

Errores conceptuales y procedurales en la resolución de problemas de cinemática

EDV CATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

G. Mauricio Bastien Montoya¹, Rafael Pérez Flores¹,
Mario A. Mayorga Sánchez¹

¹Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, C. P. 02200 Ciudad de México.

E-mail: gmbm@correo.azc.uam.mx

(Recibido el 4 de diciembre de 2025, aceptado el 19 de febrero de 2025)

Resumen

En los primeros cursos universitarios de física y matemáticas, se observa un gran número de errores cuando el alumnado resuelve problemas. En términos generales, los errores pueden ser: procedurales o conceptuales. Utilizamos una muestra de 74 problemas que fueron resueltos por estudiantes universitarios del primer año de ingeniería para determinar, en su caso, el tipo de error. Básicamente se cometieron 38 errores conceptuales y 45 procedurales. No se cuenta con datos previos a la pandemia para contrastarlos con los actuales, pero en este caso, se observa que los errores aritméticos, algebraicos, geométricos, algorítmicos y, en general, sobre contenidos matemáticos del nivel medio superior, son numerosos. En entrevistas a docentes se evidenció que las dificultades que tiene el alumnado al iniciar su formación en ingeniería se deben, en gran medida, a deficiencias relacionadas con su preparación previa, las cuales son cada vez mayores y repercuten en el diseño curricular de los primeros trimestres o semestres de las carreras de ingeniería.

Palabras clave: Conceptual, Procedural, Errores, Problemas, Cinemática.

Abstract

In the first university courses of physics and mathematics, many errors are observed when the student solves problems. In general terms, errors can be procedural or conceptual. We used a sample of 74 problems that were solved by first-year engineering university students to determine, where appropriate, the type of error. Basically, 38 conceptual errors and 45 procedural errors (algebraic errors) were committed. There is no data from before the pandemic to compare with the current ones, but in this case, it is observed that arithmetic, algebraic, geometric, algorithmic errors and, in general, errors on mathematical content at the high school level are numerous. In interviews with teachers, it is evident that the difficulties that students have when starting their training in engineering are due, mostly, to deficiencies related to their prior preparation, which are increasing and have an impact on the curricular design of the first quarters or semesters of engineering courses.

Keywords: Conceptual, Procedural, Misconceptions, Problem solving, Kinematics.

I. INTRODUCCIÓN

Durante el confinamiento provocado por la pandemia se utilizó la enseñanza en línea a través de dispositivos electrónicos, acostumbrando a los alumnos de los diferentes niveles educativos a trabajar digitalmente. Muchas actividades escolares se llevaron a cabo a través de los teléfonos inteligentes lo que trajo consigo una nueva forma de procesar información [1, 2]. Desafortunadamente, estas nuevas formas de trabajo escolar han tenido efectos negativos en la resolución de problemas. Por ejemplo, Ochs y Sonderegger [3] muestran que existe una correlación directa entre el uso de teléfonos celulares inteligentes y un déficit del quehacer del estudiante durante una clase. Sus resultados sugieren que los estudiantes ocupan más del 19% del tiempo con los móviles en actividades que no están relacionadas con los temas estudiados en clase, lo cual desencadena en dificultades durante los análisis necesarios para resolver problemas. Este hecho puede entenderse como un deficiente desarrollo de procesos de pensamiento para

resolver problemas. Las nuevas formas de procesar información no representan estrategias didácticas que coadyuven con buenos aprendizajes de contenidos escolares.

La modalidad del trabajo escolar a distancia, llevada a cabo durante el confinamiento que experimentamos, ha impactado negativamente en el aprendizaje de contenidos matemáticos en los diferentes niveles educativos. Las instituciones del nivel medio superior no son la excepción. Se ha observado que, en los primeros ciclos escolares universitarios de ingeniería, ha aumentado el nivel de deserción y reprobación [4]; gran parte de esto se debe a la deficiente preparación matemática que tiene el alumnado. Estas características observadas en las instituciones universitarias han generado iniciativas para llevar a cabo diferentes estudios educativos. En este trabajo se realiza un análisis sobre los errores cometidos en la resolución de problemas de física, en especial de cinemática, los cuales hemos clasificado, siguiendo a Rittle-Johnson, como errores conceptuales y procedurales [5, 6]. A continuación, se

enuncia lo que entendemos por errores procedurales y conceptuales:

Errores procedurales. En este trabajo utilizamos la descripción de que el conocimiento procedural se utiliza cuando “Las personas utilizan procedimientos que no están automatizados, sino que requieren selección consciente, reflexión y secuenciación de pasos, como por ejemplo en la resolución de ecuaciones algebraicas” [7]. Los errores algebraicos que encontramos en la resolución de los problemas que analizamos son de este tipo.

Los errores de este tipo están relacionados con los procedimientos y algoritmos utilizados para resolver un problema, son básicamente errores algebraicos; van desde errores en los cálculos aritméticos hasta el despeje de variables de una ecuación, pasando por la falta de dominio del álgebra o la sustitución incorrecta de valores en una ecuación.

Entre los alumnos que han estudiado en la modalidad a distancia, se ha observado que los problemas de álgebra son muy frecuentes [8, 9]. Se observan problemas para resolver expresiones lineales y cuadráticas, para llevar a cabo procesos de factorización, para resolver sencillos sistemas de ecuaciones. Lo anterior se acentúa si, en las expresiones matemáticas, aparecen términos o factores con fracciones [10].

Iniciativas como cursos propedéuticos o programas especiales de asesoría para el alumnado representan un apoyo, para disminuir estos errores. Cabe señalar, en el contexto de cursos propedéuticos, que los procesos de maduración intelectual requieren tiempo; lo que no se ha madurado en diferentes ciclos escolares no se logra madurar en un curso sencillo. Sin embargo, la ayuda de estas iniciativas no es despreciable.

Errores conceptuales. Los errores que se observan en la confusión de conceptos, la falta de estrategia para resolver un problema o en la interpretación de las variables en una ecuación, los clasificamos como errores conceptuales. Son comprensiones erróneas de los conceptos en el modelo del tema en cuestión, es decir, muestran falta de claridad sobre los conceptos físicos involucrados y la forma en que los conceptos se relacionan entre sí. Por ejemplo: utilizar conocimientos de la aceleración para tratar la velocidad; utilizar una fuerza como energía en un sistema o, en el caso de tiro parabólico, confundir las variables de desplazamiento en el eje vertical con las del eje horizontal; escribir valores de variables en una ecuación, sin un sistema de referencia, al igual que igualar variables que sólo en condiciones especiales se pueden igualar, etcétera.

Resolver un problema sin utilizar el Sistema Internacional de Unidades (SI) es considerado como un error conceptual, pues no se identifican múltiplos y submúltiplos de una unidad, desde luego utilizar dimensiones incorrectas también se consideró en esta categoría. En palabras del alumnado, las unidades se consideran como un “añadido (formal) que utilizan los docentes” y no se aprecia que es necesaria la homogeneización de dimensiones y unidades; incluso, en algunos casos, se desconocen las dimensiones de una variable.

Los conceptos son los elementos que, organizados, constituyen un cuerpo de conocimientos de la física y la

matemática, entre otras ciencias. La comprensión de los conceptos implica la correcta interpretación de los datos particulares de un problema, así como la correcta relación con las expresiones operativas (formulas) de los conceptos. Por ejemplo, en la física, se utilizan los conceptos para determinar en qué campo de la física se establece una situación y cuales conceptos específicos se utilizan en esa situación. La relación entre conceptos es fundamental, por ejemplo, en el tema que nos ocupa es necesario conocer que si existe aceleración constante se utilizará una ecuación y si la aceleración es cero, entonces se debe anular el término correspondiente en la ecuación.

Un aspecto especialmente importante es que las primeras materias que cursa un estudiante de ingeniería, se ha observado que cuando una variable no está enunciada explícitamente en un problema, o bien al alumno le cuesta trabajo descubrirla o bien identifica la ausencia explícita de la variable con el valor cero. Este valor lo introduce en las ecuaciones y, por supuesto, después de aplicar el álgebra, algunos términos desaparecen erróneamente de las ecuaciones.

En resumen, los errores conceptuales están relacionados con: el corpus teórico de la física, las leyes, los sistemas físicos, las definiciones, el análisis de situaciones; en cambio, los errores de procedimiento están directamente relacionados con el conocimiento secuencial, con la reflexión sobre el siguiente paso a dar en un despeje algebraico y con la resolución y aplicación de las ecuaciones para resolver un problema.

II PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se aplicó un examen a 37 alumnos de ingeniería del segundo trimestre. El examen consistió de dos problemas diferentes de tiro parabólico por lo que se contó con 74 problemas para determinar, en su caso, qué tipo de error se cometió en la resolución. No se incluye el género del alumnado porque fue un examen de curso y no es necesario conocer esa información para la calificación.

Se realizaron 6 entrevistas a docentes del Tronco General de ingeniería, para conocer sus puntos de vista sobre la situación académica actual de los alumnos de primer ingreso a ingeniería de la zona metropolitana de la Ciudad de México. En el apéndice 2 se muestran tres extractos de estas entrevistas.

Para el análisis de los errores, establecimos la siguiente clasificación, tanto de los errores conceptuales como de los errores procedurales.

A. Clasificación de los errores conceptuales

Falta de sistema de referencia (SR). La evidencia de este error es la ausencia de ejes cartesianos. Pero la importancia es que no queda claro cuál es el SR con respecto al cual se resuelve el problema.

Confusión de variables. Es muy común la confusión entre variables, sobre todo al sustituir en una ecuación, velocidad por aceleración; fuerza por aceleración; velocidad

relativa por velocidad con respecto al SR; velocidad inicial, con velocidad final, etc.

Confusión de la variable posición con desplazamientos o distancia. En problemas de movimiento, el desconocimiento de la definición y funcionamiento de estas variables imposibilita la solución de un problema, aunque el álgebra se lleve a cabo sin errores.

TABLA I. Resultados de porcentaje de errores.

		Errores conceptuales	Errores procedurales	Total de errores
Alumnos aprobados	15 (40%)	11 (29%)	12 (26%)	23 (28%)
Alumnos no aprobados	22 (60%)	27 (71%)	33 (74%)	60 (72%)
Total	37	38	45	83

Confusión entre ecuaciones a utilizar. En cinemática es usual que se confundan las ecuaciones porque los alumnos buscan determinar la “fórmula que resuelve el problema”.

Incapacidad de interpretar el texto del problema. Este error está asociado a una lectura incorrecta. La mayoría de las veces no se logra entender cuál es la incógnita y no se pueden extraer los valores de algunas variables matemáticas cuando se expresan con palabras. Es la incapacidad de asociar variables enunciadas textualmente con variables matemáticas.

Formulismo ingenuo. Es utilización de fórmulas correctas, pero que no reflejan la situación planteada en un problema; por ejemplo, se pide una altura intermedia y se utiliza la fórmula de la altura máxima, porque es la que contiene la variable altura. Esta es nuevamente otra cara de determinar la “fórmula que resuelve el problema”.

B. Clasificación de los errores procedurales

Errores de álgebra. En este amplio tipo incluimos la mayor parte de los errores matemáticos. Nos referimos a una falta de conocimiento del álgebra. La mayoría de los alumnos los comete a lo largo de la resolución de los problemas. Despeje de términos, factorización, resolución de un sistema de ecuaciones, también aquí incluimos errores de aritmética, etc.

Transliteración. Este tipo de error consiste en modificar términos en el desarrollo, quitar puntos decimales, desaparecer variables, etc. Son como los errores de álgebra, pero van más allá, pues muestran de un descuido en el planteamiento del álgebra en donde ni siquiera es importante conservar las mismas cantidades o variables de un paso algebraico a otro.

Secuenciación y reflexión. Es el tipo de error que ocurre cuando no se realiza el siguiente paso lógico en un despeje.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Después de detectar los errores que se cometieron en los problemas, se distinguieron 45 errores procedurales y 38 errores conceptuales, 83 errores en total. En algunos problemas se detectaron más de un error mientras que en otros no se detectaron errores.

De los 74 problemas, 23 fueron resueltos correctamente (31%), y 51 fueron resueltos de manera errónea (69%). Aproximadamente, 3 de cada 10 problemas estuvieron bien resueltos. En la siguiente tabla se muestran los errores tanto en los alumnos que aprobaron el curso como en los alumnos no aprobados (los problemas planteados a los alumnos se muestran en el Apéndice 1).

Como se puede apreciar en la Tabla I, en los 30 ejercicios de los 15 alumnos aprobados se detectaron 23 errores, el 28% del total de los errores, y en los 44 ejercicios de los 22 alumnos que no aprobaron se detectaron 60 errores, el 72% del total de los errores. Como era de esperarse, el número de errores en el conjunto de alumnos no aprobados es mucho mayor, en proporción, que en el conjunto de los aprobados.

Con relación al análisis individual de los errores conceptuales y procedurales se observa lo mismo: el número de errores conceptuales en el conjunto de alumnos no aprobados es mucho mayor, en proporción, que en el conjunto de los aprobados, y el número de errores procedurales en el conjunto de alumnos no aprobados es mucho mayor, también en proporción, que en el conjunto de los aprobados.

Algunos errores clasificados como conceptuales no tuvieron incidencia en la correcta solución del problema; por ejemplo, la falta de especificación del sistema de referencia, dado que el problema estaba planteado sin movimiento relativo; la confusión entre distancia y desplazamiento, pues en algunos casos el desplazamiento era positivo y se puede igualar con la distancia, sin repercusiones en la correcta solución numérica del problema.

Los problemas que se plantearon a los alumnos fueron equivalentes, desde el punto de vista de la física y las matemáticas empleadas para resolverlos, en ambos casos se requería manejar las ecuaciones de movimiento y utilizar al menos dos ecuaciones diferentes, con los resultados de una de ellas sustituidos en otra. Fueron problemas que en lo general no plantearon problemas de comprensión del enunciado, en el problema del bombero se realizó un pequeño dibujo en el pizarrón para mayor comprensión del enunciado.

IV. CONCLUSIÓN

El primer punto que se observa es que se cometen más errores procedurales que conceptuales, lo cual ocurre tanto con los alumnos aprobados, como con los no probados. Además, si tomamos en cuenta que el índice de reprobación ha aumentado en los últimos años, estamos viendo un “corrimiento” de las dificultades de los alumnos hacia aspectos operativos lo que es una muestra del decaimiento

de la calidad de la enseñanza preuniversitaria y del relajamiento del nivel matemático requerido para seleccionar a los alumnos de primer ingreso a una licenciatura en ingeniería.

Esto significa que para trabajar con el mismo nivel matemático que se ha utilizado desde hace años, es necesario ofrecer cursos propedéuticos para alumnos de primer ingreso, distinguiendo bien las necesidades de cada alumno, pues no son las mismas como ya se mostró en la aplicación de un examen diagnóstico [11] aplicado en la Universidad durante 6 años y que distinguía a los alumnos en dos clases, los que cometían errores de álgebra y los que prácticamente no cometían errores. Como se mencionó anteriormente, no se debe olvidar que los procesos de maduración intelectual (procesos de aprendizaje) requieren un tiempo; lo que no se ha aprendido en diferentes ciclos escolares, principalmente en ciclos de la educación media superior, no se logra aprender en un curso propedéutico. Sin embargo, el apoyo de estos cursos no es despreciable. Se cuenta con una experiencia en la cual el curso propedéutico en matemáticas no logró que el alumnado terminara con un buen nivel de conocimientos en álgebra. Sin embargo, el curso propedéutico trajo como consecuencia una caída del nivel de deserción muy bajo [11].

En las entrevistas con docentes, como ya se mencionó, se puso de manifiesto que los errores procedurales (algebraicos) son cada vez más numerosos y que si bien siempre han estado presentes, ahora son más frecuentes. El énfasis en la enseñanza 20 años atrás era en el conocimiento y comprensión conceptual, ahora se ha trasladado a verificar que haya una correcta comprensión matemática. Esto significa contar con menos tiempo para la exposición conceptual del nuevo material.

Los docentes consideran que en pandemia, se regresó a un modelo que los profesores de física intentaron eliminar en años anteriores; se trató de erradicar la idea de que “a cada problema de física corresponde una fórmula que lo resuelve”. Se pensó que ya se había superado, pero en la actualidad está más presente que nunca; incluso, algunos alumnos se sorprenden de que “se pierda el tiempo” tratando de deducir una “fórmula” si ésta se encuentra en algún libro o internet, lo mismo si se detalla alguna referencia histórico-científica acerca de algún tema pues se considera inútil. Al parecer muchos alumnos desean conocer las fórmulas para resolver los problemas, sin rodeos; y todo lo que se desarrolla alrededor es pérdida de tiempo.

En las entrevistas exploratorias previas con los alumnos surgieron algunas preguntas que siempre han sorprendido a los docentes pero que ahora están planteadas en un nivel de reclamo por parte de los alumnos, por ejemplo: ¿Por qué no se puede usar directamente la fórmula que resuelve el problema?, ¿Por qué no puedo utilizar Wolfram u otro software para resolver ecuaciones? Quizás, en breve, la pregunta protagonista será ¿por qué no puedo utilizar algún chat de inteligencia artificial para resolver un problema?

Creemos que esto tiene que ver con el aumento de la utilización de dispositivos digitales [1,3]. Como ya se expuso, los alumnos de diferentes niveles educativos se acostumbraron a trabajar digitalmente, muchas actividades escolares dieron pie a diferentes formas de trabajo lo cual ha

provocado una nueva forma de procesar información. No es de extrañar observar la postura del formulismo ingenuo. La tendencia es concentrarse en utilizar fórmulas; si todo se encuentra en internet, entonces “pensar” y reflexionar sobre la forma de resolver problemas se ha vuelto una actividad que no tiene nada que ver con los procesos de pensamiento que el alumnado experimenta durante las horas consumidas ante un teléfono inteligente, horas poco formativas. En la actualidad, se puede afirmar, a partir de los conceptos expresados en las entrevistas, que entre alumnos y profesores existen grandes diferencias sobre la concepción del aprovechamiento académico; el alumno actúa de un modo en la vida real, utilizando apoyos digitales, que incluso le evitan pensar y reflexionar, radicalmente diferente a lo que espera el docente.

En este trabajo quisimos poner de manifiesto que las dificultades ahora están más del lado procedural, que tiene que ver con la preparación previa del alumno, sobre todo en álgebra, geometría, trigonometría e incluso aritmética. Difícilmente un docente puede abarcar todos los aspectos de la falta de preparación, pero al menos puede mostrarle a los alumnos que tienen este tipo de desventajas que deben superar.

Entre los retos más urgentes están los de lograr aprendizajes de calidad durante los ciclos escolares previos al inicio de la formación universitaria; así como delinear los elementos pedagógicos deben estar presentes en las estrategias didácticas del profesorado universitario que coadyuven con el desarrollo del pensamiento del alumnado ante la realidad actual. La labor no es fácil, es una realidad que ahora toca enfrentar a los docentes universitarios.

REFERENCIAS

- [1] Mohammadi, M., Sarvestani, M., y Nouroozi, S., *Mobile Phone Use in Education and Learning by Faculty Members of Technical-Engineering Groups: Concurrent Mixed Methods Design*, *Frontiers in Education* **5**, 16 (2020).
- [2] Peramunugamage, A., Ratnayake, U. y Karunanayaka, S., *Systematic review on mobile collaborative learning for engineering education*, *Journal of Computers in Education* **10**, 83-106 (2022).
- [3] Ochs, C. y Sonderegger, A., *What Students Do While You Are Teaching –Computer and Smartphone Use in Class and Its Implication on Learning*, 18th IFIP Conference on Human-Computer Interaction (INTERACT), pp.501-520 (2023).
- [4] Geisinger, B. y Raman, R., *Why They Leave: Understanding Student Attrition from Engineering Majors*, *International Journal of Engineering Education* **29**, 914-925 (2013).
- [5] Schneyder, M., Stern, E., *The Developmental Relations Between Conceptual and procedural Knowledge: A Multimethod Approach*, *Developmental psychology* **46**, 178-192 (2010).
- [6] Rittle-Johnson, B. & Schneider, M., *Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics*. In R. C. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118). (Oxford University

Press, UK, 2014) <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>

[7] Star, J. R. & Newton, K. J., *The nature and development of expert's strategy flexibility for solving equations*, ZDM Mathematics Education **41**, 557–567 (2009). doi: 10.1007/s11858-009-0185-5.

[8] Padilla, E., Quesada, C. y Ortiz, L., *Principales Errores en el Aprendizaje del Cálculo en Estudiantes de Formación Inicial en la Educación a Distancia*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **32**, 268-278 (2019).

[9] Saucedo, G., *Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad*, Itinerarios educativos **1**, 22-43 (2007).

[10] Caballero, E. y Juárez, J., *Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad*, Números: revista de didáctica de las matemáticas **91**, 33-56 (2016).

[11] Estadísticas de la División de CBI, 2017. UAM Azcapotzalco.

APENDICE I. PROBLEMAS DE EXAMEN DE TIRO PARABÓLICO

1.- Un basquetbolista lanza la pelota con una cierta velocidad inicial, como se muestra en la fig. 1 y acierta a la canasta que se encuentra a una distancia $D = 8.5$ m. El ángulo de salida es de 50° . Determina el tiempo necesario para alcanzar por primera vez la altura de 3.05 m.

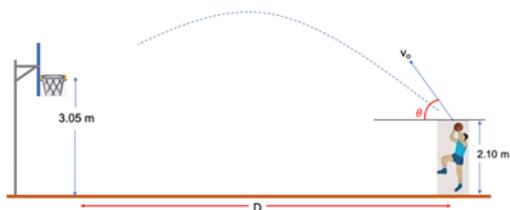


FIGURA 1.

2. Para apagar el fuego en un departamento, un bombero apunta un chorro de agua, que sale de la manguera sostenida por el bombero a 40 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. El agua choca contra una ventana del edificio. La ventana está a 16 m sobre el piso. Si chorro llega después de alcanzar su altura máxima:

- Calcula la distancia horizontal “d” a la cual se encuentra el bombero del fuego.
- Determina la velocidad con que impacta el agua al edificio.

APENDICE II. EXTRACTOS DE ENTREVISTAS A LOS PROFESORES

Entre las preguntas planteadas, las respuestas siguientes son de la pregunta: “Cómo describiría las características de los estudiantes de primer ingreso, después de la pandemia”

Profesor 1

“Se nota claramente que hubo una disminución en la preparación de matemáticas y física en los alumnos; ya no pueden recordar relaciones sencillas como segundos en un día, fórmulas para encontrar el volumen o superficie de una esfera, no se diga las funciones trigonométricas. Se recurre demasiado a las calculadoras y al internet, el problema es que no pueden tener un pensamiento lineal, porque se ve interrumpido constantemente por las consultas a la calculadora o a los programas que resuelven el álgebra básica. En este último punto hay que poner mucha atención porque no manejan el álgebra básica. Sin el celular les cuesta mucho trabajo hacer un cálculo y regularmente lo hacen mal.”

Profesor 2

“Creo que desde antes de la pandemia existían deficiencias dentro del trabajo físico y matemático de los estudiantes. Sin embargo, estos problemas se acentuaron a raíz del confinamiento porque se perdió un poco la práctica y estudio de diferentes temas más allá de las horas de clase. Gran parte de los estudiantes se limitaron a recibir sus clases de manera remota e intentar identificar las ideas principales para buscarlas en internet sin relacionarlas con los conceptos involucrados. Particularmente, los procesos algebraicos representan un gran reto para los estudiantes, ya que incluso expresiones sencillas como alguna ecuación lineal les son muy difíciles de analizar.”

Profesor 3

“Ahora los estudiantes dependen mucho de calculadoras para realizar operaciones y esto, entre muchas desventajas, no favorecen el desarrollo de procesos simples de pensamiento. Además de dificultades con contenidos de la educación secundaria y media superior, se presentan dificultades con procesos de razonamiento como por ejemplo, resolver desigualdades con expresiones cuadráticas y racionales sencillas. A pesar de haber estudiado geometría analítica, el bosquejo de la gráfica de una recta o parábola se les dificulta mucho. El alumnado espera recetas y fórmulas para resolver problemas, no se esfuerza por determinar soluciones a partir de las ecuaciones básicas del campo en cuestión, busca, en su mayoría fórmulas.”