

# Estudio del campo de luz cercano y lejano en fuentes de luz esféricas: extensión del experimento clásico de fuentes de luz puntuales

EDVCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

**R. M. Pastor, H. M. Quispe**

*Departamento Académico de Física, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Av. Independencia s/n, Arequipa, Perú.*

**E-mail:** rpastorr@unsa.edu.pe

(Recibido el 22 de octubre de 2021, aceptado el 15 de febrero de 2022)

## Resumen

En el presente trabajo se extiende el tópico recurrente de una fuente de luz puntual al de fuentes de luz esféricas, a través de un simple montaje experimental y el modelamiento de la intensidad de luz como suma de fuentes puntuales. Los resultados muestran que el modelo ajusta notablemente a las mediciones en el campo cercano cuando incluimos una función de respuesta angular del sensor de luz de un smartphone usado como detector de luz. La función de respuesta en forma de coseno modificado resulta ser importante para modelar la iluminancia en la zona de campo cercano. Adicionalmente, las mediciones de iluminancia en el campo lejano son usadas para determinar el flujo luminoso de dos fuentes esféricas, tipo LED, de radios notablemente diferentes, obteniendo discrepancias menores al 3% comparados con los valores nominales, en donde se ha considerado el ángulo de apertura limitado de la fuente de luz.

**Palabras clave:** Fuentes de luz esféricas, intensidad de luz, ley de inverso al cuadrado, sensor de luz de un smartphone.

## Abstract

In the present work, the recurring topic of a point sources of light is extended to spherical sources of light, through a simple experimental setup and the modeling of light intensity as the sum of point sources. The results show that the model remarkably fits to measurements in the near field when we include an angular response function of the light sensor of a smartphone used as a light detector. The response function in the form of a modified cosine turns out to be important for modeling the illuminance in the near field zone. Additionally, far field illuminance measurements are used to determine luminous flux of two spherical sources, LED type, with notably different radii, obtaining discrepancies of less than 3% compared to the nominal values, where the limited opening angle of the light source has been considered.

**Keywords:** Spherical sources of light, light intensity, inverse squared law experiment, smartphone light sensor.

## I. INTRODUCCIÓN

Usualmente el estudio de la intensidad de luz y su dependencia con la distancia, se inicia con el concepto de fuente de luz puntual, el cual restringe la contribución a la intensidad de luz por parte del campo lejano donde la dependencia es correctamente representada por el inverso del cuadrado de la distancia [1, 2, 3]. Una aproximación práctica para reproducir teóricamente el campo cercano de una fuente de luz, es a través de correcciones dependientes de la forma de la fuente de luz [4]. Por otro lado, se puede simplificar un estudio más estricto del campo cercano, considerando a una fuente de luz extendida como un conjunto de fuentes puntuales que contribuyen al campo de luz total en una cierta distancia, de igual forma en la que se construyen los modelos para el campo electrostático [5, 6]. Esta aproximación suele ser más natural al momento de aplicar conceptos fundamentales de física.

El estudio del campo cercano también implica considerar la influencia de la respuesta angular del detector, algo que no

es necesario tomar en cuenta en el campo lejano. En este trabajo se presenta un modelo para el estudio del campo cercano de fuentes de luz esféricas que incluye el efecto del tamaño del sensor y se compara con resultados experimentales fácilmente reproducibles en un laboratorio de enseñanza de pregrado, en la que se aprovecha la gran sensibilidad del sensor de luz ambiental de un smartphone.

## II. MODELO TEÓRICO - FUENTE ESFÉRICA DE LUZ

Los detectores de luz miden la energía entrante a su superficie por unidad de tiempo, a esta cantidad se le denomina Irradiancia [7].

$$E_e = \langle |\vec{S}| \rangle_T, \quad (1)$$

donde  $\langle \vec{S} \rangle_T$  es la magnitud del vector de Poynting promediado en un tiempo  $T$ .

Para calcular la irradiancia debido a una fuente de luz esférica de radio  $R$ , la cual emite energía de forma uniforme, consideramos que está compuesta por elementos diferenciales emisores de energía, a manera de fuentes puntuales. Así, el vector de Poynting está relacionado a  $\vec{P}$ , la potencia radiada promediada en el tiempo  $T$ , a través de  $\vec{P} = \int_{A_s} \vec{n} \cdot \langle \vec{S} \rangle_T dA$ , [8]. Para un radiador puntual, deducimos

que, omitiendo el subíndice  $T$ , el vector de onda promedio está dado por la ecuación 2.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{P}}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (2)$$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda esférica que tiene la forma dada en la ecuación 3 con las coordenadas mostradas en la figura 1 y en función de los vectores unitarios cartesianos.

$$\hat{r} = \frac{-R \sin \theta \cos \varphi \hat{i} - R \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + (z - R \cos \theta) \hat{k}}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta}}. \quad (3)$$

Usando la ecuación 2 escribimos el vector de Poynting promedio total, como una contribución de elementos diferenciales sobre la superficie de la fuente esférica según la ecuación 4.

$$\langle \vec{S} \rangle = \sigma \int_A \frac{dA}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (4)$$

donde  $\sigma = \vec{P}/4\pi R^2$  es la potencia lumínica emitida por la fuente de luz por unidad de área. Considerando las cantidades descritas en la figura 1, el vector de Poynting promedio sobre el punto D debido la fuente esférica de luz está dado por la ecuación 5.

$$\langle \vec{S}(\theta, \varphi, z) \rangle = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_m} \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta} \hat{r}, \quad (5)$$

donde  $\theta_m$  es el ángulo máximo, respecto al eje  $z$ , que permite al sensor ubicado a una distancia  $z$ , “ver” un elemento diferencial sobre la fuente esférica. Este ángulo se encuentra considerando que un rayo proveniente de la máxima elevación sobre la fuente esférica y visto por un punto en el centro del sensor, es tangente a la esfera y cumple la relación  $\cos \theta_m = \frac{R}{z}$ .

Tomando en cuenta la simetría del problema, la componente del vector de Poynting promedio, perpendicular al sensor, es la única que permanece en la solución a lo largo del eje  $z$ . Si

el tamaño del sensor es mucho menor que el tamaño de la fuente de luz, podemos asumir que la mayor contribución a la potencia detectada por el sensor viene dada por esta componente y que es la misma sobre cualquier punto sobre su superficie. Así, integrando sobre estos límites, se tiene el vector de Poynting promedio en puntos sobre el eje de simetría de la fuente de luz esférica (ecuación 6). Esto toma en cuenta que, solo una parte de la potencia radiada es percibida por el detector en el campo cercano.

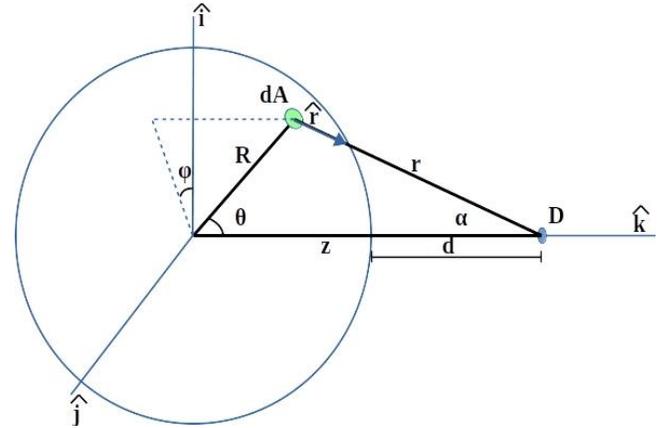


FIGURA 1. Disposición geométrica de un elemento diferencial radiador de energía hacia el detector en el punto D.

$$\langle \vec{S}(0, 0, z) \rangle = \sigma / 2 \left[ \frac{R^2}{z(z-R)} + \frac{R}{z-R} - \frac{R(z^2 + R^2)}{z^2(z-R)} \right] \hat{k}. \quad (6)$$

Sin embargo, los detectores por efecto cuántico como los de semiconductor tiene una respuesta diferente que se puede aproximar a una función coseno modificada [5]. En nuestro caso, el ángulo entre la normal a la superficie del detector y el rayo de luz, crea una dependencia respecto a  $\cos \alpha$ , que usando la relación  $\sin \alpha = \frac{R \sin \theta}{r}$  deducida de la figura 1,

obtenemos una función de respuesta angular del detector dependiente de las coordenadas centradas en la esfera de luz como:

$$f(\theta) = a \frac{z - R \cos \theta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta}} + b. \quad (7)$$

En nuestra aproximación determinamos los coeficientes  $a$  y  $b$  directamente del experimento, para esto, introducimos esta función de respuesta angular en la magnitud del vector de Poynting promedio obteniendo:

$$\langle \vec{S}(0, 0, z) \rangle = \sigma / 2 \int_0^{\theta_m} \frac{R^2 \sin \theta d\theta}{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta} f(\theta). \quad (8)$$

Reemplazando la ecuación 7 en la ecuación 8 e integrando tenemos la solución completa válida para  $z > R$  tal como se ve en la ecuación 9.

$$\langle \vec{S}(z) \rangle = \sigma / 2 \left[ a \left( \frac{R^2}{z(z-R)} + \frac{R}{z-R} - \frac{R(z^2+R^2)}{z^2(z-R)} \right) + b \frac{R}{2z} \ln \left( \frac{z^2-R^2}{(z-R)^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Podemos comprobar en esta expresión, haciendo  $z \gg R$ , que nos proporciona el resultado esperado para una fuente puntual, con el sensor recibiendo a una gran distancia la mitad del flujo radiante promedio  $\bar{P}$ .

$$\langle \vec{S}(z) \rangle \approx \frac{a\bar{P}}{8\pi} \frac{1}{z^2}. \quad (10)$$

Para relacionar este resultado con la respuesta del sensor de luz del smarthphone, debemos considerar que la potencia recibida sobre su área  $A_s$  estará dada por:

$$\bar{P}_s = \left| \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle \right| A_s, \quad (11)$$

donde se ha considerado que la dirección del vector de Poynting varía muy poco sobre el área del sensor. En radiometría esta potencia media es expresada como flujo radiante  $\Phi_e$ , que se relaciona con la irradiancia por

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{ds} \quad [9].$$

Para expresar nuestro resultado en función de la respuesta del sensor, usamos la cantidad fotométrica iluminancia  $E_v$ , medida en unidades de lux y definida como

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{ds},$$

donde  $\Phi_v$  es el flujo luminoso que toma en cuenta la potencia recibida por el sensor, considerando la respuesta espectral de este. Así, obviando las constantes necesarias para conseguir las unidades correctas de  $E_v$ , la respuesta del sensor es modelada en la ecuación 12.

$$E_v = \frac{\Phi_v}{8\pi R^2} \left[ a \left( \frac{R^2}{z(z-R)} + \frac{R}{z-R} - \frac{R(z^2+R^2)}{z^2(z-R)} \right) + b \frac{R}{2z} \ln \left( \frac{z^2-R^2}{(z-R)^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Debido a que solo hemos considerado un hemisferio de la esfera en los límites de integración, el flujo luminoso que percibe el sensor en el campo lejano es sólo  $\Phi_v / 2$ , la mitad del flujo luminoso total.

Podemos reescribir convenientemente esta última expresión para ser usada en el ajuste de nuestros resultados experimentales como:

$$E_v = C_1 f_1(z) + f_2 C_2(z). \quad (13)$$

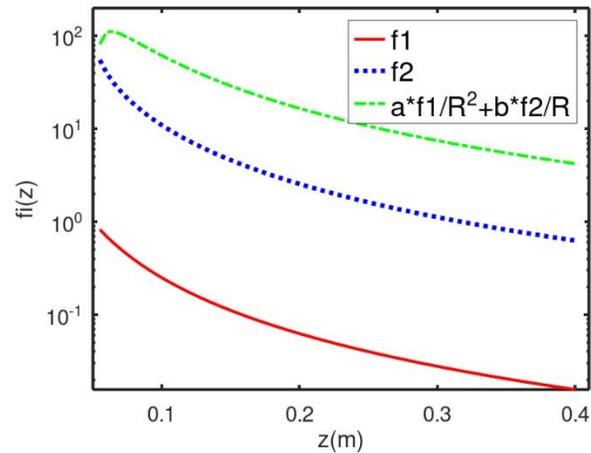
Donde  $C_1 = \frac{\Phi_v a}{8\pi R^2}$  y  $C_2 = \frac{\Phi_v b}{16\pi R}$ . En la figura 2 se muestra

la influencia de cada una de las funciones  $f_1(z)$  y  $f_2(z)$  en la solución, que están dadas por:

$$f_1(z) = \frac{R^2}{z(z-R)} + \frac{R}{z-R} - \frac{R(z^2+R^2)}{z^2(z-R)}, \quad (14)$$

y

$$f_2(z) = \frac{1}{z} \ln \left( \frac{z^2-R^2}{(z-R)^2} \right). \quad (15)$$



**FIGURA 2.** Influencia de cada una de las partes de la solución en el resultado final. Los coeficientes se toman de los resultados experimentales como  $a = 1,32$  y  $b = -0,32$ , considerando que estos deben ser únicos para un sensor de luz dado. En este ejemplo  $R = 5\text{cm}$ .

Según la figura 2, la función total que depende de los coeficientes de la respuesta angular del sensor de luz, tiene un máximo cerca a la fuente de luz esférica, esto es debido en mayor parte a que el coeficiente  $b$  en la segunda solución es negativo. A mayores distancias domina el comportamiento inverso con la distancia. Este resultado muestra que, en la zona del campo cercano, las mediciones experimentales son afectadas por la respuesta angular del sensor de luz y no solo por la geometría de la fuente de luz.

En la figura 3 se presenta el comportamiento de la función de solución  $f(z) = af_1(z)/R^2 + bf_2(z)/R$ , para varios radios de la fuente de luz esférica. Vemos que, para radios grandes, la solución tiene un menor decaimiento, considerando que las fuentes emiten la misma potencia por unidad de área. A grandes distancias, donde se presenta el campo lejano de luz, la dependencia con la distancia tiende a ser la misma independiente del radio de la fuente esférica.

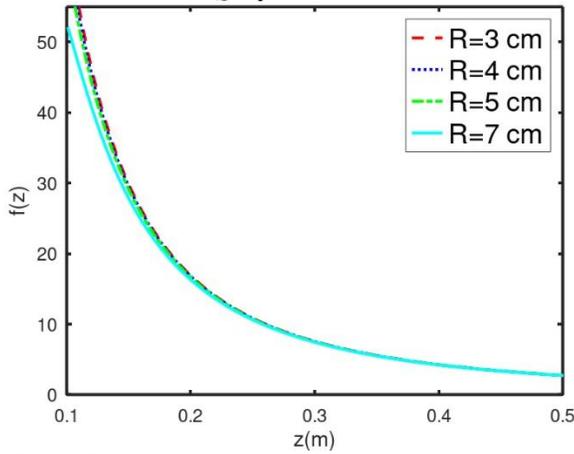


FIGURA 3. Influencia del radio de la fuente de luz esférica en la señal detectada a diferentes distancias del centro de la esfera según el modelo.

### III. MÉTODO EXPERIMENTAL

Para verificar el modelo desarrollado para fuentes esféricas de luz, se han realizado mediciones experimentales con el sensor de luz ambiental de un smartphone Samsung modelo A30s. Se ha trabajado con dos fuentes led esféricas cuyas características se muestran en la tabla 1.

TABLA I. Características de las lámparas esféricas usadas en la parte experimental.

Características	Lámpara LED 1, $R=7.3\text{ cm}$	Lámpara LED 2, $R=2.9\text{ cm}$
Marca	Novalamps	Philips
Modelo	G145 Globe	ESS LEDBulb A60
Potencia	25 W	9 W
Intensidad luminosa	2300 lm	950 lm
Ángulo de Apertura	180°	130°

El montaje experimental se muestra en la figura 4. Se ha tomado especial cuidado en disminuir la reflexión de la luz en las superficies de la sala de medición, lo cual muestra gran influencia sobre todo en la lámpara esférica de mayor radio.

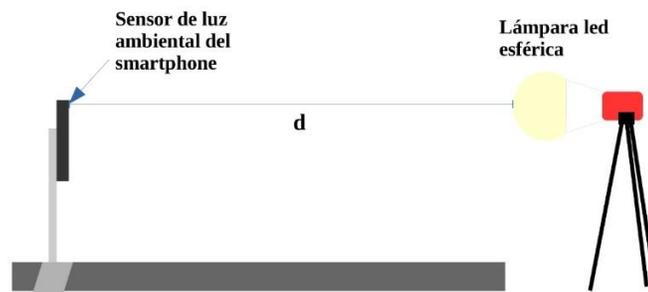


FIGURA 4. Montaje experimental. La superficie del smartphone fue cubierta con un material opaco, cuando se usó cerca a la lámpara grande, para disminuir la retro reflexión.

Los datos son adquiridos con la app libre SPARKvue para Android de la empresa PASCO SCIENTIFIC. Este aplicativo tiene la ventaja de poder ajustar el tiempo de lectura. En cada posición  $d$  respecto a la parte frontal de la lámpara esférica, se ha medido por un tiempo de 10s a una frecuencia de 5 Hz para tomar en cuenta las posibles variaciones debido a las vibraciones en el sistema del montaje experimental y las variaciones de la red eléctrica. Las lámparas esféricas son colocadas en forma horizontal para permitir que el sensor perciba una distribución esférica de luz.

### IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En esta sección se presentan los resultados experimentales de la iluminancia en función de la distancia analizando la validez del modelo desarrollado en este artículo y el de una fuente puntual. Las gráficas se muestran en escala log-log para resaltar, en la comparación, el grado de aproximación de los modelos usados.

Podemos observar en la figura 5, como el modelo de fuente esférica ajusta notablemente en la zona de campo cercano con mayores diferencias en el campo lejano. La diferencia reside básicamente en que los coeficientes de respuesta angular del sensor compensan mejor la respuesta en el campo cercano, justo donde la influencia con el tamaño de la fuente de luz es más importante. Como se puede esperar, el modelo de fuente puntual no presenta un buen ajuste a los datos experimentales en general, sin embargo, en el campo lejano como se ve en la figura 6, el ajuste es muy bueno. Este resultado muestra el grado de precisión que se puede alcanzar con el sensor de luz de un smartphone.

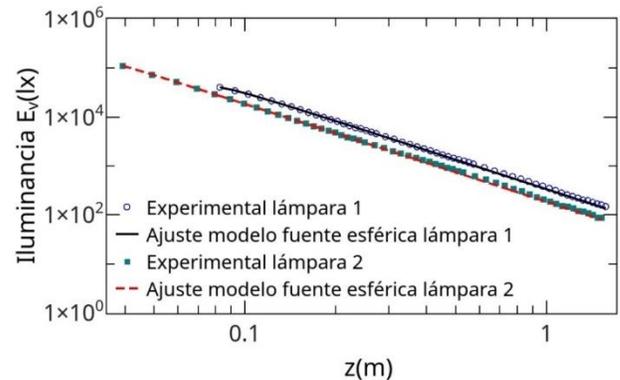


FIGURA 5. Ajuste del modelo de fuente esférica considerando todo el rango de distancias usado para las dos fuentes de luz LED descritas en la tabla 1.

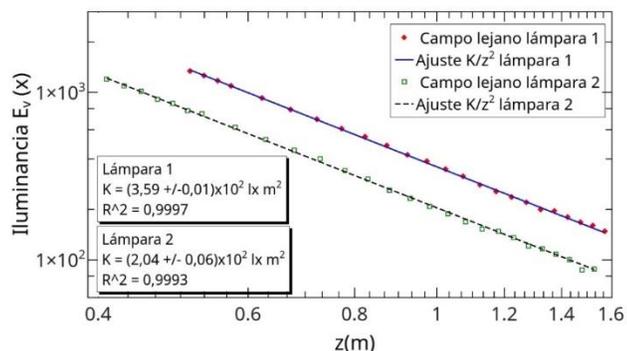


FIGURA 6. Ajuste del campo lejano al modelo de fuente puntual para ambas lámparas.

A. Determinación del flujo luminoso

Es posible también determinar el flujo luminoso de las lámparas a partir de los datos experimentales, analizando los datos de campo lejano en donde el comportamiento se ajusta mejor al de una fuente puntual (figura 6). Con los datos de ajuste usamos la relación entre la iluminancia y el flujo luminoso, que en nuestro caso para fuentes de luz puntuales es:

$$E_v = \frac{\Phi_v}{4\pi z^2} \tag{16}$$

El coeficiente  $K$  de la función de ajuste en la figura 6 es igual a  $\frac{\Phi_v}{4\pi}$ , sin embargo, debemos tomar en cuenta que, las lámparas LED se fabrican con diferentes ángulos de apertura. Así el flujo luminoso se calcula mediante:

$$\Phi_v = 4\pi K \frac{\text{ángulo de apertura}(\circ)}{360\circ} \tag{17}$$

Los coeficientes de ajuste al modelo de fuente esférica de luz y las de la función de respuesta angular del sensor de luz se muestra en la tabla 2.

TABLA II. Resultados del análisis para la determinación de la función de respuesta angular del sensor.

Coefficientes de ajuste	Lámpara LED 1	Lámpara LED 2
C1	$(2,74 \pm 0,031) \times 10^5$	$(8,43 \pm 0,07) \times 10^4$
C2	$(-8,26 \pm 0,37) \times 10^2$	$(-7,44 \pm 0,18) \times 10^2$
a	1,321	1,260
b	-0,321	-0,260
Ángulo máximo de respuesta	75,9°	78,1°

En la tabla 3 se muestra el flujo luminoso determinado de los resultados presentados en la figura 6 y la ecuación 17, con una aceptable discrepancia experimental considerando la simplicidad del sistema experimental usado y que solo se

considera las incertidumbres en el ajuste de datos mas no en la calibración de las lecturas con el sensor. Este resultado muestra que el sistema experimental usado, es bastante útil para su implementación en un laboratorio de enseñanza en pregrado.

TABLA III. Flujo luminoso determinado de los datos de Iluminancia en función de la distancia en la zona de campo lejano para las dos lámparas esféricas usadas en este trabajo.

Resultado	Lámpara 1	Lámpara 2
$\Phi_v$ exp. (lm)	$2253 \pm 6$	$923 \pm 5$
$\Phi_v$ nominal (lm)	2300	950
Discrepancia (%)	2.0	2.8

IV. CONCLUSIONES

El modelo de fuentes esféricas de luz presentado en este trabajo, que considera la contribución de fuentes de luz puntuales provenientes de una fuente extensa de luz, ajusta adecuadamente a mediciones experimentales realizadas con el sensor de luz ambiental de un smartphone. Se observa que antes de presentarse un comportamiento de fuente puntual, el sensor de luz recibe los frentes de onda esféricas de una limitada zona de la fuente de luz esférica generando una compleja funcionalidad con la distancia.

Cuando se incluye la dependencia angular del sensor de luz, la función de respuesta con la distancia, es modulada por los coeficientes de la función de respuesta angular. Esta modulación es responsable de observar una transición pronunciada, cerca de la fuente de luz, de forma prominente en la fuente esférica de mayor radio. Por otro lado, el campo lejano se puede usar, con muy buena confiabilidad, para determinar el flujo luminoso de fuentes esféricas del luz tipo LED que poseen un ángulo de apertura limitado.

REFERENCIAS

[1] Bates, A., *The inverse-square law with data loggers*, The Physics Teacher **51**, 290-291 (2013).  
 [2] Vieira, L. P., Lara, V. O. M. and Amaral, D. F., *Demonstração da lei do inverso do quadrado com o auxílio de um tablet/smartphone*, Revista Brasileira de Ensino de Física **36**, 09 (2014).  
 [3] Anantha Narayanan, V. & Narayanan, R., *Inverse-square law of light with airy's disk*, The Physics Teacher **37**, 8-9 (1999).  
 [4] Wanser, K., Mahrley, S. & Tanner, J., *High accuracy optical inverse square law experiment using inexpensive light to frequency converters*, Physics Education **47**, 174-183 (2012).  
 [5] Yan, X., Yu, Y., Shen, L. & Wanser, K. H., *Near-field far-field transition of a finite line source using incoherent*

R. M. Pastor and H. M. Quispe

light: A student laboratory experiment, American Journal of Physics **63**, 47-53 (1995).

[6] Jacobs, V., Forment, S., Rombauts, P. & Hanselaer, P., Near-field and far-field goniophotometry of narrow-beam led arrays, Lighting Research & Technology **47**, 470-482 (2015).

[7] Hecht, E., *Optics* (Pearson, 5th edition, Harlow 2017).

[8] Papas, Ch. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation* (Dover Publications, New York 1988).

[9] McCluney, R., *Introduction to radiometry and photometry* (Artech House, Norwood 2014).

## APÉNDICE

### Determinación de los coeficientes de la función de respuesta angular del sensor de luz

Usando los coeficientes de ajuste al modelo:

$$C_1 = \frac{\Phi_v a}{8\pi R^2}, \quad (18)$$

y

$$C_2 = \frac{\Phi_v b}{16\pi R}, \quad (19)$$

y dividiendo ambos resultados, tenemos la relación entre los coeficientes de la función de respuesta angular del sensor:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2R} \frac{C_1}{C_2}. \quad (20)$$

Ahora considerando que la función de respuesta será cero en un ángulo máximo  $\alpha_{\max} < \pi/2$ , tenemos que:

$$f(\alpha_{\max}) = 0 = a \cos(\alpha_{\max}) + b, \quad (21)$$

y por lo tanto

$$b = -a \cos(\alpha_{\max}), \quad (22)$$

igualando con la ecuación 20 se determina el ángulo máximo de respuesta angular del sensor,

$$\cos(\alpha_{\max}) = -\frac{b}{a} = 2R \frac{C_2}{C_1}. \quad (23)$$

Así mismo como la función de respuesta debe ser 1 para  $\alpha=0$  los coeficientes de la función de respuesta angular se encuentran mediante,

$$a = \frac{1}{1 - \cos(\alpha_{\max})}, \quad (24)$$

y la ecuación 22, conociendo los coeficientes de ajuste  $C_1$  y  $C_2$ .