

# Reflexionando sobre algunas características generales del modelo de Rasch



**Rubén Sánchez Sánchez**

*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del, Instituto Politécnico Nacional. Unidad Legaria. Ciudad de México, México.*

**E-mail:** [rsanchezs@ipn.mx](mailto:rsanchezs@ipn.mx)

(Recibido el 4 de enero de 2020, aceptado el 11 de febrero de 2020)

## Resumen

El modelo de Rasch fue formulado alrededor de los años comprendidos entre 1952 y 1961, por el matemático danés Georg Rasch, y es un instrumento que se utiliza hoy en día en diversas áreas de investigación científica. En el área de enseñanza, se utiliza para realizar análisis estadístico y para investigar la efectividad de varias metodologías de enseñanza, así como también en la validación de pruebas o test de conocimiento general. En este trabajo, discutiremos varias de sus características generales y el porqué es un instrumento útil en el área de Ciencias y Humanidades. Presentamos un material que ayuda como una introducción a las técnicas de métodos numéricos de análisis estadístico, que pueden aplicarse en el análisis de datos para el aprovechamiento escolar.

**Palabras clave:** Análisis estadístico, validación de instrumentos de evaluación escolar, métodos numéricos de análisis de datos.

## Abstract

The Rasch model was formulated around the years between 1952 and 1961, by the Danish mathematician Georg Rasch, and is an instrument that is used today in various areas of scientific research. In the teaching area, it is used to perform statistical analysis and to investigate the effectiveness of various teaching methodologies, as well as in the validation of tests of general knowledge. In this work, we will discuss several of its general characteristics and why it is a useful instrument in Sciences and Humanities. We present a material that helps as an introduction to the techniques of numerical methods of statistical analysis, which can be applied in the analysis of data for school achievement.

**Keywords:** Statistical analysis, validation of school assessment instruments, numerical methods of data analysis.

## I. INTRODUCCIÓN

Según Jürgen Rost [1] en su artículo *The Growing Family of Rasch Models*: “dentro del área del modelado estadístico, como el estudio de las ecuaciones estructurales, el modelo lineal logarítmico, y la teoría de respuesta al ítem, un número creciente de modelos, se han observado, y ayudan a resolver muchos problemas y también nos asisten a visualizar varios problemas que antes no era posible percibir”. Refiriéndose a que el modelo original de Rasch, ha ido diversificándose con el tiempo y ha logrado hallar muchas aplicaciones en diversas áreas de las Ciencias Naturales y Ciencias Sociales, como lo son la planeación de recursos para la agricultura [2], el crecimiento de la pobreza [3], la validación de pruebas escolares [4], la psicometría [5], entre otras áreas, del conocimiento humano.

## II. MODELO SIMPLIFICADO DE RASCH

Aunque Rasch obtuvo originalmente varias expresiones matemáticas, para formular su teoría de modelaje estadístico entre los años de 1952 y 1961 [6], hoy en día, podemos

tomar como la ecuación matemática de un modelo matemático de Rasch simplificado a la siguiente expresión matemática [7, 8].

$$P(\theta) = \frac{e^{\alpha(\theta-\delta)}}{1 + e^{\alpha(\theta-\delta)}} \quad (1)$$

Donde identificamos a los siguientes parámetros y variables:

$e$  es la base de los logaritmos naturales (aprox. 2.718)

$\alpha$  es el parámetro de discriminación del ítem,

$\delta$  es el parámetro de dificultad de la pregunta o ítem,

$\theta$  es el parámetro de habilidad del estudiante,

$P$  es la probabilidad de que un estudiante responda correctamente a la pregunta o ítem del test o prueba.

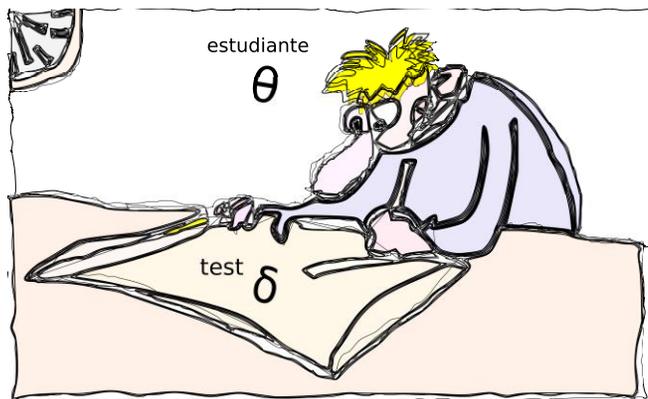
Si suponemos que tenemos una prueba de conocimientos generales, que consta de  $n$  preguntas o ítems  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_n$ . Y se lo aplicamos a  $m$  estudiantes de un curso escolar. Podemos suponer que tenemos a un estudiante escogido, con un nivel de habilidad o conocimientos representado por el llamado parámetro de habilidad  $\theta$ .

### III. EXPLICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE HABILIDAD Y DE DIFICULTAD

En el modelo simplificado de Rasch, tenemos a dos de los parámetros, más característicos, uno de ellos es el parámetro de habilidad y el otro más importante es el parámetro de dificultad de la pregunta.

Esto se interpreta de la siguiente forma: Supongamos que tenemos un grupo de personas que llevan un curso de conocimientos generales, el profesor ha diseñado una prueba de opción múltiple. Después de que el profesor ha dado su clase, en una fecha posterior, el profesor planea un examen a su grupo, aplica su prueba un día y les da cierto tiempo razonable a los estudiantes de su grupo para contestar el cuestionario.

Supongamos que tenemos a un estudiante, que representa al promedio del grupo. Este estudiante tendrá un nivel de habilidad dado, adquirido durante el proceso de aprendizaje de la materia de estudio. El modelo de Rasch simula su nivel de conocimiento del tema con el parámetro de habilidad. En la figura 1, se encuentra representado el estudiante, con el parámetro de habilidad dado por  $\theta$ .



**FIGURA 1.** Supongamos que una persona de un grupo de estudiantes contesta una prueba de conocimientos generales, como se muestra en la figura. Se indica el nivel de dificultad de la pregunta de la prueba con el parámetro de dificultad  $\delta$  y el nivel de capacidad del estudiante con el parámetro de habilidad  $\theta$ . Ambas cantidades son parámetros genéricos del modelo de Rasch. El modelo de Rasch predice que, a mayor nivel de habilidad, la probabilidad de que el estudiante responda bien a la pregunta aumentará.

Dependiendo de este parámetro el estudiante podrá o no responder correctamente a la pregunta del test. Además, suponemos que la pregunta tendrá su propio nivel de dificultad, porque requiere de cierto esfuerzo por parte del estudiante, para que pueda ser contestada correctamente, este nivel de complejidad de la pregunta estará representado por el parámetro de dificultad  $\delta$ , que se muestra en la misma figura 1.

Después del examen, el profesor recogerá su prueba y verá si el estudiante promedio de la figura 1, contestó bien o no a una pregunta (o ítem) del test o prueba.

Dependiendo del nivel de conocimientos del estudiante, éste podrá contestar bien o mal a la pregunta, y esto será representado por un número entre cero y uno, que representa

la probabilidad de que la pregunta sea contestada correctamente.

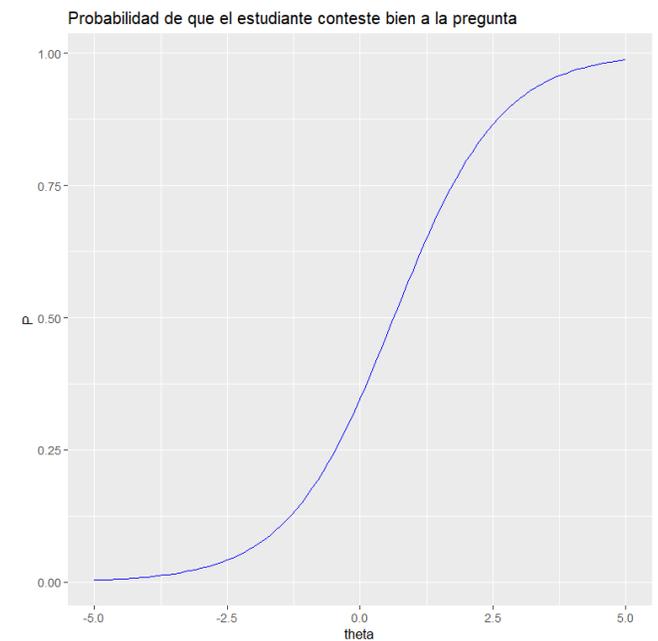
El modelo simplificado de Rasch representa o mide esta probabilidad, si en la ecuación (1), hacemos el parámetro “ $a$ ” de discriminación de la pregunta igual a la unidad. Y si conocemos el grado de complejidad o dificultad que tiene la pregunta en cuestión.

### IV. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL MODELO DE RASCH

Supongamos que el nivel de dificultad, representado por el parámetro de dificultad  $\delta$  es igual numéricamente a 0.632. Entonces el trazado de la gráfica para la ecuación (1) estará representada en la figura 2, (la cual fue elaborada con la librería “ggplot2” [9] del lenguaje de programación R [10]). La ecuación correspondiente a la figura 2, se escribe entonces como.

$$P(\theta) = \frac{e^{\theta-0.632}}{1 + e^{\theta-0.632}} \quad (2)$$

A este trazo, que representa el comportamiento de la ecuación (1) se le llama “curva característica al ítem” o en inglés *Item Characteristic Curve* (ICC).



**FIGURA 2.** Probabilidad de que un estudiante del grupo examinado conteste bien a la pregunta de la prueba, en función de la habilidad del estudiante. Esta es la curva que representa ese estado y se llama Curva Característica al Ítem o en inglés *Item Characteristic Curve*.

Este es el significado que está detrás de la ecuación simplificada (1), y se toma como punto fundamental del modelo de Rasch. En este caso estamos tomando dos posibilidades a la respuesta del ítem: la primera es que el estudiante del grupo responda bien, lo cual se representa en la colecta de datos con un “1”, o que el estudiante responda

incorrectamente a la pregunta, en cuyo caso a la colecta de datos se anota con un cero “0”. Como estamos considerando estas dos posibilidades, estamos manejando lo que se llama un modelo “dicotómico” o de dos valores posibles. Con el modelo de Rasch, es posible calcular, tanto los parámetros de dificultad de la prueba aplicada, como los parámetros de habilidad de cada estudiante.

En el modelo del rasgo latente o en inglés *latent trait model* (LTM), podemos calcular el parámetro de dificultad de la pregunta, véase por ejemplo el paquete de software o librería *ltm* del lenguaje de programación *R* [10].

En el modelo lineal logístico del test o en inglés *linear logistic test model* (LLTM) podemos hallar el parámetro de habilidad para cada estudiante. Desde luego esto involucra el reemplazo del parámetro de dificultad por una transformación lineal, y unos métodos numéricos diferentes, que usa la aproximación LLTM.

El parámetro de discriminación de la pregunta o ítem representa la pendiente de la ICC en su punto de inflexión de curvatura, intuitivamente este es el punto a “la mitad de la curva”, donde la probabilidad es de la mitad de la unidad o numéricamente igual a  $0.5=1/2$ .

## V. CRITERIOS DE INTERPRETACIÓN, PARA LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE RASCH

Vamos ahora, a dar un criterio aproximado, de cómo se pueden interpretar los valores obtenidos para cierta situación específica, de los valores de los parámetros de dificultad del ítem y del de discriminación. Desde luego, hay que recordar que tanto el parámetro de habilidad del estudiante, como el parámetro de dificultad del ítem, están medidos sobre la misma escala, y por convención se determinado que es la escala de los “logits”.

Según Baker y Kim [11], el parámetro de dificultad ( $\delta$ ) de la pregunta puede adquirir varios niveles:

- Muy fácil. ( $\delta \leq -2.625$ ).
- Fácil. ( $-2.625 < \delta \leq -1.5$ ).
- Medio. ( $-1.5 < \delta \leq 1.5$ ).
- Difícil. ( $1.5 < \delta \leq 2.625$ ).
- Muy difícil. ( $2.625 \leq \delta$ ).

Y la discriminación al ítem o pregunta ( $a$ ) puede tener los siguientes niveles.

- Ninguno. ( $0 \leq a < 0.4$ ).
- Bajo. ( $0.4 \leq a < 1$ ).
- Moderado. ( $1 \leq a < 2.1$ ).
- Alto. ( $2.1 \leq a < 999$ ).
- Perfecto. ( $999 \leq a$ ).

Entonces en general, cuando tenemos un parámetro de dificultad de cero ( $\delta=0$ ), no quiere decir que la dificultad del ítem o pregunta del test sea nula, sino que su nivel de dificultad es moderado o medio. Así que al tener parámetros negativos de delta  $\delta$ , se debe de interpretar que el nivel de dificultad sea *medio*, *fácil* o *muy fácil* (o *muy sencillo*). Esto

es así debido a que las escalas son logarítmicas, y no se siguen criterios de forma lineal y directa, como se haría si las escalas no fueran logarítmicas, sino lineales.

Así que hay que tener mucho cuidado cuando se interpretan los resultados de los parámetros si se utiliza el modelo de Rasch.

Según este criterio, la curva de la figura 2, que corresponde a la ecuación (2), es una curva que mide la probabilidad de éxito del estudiante en la pregunta, con un nivel de dificultad medio, ya que delta esta entre -1.5 y 1.5: Esto es:

$$-1.5 \leq \delta = 0.632 < 1.5. \quad (3)$$

Y corresponde a una discriminación al ítem moderada:

$$1 \leq a = 1 < 2.1 \quad (4)$$

Ya que su valor es la unidad, como resultado de simplificar mucho la expresión del modelo de Rasch, descrito por la ecuación (1).

## VI. BREVE COMENTARIO SOBRE EL MODELO LLTM

Según Fischer [12], una expresión del modelo de Rasch con un desarrollo matemático particular, es el modelo LLTM, donde el modelo de Rasch se somete a unas condiciones de frontera específicas, que ahora expresamos por la expresión de la descomposición afín del parámetro de dificultad, como sigue:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p w_{ij} \alpha_j + c, \quad \text{para } i = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Donde hemos supuesto que hay  $k$  preguntas de la prueba o test, y estamos descomponiendo el parámetro de dificultad correspondiente a la  $i$ -ésima pregunta. Aquí Fischer nos comenta que hay varias cantidades nuevas del modelo LLTM que son las siguientes:

- $\delta_i$  es el  $i$ -ésimo parámetro de dificultad.
- $\alpha_j \quad j=1, \dots, p$ . son los parámetros básicos de la descomposición LLTM.
- $w_{ij}$  son los pesos dados de los parámetros básicos.
- $c$  es el parámetro usual de normalización.

De esta forma, el modelo de Rasch se extiende, y se puede decir, que existen varios modelos de Rasch que se van ajustando a las diferentes necesidades, que tenga un investigador en las áreas sociales y de educación.

## VII. CONCLUSIONES, OBSERVACIONES Y COMENTARIOS GENERALES

Hemos visto como se representa gráficamente el modelo de Rasch con las curvas ICC, y hemos discutido su significado. Hemos mencionado también, que el modelo de Rasch es de

suma importancia, para comprender si los estudiantes están adquiriendo los conocimientos deseados, según una prueba, y también hemos mencionado que el modelo se puede utilizar en la validación del mismo cuestionario.

Toda la teoría del modelo de Rasch se conoce como la Teoría de Respuesta a la Pregunta o en inglés “Item Response Theory” (IRT), y actualmente ayuda a los investigadores del campo educativo. Y por sí mismo, el IRT es un campo de investigación abierto, que se ha desarrollado, con varios modelos de Rasch, el aquí mostrado está bastante simplificado, a una dimensión y de forma dicotómica, para poder entender mejor sus propiedades, características y significado.

## AGRADECIMIENTOS

El autor quiere expresar su agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Instituto Politécnico Nacional (IPN), por el apoyo recibido en la realización de este trabajo. También quiere agradecer por el mismo motivo al proyecto de la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) 20200435 “Aplicación de una metodología activa de aprendizaje para la enseñanza de circuitos eléctricos”, y a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) del mismo Instituto.

## REFERENCIAS

- [1] Rost, J., *Chapter 2: The Growing Family of Rasch Models*, en *Essays on Item Response Theory* (Springer)
- [2] Moral-García, F. J., Rebollo, F. J., Terrón, J. M., El modelo de Rasch y la agricultura de precisión. Aplicación al estudio de la fertilidad potencial en una parcela. VI Congreso Ibérico de Agroingeniería del 5 al 7 de septiembre de 2011, Universidade de Évora, Portugal. Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/281454514\\_El\\_modelo\\_de\\_Rasch\\_y\\_la\\_agricultura\\_de\\_precision\\_Aplicacion\\_al\\_estudio\\_de\\_la\\_fertilidad\\_potencial\\_en\\_una\\_parcela](https://www.researchgate.net/publication/281454514_El_modelo_de_Rasch_y_la_agricultura_de_precision_Aplicacion_al_estudio_de_la_fertilidad_potencial_en_una_parcela), consultado el 26 de diciembre de 2019.
- [3] Accinelli, E., Brida, J. G., London, S., *Crecimiento económico y trampas de la pobreza: ¿cuál es el papel del*

*capital humano?* Investigación económica. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0185-16672007000300097](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-16672007000300097), consultado el 19 de diciembre de 2019.

[4] Prieto, G., Delgado, A. R., *Análisis de un test mediante el modelo de Rasch*, Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/28060480\\_Analisis\\_de\\_un\\_test\\_mediante\\_el\\_modelo\\_de\\_Rasch](https://www.researchgate.net/publication/28060480_Analisis_de_un_test_mediante_el_modelo_de_Rasch), consultado el 20 de diciembre de 2019.

[5] Cupani, M., Cortez, F. D., Análisis psicométricos del Subtest de Razonamiento Numérico utilizando el Modelo de Rasch, *Revista de Psicología* (Santiago). Recuperado de [https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0719-05812016000200002](https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0719-05812016000200002), consultado el 21 de diciembre de 2019.

[6] Andersen E. B., Olsen, L. W., *The Life of Georg Rasch as a Mathematician and as a Statistician*, en Boosma, A., van Duijn, M. A. J., Snijders, T. A. B. (Eds.), *Essays on Item Response Theory “Lecture Notes in Statistics 157”*, (Springer-Verlag, Países Bajos, 2001).

[7] Baker, F. B., Kim, S. H., *Chapter 2, Item Characteristic Curves*, en “The Basics of Item Response Theory Using R, Statistics for Social and Behavioral Sciences”, (Springer, Suiza, 2017).

[8] Fischer, G. H., *Chapter 2. Derivation of the Rasch Model*, en Fischer, G. H., Molenaar, I. W., (Eds.) “Rasch Models, Foundations, Recent Developments, and Applications”, (Springer-Verlag, New York, USA, 1995), pp.16-17.

[9] Wickham, H., *ggplot2, Elegant Graphics for Data Analysis, Use R!* 2nd Ed. (Springer International Publishing AG, Suiza, 2016).

[10] CRAN, *The R Project for Statistical Computing*, <https://www.r-project.org>, consultado el 14 de diciembre de 2019.

[11] Baker, F. B., Kim, S. H., *Chapter 1. The Item Characteristic Curve*, en “The Basics of Item Response Theory Using R, Statistics for Social and Behavioral Sciences”, (Springer, Suiza, 2017), pp. 6-11.

[12] Fischer, G. H. *Chapter 8. The Linear Logistic Test Model* en Fischer, G. H., Molenaar, I. W., (Eds.) “Rasch Models, Foundations, Recent Developments, and Applications”, (Springer-Verlag, New York, USA, 1995), pp. 131-132.