilizarlos en la didáctica actual [13]. Esto debido a que, asumimos que los planteamientos matemáticos en su origen ofrecen un tratamiento menos abstracto, emplean formas menos rigurosas, y se pueden recuperar situaciones, planteamientos y problemas, que ofrecen la oportunidad de desarrollar diseños didácticos donde se tenga cabida a las ideas intuitivas, y a que se puedan promover exploraciones informales.

La investigación histórica se enfocó en el estudio de los problemas geométricos en la matemática de los siglos XVI, XVII, algunos de ellos inspirados por los fenómenos de la naturaleza sobre la variación y el cambio, tal como lo señala Dolores [3] : *…en gran parte se debieron a que los matemáticos pensaron intuitivamente, a que usaron frecuentemente los argumentos físicos … los esquemas geométricos y las generalizaciones a las que llegaron fueron apoyados en casos particulares conocidos que les permitieron llegar a conclusiones correctas.*

La historia nos permite reconocer otros momentos en el desarrollo del conocimiento que puedan ser consideradas como recursos para el aprendizaje de los conceptos y que, de hecho, formen parte de su propia naturaleza y razón de ser.

Existen significados asociados a los objetos matemáticos que no se encuentran presentes en el actual discurso escolar, esto se debe a que, cuando los objetos matemáticos son introducidos a la escuela, se manifiesta una transposición que hace que el conocimiento pierda sus significados de origen.

Por ejemplo, como señala Dolores [3], la forma en cómo es tratada la derivada en el actual discurso escolar oculta sus significaciones iniciales, particularmente nos referimos a la variación y el cambio.

Los conceptos en el discurso escolar no reflejan el punto de arranque de cómo estos se construyeron y, en ese sentido, la historia sirve como marco para reconocer en ellos significaciones distintas. También, el uso de la historia nos permite reconocer la *historicidad* de un concepto, es decir, reconocer el conocimiento como algo dinámico, cambiante, y que su construcción depende de múltiples factores que se encuentran en la comunidad donde nace el conocimiento [14]. También contribuye el hacer un estudio sobre la forma en que eran tratados los objetos matemáticos en distintas etapas de la historia. Esto nos permite identificar ideas germinales, desarrollos científicos y tecnológicos, procesos de transmisión de conocimiento en algunas obras de difusión, así como procesos de formalización.

A. Epistemología de la tangente

En el trabajo de Castañeda [15], se presenta una amplia descripción de la definición de *diferencia* en la obra de L´Hospital. Esta revisión muestra que, este concepto se fundamenta en la idea de comparación de estados próximos.

Por ejemplo, la comparación de dos ordenadas que se encuentran infinitamente cercana una de otra, permite cuantificar las variaciones o cambios que presenta el fenómeno. El análisis realizado por Castañeda [15] a las obras de L´Hospital y Agnesi, muestra que las diferencias posibilitan la definición de la recta tangente al construirse triángulos infinitamente pequeños, conformados por tres magnitudes: el valor del incremento de abscisa, la diferencia de la ordenada y la hipotenusa –esta última al prolongarla se convierte en tangente–. De acuerdo al modelo de L'Hospital, es posible establecer para cada par de ordenadas infinitamente próximas, un triángulo característico donde se define una tangente. Esta idea permite establecer o anticipar el estado futuro para cada punto en la curva, lo cual sustenta la posibilidad de predecir comportamientos a partir del estudio local de la curva.

De acuerdo con Dolores [3] *el movimiento* es la *propiedad esencial de la materia,* el cual *es incorporado a la matemática en forma de variables*.

Este estrecho vínculo se manifiesta en una relación dialéctica entra la física y las matemáticas del s. XVII como lo señala Cantoral [10]: Los fenómenos de cambio, y en particular el concepto de diferencia es un elemento sumamente importante; ya que la diferencia fundamental $p(a + da) - p(a)$ sirve para el estudio de la naturaleza de la variación local y para extraer el comportamiento global de los fenómenos de flujo, pues *la idea básica a la que nos referimos consiste en la asunción de que con la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, es posible anunciar, anticipar su estado ulterior. Conociendo ciertos valores iniciales de un sistema en evolución, sabremos la forma en que este progresa* [10].

La diferencia fundamental: $p(a + da) - p(a)$ *mide el desequilibrio en la naturaleza, su reconocimiento permite anunciar la presencia de flujos, así como también da cuenta de los procesos de acumulación de lo que fluye* [10].

Observamos que la noción de diferencia es una útil herramienta para cuantificar cambios y describir la evolución completa del sistema, prediciendo el estado ulterior del fenómeno de flujo. Este caso expuesto por Cantoral [10], muestra la estrecha relación entre la física y la matemática en el periodo de formación del cálculo diferencial. Para la investigación, retomamos estas evidencias que permiten sustentar la posibilidad de crear escenarios didácticos basados en situaciones variacionales, con discusiones y conjeturas, tal como se presentaron en la antigüedad.

En el cálculo infinitesimal del siglo XVII se usó ampliamente la geometría, tanto para representar situaciones variacionales, como para explicar relaciones infinitesimales de las cantidades. De acuerdo con el análisis realizado por Castañeda [15] a las obras de L'Hospital y Agensi, las gráficas expresaban situaciones variacionales, las cuales se constatan con las descripciones dadas por los autores, en las que aparecen expresiones como el flujo de un punto, que hacen referencia a la variación del estado inicial de un fenómeno. Por otra parte, las gráficas muestran relaciones infinitesimales de magnitud, que aunque en estricto sentido no podrían tener dimensiones, se emplearon para describir las relaciones de los segmentos. Por ejemplo, se puede considerar que un punto en la curva es un segmento infinitamente pequeño, y consecuentemente toda la curva puede ser considerada como el ensamblaje de un conjunto infinito de pequeños segmentos infinitesimales. Esta idea es importante para la investigación ya que es un modelo para explicar la naturaleza de la curva y el origen de la recta tangente, entendida ésta como: la extensión en ambos sentidos de uno de estos pequeños segmentos infinitesimales.

En esta investigación se profundizó en el estudio de los conceptos matemáticos del siglo XVII, particularmente lo referido a las ideas infinitesimales para resolver problemas geométricos de la antigüedad, y de acuerdo con Serna [16] y Serna, Castañeda y Montiel [15], se concluyó que uno de los problemas ampliamente abordado fue el de las tangentes.

A continuación presentamos algunos planteamientos en los que aparece un tratamiento sobre la tangente.

El siguiente aparece en la obra de Copérnico [17], relativa al estudio de la posición de los cuerpos celestes (planetas) en el que busca determinar de un método para determinar el movimiento de los planetas y describir las trayectorias que siguen. El problema conduce al estudio de una curva particularmente en una región entre dos puntos dados. En el teorema sexto de su obra, *Sobre las revoluciones de las orbes celestes,* menciona que: *la razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].*

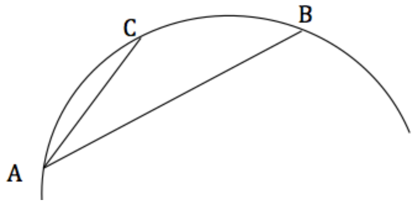


FIGURA 1. Estudio de la curva, teorema sexto, Copérnico.

Para lo cual se plantea:

Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, $\overset{\frown}{AB}$ *y* AC *y sea el mayor* $\overset{\frown}{AB}$*. Afirmo que la razón de* $\widehat{AB}$ *a* AC *es mayor que la de las subtensas AB a AC",* esto implica $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

El arco $\overset{\frown}{AB}$ forma parte de un círculo cuyo diámetro D propuesto es de 200,000 unidades (recordar que se hacía mención de fenómenos de naturaleza macro, en este caso estudios celestes) y para calcular las subtensas (cuerdas) entre dos puntos se hace uso de la expresión: $S = D sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$, en donde tenemos que, S es la subtensa, D el diámetro del círculo, θ es el ángulo central medido en grados.

Sin embargo al revisar la relación entre los arcos y sus mitades, se puede observar que cuando estos arcos se vuelven cada vez más pequeños, hay un momento en que esta relación (la mencionada en el teorema sexto del libro de Copérnico) entre los arcos y sus subtensas (cuerdas) deja de existir. Es decir, cuando los puntos B y C se acercan cada vez más y más al punto A, la desigualdad se convierte en igualdad. En este caso, se muestra una variación continua de segmentos, en el que aparece un límite en el que la desigualdad se vuelve igualdad.

B. Inclinación de la recta tangente

En la obra de Newton [18], se identificó un caso en el que se define un triángulo infinitesimal, que al prolongar la hipotenusa se genera una tangente. En la obra *Principia Matemática*, en el lema IX se menciona:

*Si una línea recta **AE** y una curva **ABC**, ambas con una posición dada, se cortan en un ángulo dado **A**; y a esa línea recta, en otro ángulo dado, se aplican ordenadamente **BD** y **CE** interceptando la curva en **B** y **C**; y los puntos **B** y **C** se aproximan y se encuentran en el punto **A**, afirmo que las áreas de los triángulos **ABD** y **ACE** serán respectivamente en última instancia, como los cuadrados de los lados homólogos.*

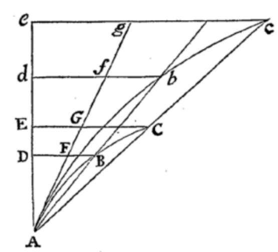


FIGURA 2. Estudio de la curva *ABC*, lema IX, Principia Matemática, Newton.

III. MÉTODO

Hemos considerado la revisión y análisis de textos originales llevada a cabo en Serna [16], en donde se muestra la historia de la *tangente variacional* en los siglos XVI, XVII y XVIII.

En esta revisión se mostraron diferentes métodos para calcular la recta tangente a una curva, incluyendo el realizado en el siglo XVII con Newton y Leibniz, donde se generalizó un método de resolución del problema. Una de las *herramientas matemáticas* fundamentales utilizadas, fue el uso de los infinitesimales.

El estudio histórico nos permitió recuperar aspectos relacionados con el proceso de construcción del conocimiento; nos referimos a aquellas ideas o situaciones que le dieron origen y sentido. Para el caso de la recta tangente variacional observamos que las ideas iniciales surgieron con Copérnico [16].

El contexto en el que se usaron las matemáticas fue en un ambiente geométrico, en donde se observó que las herramientas sirvieron para resolver problemas relacionados con ideas de cambio y variación. Este reconocimiento nos ha provisto de elementos para el diseño de cinco secuencias didácticas. Las primeras cuatro se construyeron con base a diferentes momentos o episodios históricos, en el que cada uno de ellos contribuía y enriquecía al momento anterior.

Esto permitió que, en cada secuencia didáctica se construyera un nuevo significado, hasta concretarse la formulación de la recta tangente variacional. La quinta secuencia didáctica se diseñó con la intención de que: los estudiantes usaran a la recta tangente variacional como una herramienta que permitiera construir, desde un punto de vista gráfico, la función derivada de una función polinomial de tercer grado.

A se describe el método general para la creación de las secuencias. Con base a la historicidad de la recta tangente variacional, se reconoce que una herramienta matemática no es algo que nace espontáneamente, más bien es producto de un contexto histórico situacional y que depende de lo que se ha construido anteriormente, y a su vez servirá de base para construir en un futuro nuevos significados. Es decir, hay una dinámica en donde los significados se van enriqueciendo, de tal forma que se tomaron en cuenta los siguientes elementos:

a. Se identificaron los problemas en donde se encontraba *la tangente variacional*, con base a los diferentes momentos históricos.
b. Se determinó cuáles eran las *herramientas matemáticas* utilizadas.
c. A partir de la *herramienta* utilizada, se tenía que reconocer cuáles eran los conocimientos que se requerían para poder utilizarla.
d. Se determinaron cuáles eran las actividades que se encontraban presentes al resolver el problema.
e. Se llevó a cabo un análisis para determinar cuáles eran los significados que surgían de las herramientas utilizadas, para llevar a cabo las actividades, reconociendo el contexto de cambio y variación en que se encontraba inmerso el problema.
f. Una vez que se determinaron los significados existentes, se trató de llevarlos a cabo de manera intencional en la realización de las secuencias didácticas.
g. Se retomaron los problemas de los textos originales, adaptando el lenguaje matemático utilizado en esa época a un lenguaje usado en el sistema escolar vigente, en donde se llevó a cabo la investigación.
h. La secuencia planteaba resolver un problema muy similar al revisado en los textos originales, pero ya adaptado, y se llevaron a cabo preguntas en donde se pedía argumentar. Las respuestas a las preguntas se podían contestar a partir de las actividades con el uso de herramientas y haciendo uso de argumentos de cambio y variación.
i. Había diferentes tipos de preguntas que hemos clasificado en categorías, cada una de ellas con una intencionalidad dentro de la secuencia.
j. Al llevar a cabo los análisis de los textos originales, se observó que mediante el uso de las graficas se podía construir argumentos y razonar; y a partir de la forma empleada en la secuencia, y determinando el funcionamiento, se podía generar un desarrollo del uso del conocimiento.

A. Secuencia didáctica 2: inclinación de la recta tangente

En la secuencia didáctica 2, se retoma lo presentado por Newton [20] en el lema IX del libro de los Principios Matemáticos, en el que se establece la semejanza entre dos triángulos rectángulos a partir de la razón entre las áreas, con respecto a la razón entre los cuadrados de los lados homólogos; para que se logre la semejanza ambos triángulos tendrían que compartir la misma hipotenusa. Eso se obtiene siempre y cuando, los puntos B y C se encuentren lo suficientemente cercanos del punto A, ya que de esa forma la curva se comporta como un segmento, y por lo tanto el punto B, así como el C, estarían sobre la misma línea recta que representa la hipotenusa de dos triángulos infinitesimales. La actividad tiene como propósito que los estudiantes:

a. Usen herramientas matemáticas como las empleadas por Newton, que son aquellas para establecer la semejanza entre dos triángulos rectángulos tal como la enunciada en su lema IX del libro de Principios Matemáticos.
b. Verifiquen a partir de las actividades de cálculo y comparación que habrá un momento en que los triángulos ABD y ACE se convertirán en triángulos semejantes. Esto sucederá cuando los puntos B y C se acerquen y se encuentren en una región infinitesimal con respecto al punto A.
c. Ratifiquen que una porción de la curva infinitamente pequeña se va a comportar como una línea recta, misma que se va a convertir en la hipotenusa común a los dos triángulos infinitamente pequeños y por lo tanto estos se llegarán a convertir en triángulos semejantes.

B. Herramientas matemáticas

a. Razón matemática $\frac{M_1}{m_1} = \frac{N_1}{n_1} = \frac{P_1}{p_1}$.

b. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\text{Lado homologo 1}}{\text{Lado homologo 2}}$.

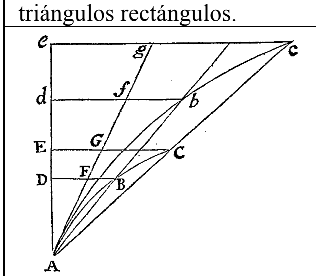
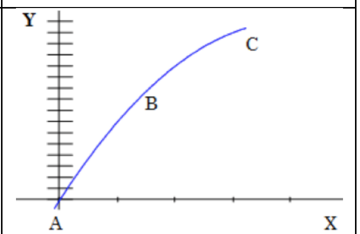
C. Conocimientos requeridos

a. Semejanza de triángulos.
b. Cálculo del área de un triángulo.
c. Representación de un intervalo mediante una desigualdad.
d. Representación gráfica de una función cuadrática de dos variables.
e. Evaluación de una función en un punto dado.
f. La pendiente como una razón de cambio.

D. Funcionamiento y forma

En la secuencia se incorporan aspectos geométricos y aritméticos, y se promueve la reflexión y análisis de gráficas de funciones. La secuencia concluye con una aplicación práctica en un contexto de física, en donde, haciendo uso de los conceptos analizados, se les pide a los alumnos que determinen la velocidad instantánea de un móvil, del cual se conoce su desplazamiento en función del tiempo.

TABLA I. Comparación de funcionamiento y forma de la actividad.

Funcionamiento:	**Funcionamiento:**
Mostrar que se pueden formar dos triángulos rectángulos, cuya hipotenusa va a coincidir con un pequeño arco entre dos puntos, siempre y cuando este sea lo suficientemente pequeño como para comportarse como un segmento. Se formarán dos triángulos rectángulos semejantes. Al extender la pequeña hipotenusa se formará la recta tangente. **Forma:** Representación gráfica de dos arcos que coinciden en el mismo punto en donde se sitúan puntos que forman triángulos rectángulos.	Mostrar la representación de una función parecida a la mostrada por Newton pero en un plano cartesiano y con una función específica. Mostrar que el lema enunciado por Newton se cumple cuando los puntos B y C se acercan más y más al punto A, es decir un pequeño segmento de la curva infinitamente pequeño, tiene una inclinación y si se extiende en ambos sentidos, formando así la recta tangente a un punto. **Forma:** Una parábola que abre hacia abajo que se intercepta con el origen del plano.
	

IV. RESULTADOS

En la hoja de trabajo se les representó a los estudiantes la curva ABC, mediante la función: $(x) = -x2 + 8x$, considerando el intervalo $0 \leq x \leq 3$. Se les hizo completar una tabla donde se hacen variar los puntos B y C, aproximándose cada vez más al punto A, lo cual implica que los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{EC}$ serán cada vez más pequeños; el punto A se encuentra situado en el origen, el ΔACE siempre es mayor que el ΔABD.

La herramienta matemática utilizada es la semejanza de dos triángulos rectángulos que cumple $\frac{\text{Área } \Delta ACE}{\text{Área } \Delta ABD} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AD}^2}$, suponiendo dos triángulos rectángulos cuyos lados homólogos son $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$.

Área del ΔABD $A = \frac{(\overline{DB})(\overline{AD})}{2}$ $A = \frac{xf(x_1)}{2}$	Área del ΔACE $A = \frac{(\overline{EC})(\overline{AE})}{2}$ $A = \frac{xf(x_2)}{2}$	$\frac{\text{Área}\Delta ACE}{\text{Área}\Delta ABD}$	$\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AD}^2}$
$A = \frac{(2)(12)}{2} = 12$	$A = \frac{(3)(15)}{2} = 22.5$	$\frac{22.5}{12} = 1.875$	$\frac{15^2}{12^2} = 1.5625$
3.5	7.343	2.098	1.940
1.32	2.876	2.179	2.071
0.608	1.332	2.196	2.133
0.156	0.693	2.442	2.193
0.038	0.177	2.658	2.466

FIGURA 3. Parte de la tabla elaborada por los estudiantes considerando el intervalo $0 \leq x \leq 3$.

A partir de la tabla anterior se plantea lo siguiente:

> Conforme los puntos B y C son cada vez más próximos al punto A, también los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{EC}$ se hacen cada vez más y más pequeños, podemos observar lo que va ocurriendo al comparar la razón entre las áreas de los triángulos $\frac{\text{Área } \Delta ACE}{\text{Área } \Delta ABD}$ con respecto a la razón entre los cuadrados de los lados $\overline{AE}^2$ y $\overline{AD}^2$ ¿Qué nos puedes decir al respecto?

La siguiente respuesta da evidencia del uso de la herramienta empleada:

Aquí nos damos cuenta que los triángulos no son semejantes, pero conforme se acercan al punto A se van asemejando hasta llegar a un sólo punto, en el que son semejantes (*sic*) (Estudiante: Reyna).

Los argumentos utilizados por los alumnos señalan que los puntos B y C se van acercando cada vez más al punto A.

Ellos se dan cuenta que va a llegar un momento en que los triángulos llegarán a ser semejantes. Esto lo observamos en el siguiente diálogo:

Joan: *Entre los intervalos sean más pequeños, más se va acercando el área…*

Profesor: *La razón entre las áreas*

Joan: *La razón entre las áreas con respecto a la razón entre los cuadrados de los catetos, entre más pequeños sean, más se van acercando a la ley de Newton.*

Reyna: *los triángulos no son semejantes.*

Profesor: *Pero al comparar las columnas 7 y 8, al comparar las razones entre las áreas con respecto a la razón entre los cuadrados de los lados, ¿no se fueron acercando estos valores?*

Reyna: *No,*

Profesor: *como son los dos últimos valores:*

Andrea: *2.27 y 2.53*

Profesor: *A ustedes ¿qué les dio?*

Joan: *2.65 y 2.46*

Profesor: *Hay probablemente algún pequeño error, pero los valores se van acercando cada vez más y más…*

Profesor: *Después se pregunta si se cumple el lema IX enunciado por Newton.*

Joan: *Sí se cumple, ya que entre más pequeños sean los lados, más se va haciendo igual la razón entre las áreas* *con respecto a la razón entre los cuadrados, que era lo que decía Newton.*

Andrea: *En última instancia serán iguales.*

Posteriormente, se les plantea a los estudiantes formular una conclusión respecto a lo trabajado previamente:

> Una forma de poder sacar **conclusiones** de lo que ocurre, conforme los puntos *B* y *C* se acercan cada vez más y más al punto *A* (siendo el valor de $\overline{EC} > \overline{DB}$), es observar lo que está pasando con los valores de la Tabla II en sus columnas 7 y 8. Algo está ocurriendo con las figuras que se encuentran ahí. ¿Qué conclusiones podrías dar de lo que va ocurriendo con las figuras (triángulos, líneas) conforme los puntos *B* y *C* se aproximan más y más a el punto *A*?

El profesor coordinó la discusión; se obtuvieron las siguientes ideas:

Profesor: *¿Qué va pasando con respecto a los triángulos?*

Joan: *Los triángulos se van haciendo semejantes, se van haciendo iguales,…*

Profesor: *¿Iguales o semejantes?*

Joan: *Semejantes, o entre más pequeños más se hacen semejantes.*

Nuevamente, el argumento de que los triángulos llegarán a ser semejantes es mencionando, pero siempre y cuando se vayan haciendo cada vez más pequeños.

En la siguiente parte de la actividad se plantea analizar si hay relación entre los pequeños arcos y la línea *Ac*.

> Observa que la línea *AC* –que es uno de los lados del ΔACE– al prolongarse se forma la línea *Ac*. Imagina como va a ir cambiando esta línea *Ac* (toma en cuenta que *Ac* es la prolongación del segmento $\overline{AC}$ del triángulo ΔACE) conforme los puntos *B* y *C* se van aproximando más y más a el punto *A*. ¿Cuál será su posición límite de esta línea *Ac*?
>
> Si los puntos *B* y *C* están infinitamente próximos a el punto *A*, tendremos también unos triángulos infinitamente pequeños. Vamos a imaginar lo que va a ir ocurriendo conforme los puntos *B* y *C* van cambiando de posición, acercándose cada vez más y más al punto *A* con los pequeños arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ y la línea *Ac* que se está moviendo. ¿Crees que haya alguna relación entre los pequeños arcos y la línea *Ac*?

El profesor coordinó la discusión, se obtuvieron las siguientes ideas:

Profesor: *¿En qué posición quedará la línea Ac?*

Alejandra: *Sería la hipotenusa*

Profesor: *¿Sería la hipotenusa de quien?*

Alejandra: *Del triángulo…*

Profesor: *Imagínate, que lo podamos poner ahí (señalando al pizarrón)*

Reyna: *La línea va a ser casi vertical.*

Profesor: *¿tú qué opinas Joan?*

Joan: *Casi lo mismo que ellas*

Profesor: *¿va a quedar casi vertical?*

Joan: *Aja, va a quedar casi vertical conforme se va cerrando*.

En la tercera parte de la secuencia, se pidió calcular la velocidad instantánea de un cuerpo cuya relación entre desplazamiento y tiempo se encuentra dada por una expresión de segundo grado de dos variables. Para ello, lo que se requiere es que los alumnos usen la fórmula de la pendiente, vista en su semestre anterior.

$$m = v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1)$$

Se le recuerda a los estudiantes que esta fórmula es empleada en el caso de una línea recta, pero lo que se requiere es que ellos utilicen los conocimientos adquiridos, es decir, que reconozcan que la fórmula se puede utilizar para dos puntos de una curva siempre y cuando los puntos se encuentren lo suficientemente cercanos. Veamos lo que plantea la secuencia:

> Ahora tenemos un móvil que se mueve de acuerdo a: $f(x) = -x^2 + 8x$, y queremos encontrar la velocidad en el instante $t = 1$ seg.
>
> Para calcular la velocidad en el caso anterior, nos podíamos valer de la pendiente; y como se trata de un movimiento con razón de cambio constante, siempre valía lo mismo independientemente de los puntos utilizados para ello. ¿Se podrá hacer lo mismo en este caso? Argumenta tu respuesta.

El caso anterior se refiere al uso de la fórmula de la pendiente con una línea recta; veamos la respuesta de uno de los estudiantes:

Si, por que necesitamos que la curva, se comporte como recta formado dos puntos de esta infinitamente cercanos al 1, para que estos puntos se utilicen en la fórmula de velocidad y así obtenerla (*sic*) (Estudiante: Joan)

Posteriormente se le solicita a los alumnos que calculen la velocidad instantánea en *t*=1 *seg*. Mostramos a continuación el cálculo realizado por un estudiante:

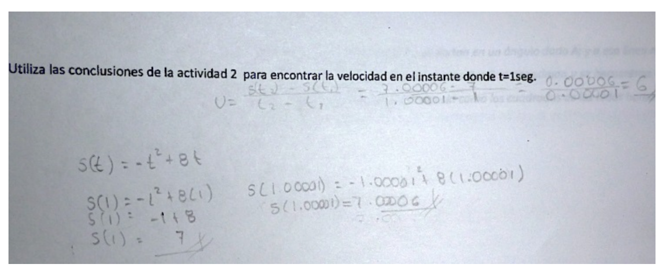


FIGURA 4. Cálculo realizado por un estudiante de la velocidad instantánea.

A partir de esta imagen se genera el siguiente diálogo, en donde el que el profesor pregunta haciendo referencia a un móvil cuyo desplazamiento en función del tiempo está dado por $f(x) = -x^2 + 8x$:

Profesor: *¿Se puede calcular la velocidad para un cuerpo usando dos puntos cualesquiera?*

Efraín: *No, porque si de hecho tomamos dos puntos va a salir una velocidad, pero luego vamos a tomar otros dos puntos distintos va a salir otra velocidad distinta…*

Profesor: *Así es.*

Efraín: *Nunca va a salir una velocidad para lo que es toda la recta…*

Profesor: *Sin embargo sí se puede hacer algo, ¿verdad?*

Joan: *Sería solamente acercar los puntos, por que como es una curva los valores de la pendiente no van a ser los mismos, pero si los vamos acercando tendría un valor casi similar…*

Mónica: *Sí se puede, nosotros calculamos para el valor de t = 1 seg y utilizando otro punto infinitesimalmente cercano se puede calcular un nuevo valor y ya con eso podemos calcular la velocidad.*

Profesor: *A ver Juan Carlos, ¿por qué infinitamente cercano a el punto 1?*

Juan Carlos: *Por que al estar los valores infinitesimalmente cercanos de una curva se va a convertir en línea recta.*

Profesor: *¿A qué conclusión llegaron?*

Reyna: *La curva en un momento se va a comportar como una línea recta, por lo tanto su pendiente va a ser constante…*

Profesor: *Bueno la pendiente no es constante de hecho, es cambiante, ¿no?, en cada instante está cambiando…*

Hugo: *Si pero si lo manejamos infinitesimalmente se va a comportar como una línea recta, en cierto punto, si nos acercamos mucho, en este caso, ya se tendría una pendiente…*

Profesor: *¿Ya tendría una pendiente por que ya es una pequeña línea recta ahí, no?...*

Andrea: *Sí, con esa pequeña línea recta, ya se tendría la pendiente.*

Profesor: *Y para calcular esa pendiente, sería, ¿quién, entre quién, dividir qué entre qué?*

Hugo: Δs *entre* Δt.

Profesor: *¿Creo que acá le llamamos f (x), no?*

Equipos: *Si.*

Profesor: *Sería* Δf *entre* Δt.

Profesor: *¿Qué velocidad les quedo a ustedes?*

Todos: *6.*

V. CONCLUSIONES

Identificamos la aparición de la idea de recta tangente variacional, lo observamos cuando los estudiantes tenían que ir acercando a dos puntos de una curva hacia un tercer punto fijo (en este caso el punto *A*), los estudiantes lo reconocen así ya que inclusive manifiestan: "*necesitamos que la curva se comporte como una recta, tomando dos puntos de esta infinitesimalmente cercanos…*", y en otro momento reconocen que la recta tangente está cambiando. Todo esto acontece en un ambiente geométrico, ya que se utilizan conceptos como curva, recta, triángulos semejantes.

Existen evidencias que nos permiten identificar la resignificación de ideas construidas con anterioridad; en este caso específico, cuando reconocen que la curva, bajo ciertas condiciones se llega a comportar como una recta, pero se le añade un nuevo atributo, este consiste en reconocer que en la pequeña región en donde la curva se comporta como una recta. Esa pequeña recta es una parte *"de un lado de un triángulo"*, como lo mencionaron algunos estudiantes con respecto a cómo serían los triángulos *ACE* y *ABD*, conforme los puntos *B* y *C* están infinitamente próximos al punto *A:* "*serán infinitamente pequeños conservando sus ángulos y convirtiéndose en triángulos semejantes*". Los estudiantes mencionaron respecto a los arcos y a la línea *Ac* (que es la tangente), que es ésta, "*siempre va a pasar por dos vértices de cada triángulo"* los cuales por la forma de la figura se refieren a aquellos que se sitúan en la hipotenusa de los triángulos semejantes.

Respecto a la funcionalidad de las ideas construidas, observamos que los alumnos la aplicaron a un problema de otro contexto (tercera parte de la secuencia sobre la velocidad instantánea). Los estudiantes reconocen que, de usarse la fórmula de la pendiente con diferentes puntos de la curva, se tendrían diferentes velocidades; sin embargo se puede calcular la pendiente de la curva entre dos puntos, siempre y cuando se tengan dos puntos de la curva que se encuentran muy cercanos entre sí.

A. Reflexiones finales

Se ha sistematizado un método para la construcción de las secuencias. Para su desarrollo, se utilizó la *historicidad*, se retomó un texto original y se adaptó a un lenguaje asequible para los estudiantes, lo cual tiene que ver con sus conocimientos previos del sistema escolar a donde pertenecen, y de lo cual es consciente el profesor-investigador.

A partir del fenómeno didáctico del cual hemos partido, se ha problematizado el conocimiento a partir del uso de la historia ya que esto nos permitió reconocer la *tangente variacional* en su contexto donde se le significó, y permitió resolver diversos problemas de cambio y variación.

Los significados surgen del uso de herramientas matemáticas que se requieren para poder llevar a cabo las actividades, en donde se retoman también los conocimientos previos para resolver problemas. Lo cual en esta interacción herramienta-actividad-contexto surge la construcción de significados, es decir se presenta la resignificación.

Nuestro estudio propuso problematizar el objeto escolar recta tangente, por medio de *la tangente variacional.* Esto tiene como consecuencia, construir la noción que hemos llamado recta tangente variacional. Una vez construida, sirve también de *herramienta* como una introducción a la derivada, desde un punto de vista gráfico.

REFERENCIAS

[1] Biza, I. & Zachariades, T., *First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line,* The Journal of Mathematical Behavior **29**, 218-229 (2010).

[2] Biza, I., Christou, C. & Zachariades, T., *Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis,* Research in Mathematics Education **10**, 53-70 (2008).

[3] Dolores, C., *Elementos para una aproximación variacional de la derivada,* (Díaz de Santos, México, 2007).

[4] Parra, H., *Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto,* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **8**, 69-90 (2005).

[5] Santi, G., *Objectification and semiotic function,* Educational Studies in Mathematics **77**, 285-311 (2011).

[6] Dreyfus, T., Advanced mathematical thinking, En: *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education*, Hownson A. & Kahane J. (Eds.), (Cambridge University Press, Cambridge, 1990), pp. 113-134.

[7] Artigue M., *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares?,* Revista Latinoamericana de Matemática Educativa **1**, 40-55 (1998).

[8] Muñoz G., *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral,* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **3**, 131-170 (2000).

[9] Kajander, A. & Lovric, M., *Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **40**, 173-181 (2009).

[10] Cantoral, R., *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* (Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001).

[11] Gascón, J., *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*, Recherches en Didactique des Mathématiques **18**, 7-33 (1998).

[12] Salinas P. & Alanís, J. A., *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **12**, 355-382 (2009).

[13] Serna, L. A., *Estudio socioepistemológico de la tangente*, Tesis de Maestría no publicada, (CICATA-IPN, México, 2007).

[14] Zemelman, H., *Configuraciones críticas. Pensar epistémico sobre la realidad,* (Siglo XXI Editores, México, 2011).

[15] Castañeda, A., *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*, Tesis de Doctorado no publicada, (México, CICATA-IPN, 2004).

[16] Serna, L. A., Castañeda, A. & Montiel, G., *Construcción de la recta tangente variacional a través de los usos del conocimiento del siglo XVII y XVIII,* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **25**, 939-947 (2012).

[17] Copérnico, N., *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*, (Editora Nacional, Madrid, 2003), (Obra original publicada en 1543 bajo el título *De revolutionibus orbium coelestium*).

[18] Newton, I., *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, (Altaza, Madrid, 1993), (Obra original publicada en 1687).