

# Tráfico de vehículos con autómatas celulares



**Ramón Sebastián Salat Figols**

*Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional. Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Edificio 9, San Pedro Zacatenco, C.P 07730 México, D.F.*

**E-mail:** rsalat@esfm.ipn.mx

(Recibido el 15 de Diciembre de 2013, aceptado el 28 de Marzo de 2014)

## Resumen

En este trabajo se analiza el comportamiento del modelo de Nagel y Schreckenberg de autómatas celulares para el tráfico de vehículos en un solo carril. Se observa que el modelo, en general, explica bien el tráfico de vehículos; se hace notar que las aceleraciones de los vehículos que predice el modelo están fuera del rango de los valores que se encuentran en la práctica. Se propone un nuevo modelo para resolver este problema y se estudia su comportamiento.

**Palabras clave:** Autómata celular, tráfico de vehículos, simulación de Monte Carlo.

## Abstract

The behavior of cellular automaton model of Nagel and Schreckenberg for vehicle traffic in a single lane, is analyzed in this paper. It is observed that the model generally explain well vehicular traffic, it is noted that the accelerations of the vehicles that are predicted by the model are outside the range of values found in practice. A new model to solve this problem is proposed and its behavior is studied.

**Keywords:** Cellular automaton, traffic flow, Monte Carlo simulation.

**PACS:** 05.10.Ln, 07.05.-t, 07.05.Tp, 07.70.-c

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

En 1992, Nagel y Schreckenberg [1], presentan un modelo para el tráfico de vehículos en una autopista de un solo carril. En el modelo, se divide el tiempo en pequeños intervalos iguales y en cada uno de ellos, se actualizan las posiciones y las velocidades de los vehículos simultáneamente. Se supone que la autopista tiene un solo carril y que está dividida en celdas iguales, de tamaño tal, que en cada una de ellas a lo más cabe un vehículo. Se define el espacio entre dos vehículos consecutivos,  $esp$ , como el número de celdas vacías que hay entre los dos. Si  $v$  es la velocidad de un vehículo cualquiera al inicio de un intervalo de tiempo, entonces su velocidad al inicio del siguiente intervalo de tiempo se calcula de acuerdo a las siguientes reglas:

- 1) Si  $v < v_{max}$  y  $v < esp$ , entonces la velocidad del vehículo al inicio del siguiente intervalo de tiempo será  $v+1$ .
- 2) Si  $v > esp$ , entonces la velocidad del vehículo al inicio del siguiente intervalo de tiempo será  $esp$ .
- 3) Se genera un número aleatorio  $r$ , entre 0 y 1. Si  $r < p$ , donde  $p$  es algún número constante, también entre 0 y 1, entonces la velocidad del vehículo al inicio del siguiente intervalo de tiempo será  $v-1$ .
- 4) El vehículo avanza  $v$  celdas hacia adelante.

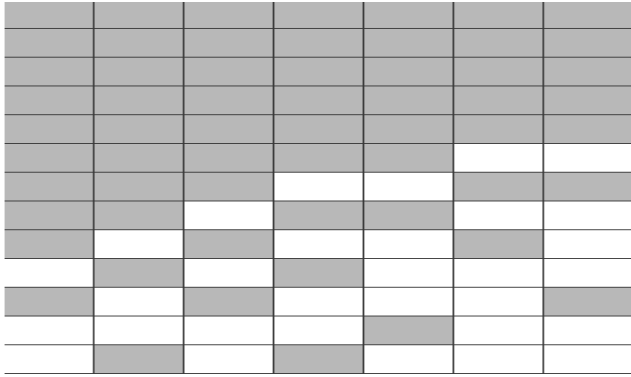
La cuarta regla, otorga un carácter aleatorio al fenómeno.

El algoritmo dado por las reglas de 1 a 4 puede ejecutarse en una hoja de cálculo con el fin de poder observar detalladamente cómo opera, por ejemplo, para fines didácticos. Si se ponen las velocidades y las posiciones iniciales en las columnas D y E, se pueden utilizar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} F2 &:= E3 - E2 - 1 \\ G2 &:= \text{IF}(Y(D2 < \$A\$3, D2 < F2), D2 + 1, D2) \\ H2 &:= \text{IF}(G2 > F2, F2, G2) \\ I2 &:= \text{IF}(\text{AND}(\text{RANDOM}() < \$A\$2, H2 > 0), H2 - 1, H2) \\ J2 &:= I2 = J2 + E2 \end{aligned} \quad (1)$$

Estas fórmulas deben colocarse en la fila 2 y reproducirse hacia abajo. La primera fórmula calcula el espacio entre dos vehículos; la segunda, la tercera y la cuarta, aplican las reglas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. El uso de la hoja de cálculo tiene la ventaja de que pueden analizarse de manera minuciosa los primeros movimientos de los vehículos, utilizando, por ejemplo, el formato condicional de las celdas. En la figura 1, se observan las posiciones de 10 vehículos durante 7 intervalos de tiempo. Cada columna contiene las posiciones de los vehículos en un instante de tiempo y la columna siguiente a la derecha, contiene las

posiciones en el siguiente instante de tiempo. Las celdas sombreadas corresponden a las que están ocupadas por un vehículo.



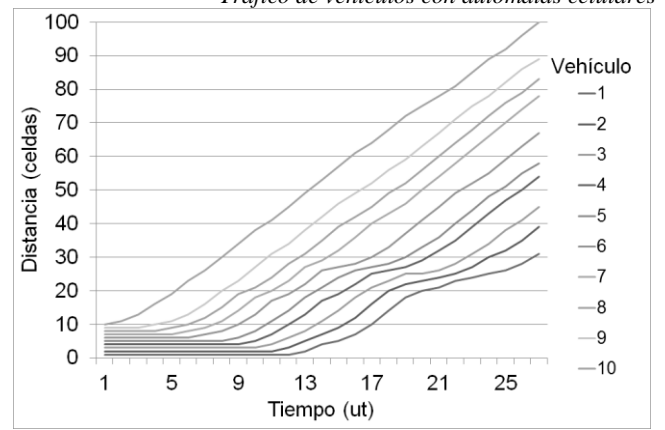
**FIGURA 1.** Posiciones de 10 vehículos durante 7 intervalos de tiempo. El movimiento es hacia abajo.

En la Figura 2, se presenta la gráfica de la posición contra el tiempo de diez vehículos; en ella puede observarse la formación de un congestionamiento, aproximadamente a 25 celdas del origen. Alrededor de este punto puede observarse que la velocidad de los vehículos baja considerablemente. Este fenómeno es consecuencia del carácter estocástico del modelo, que introduce la regla 3.

En todas las simulaciones que se efectúan en adelante, se supone que los vehículos se mueven en una circunferencia de longitud  $L$ . Tomando  $L$  grande comparado con las posiciones iniciales de los vehículos, estamos aproximadamente, en un sistema abierto, no acotado.

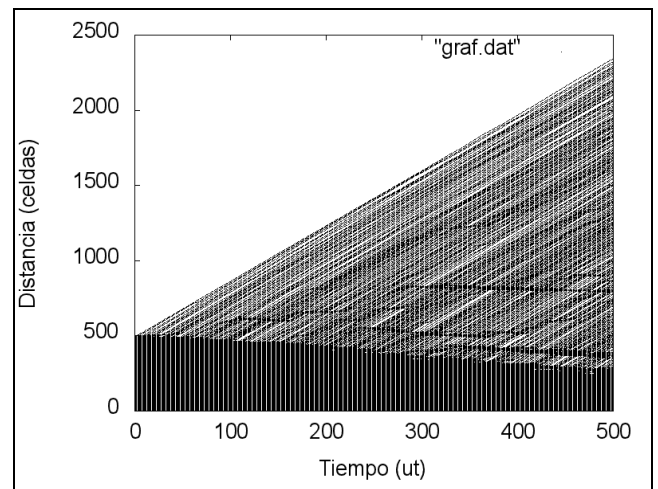
En la Figura 3 puede observarse las posiciones contra el tiempo, obtenidas por simulación, de 500 vehículos, durante 500 intervalos de tiempo. La velocidad máxima, se consideró de  $5 \text{ celdas/unidad de tiempo}$  y  $p=0.3$ . Los 500 vehículos se colocaron inicialmente uno tras de otro, sin espacio entre ellos y con velocidad cero.  $L$  se tomó como  $100,000 \text{ celdas}$ . La simulación se realizó con un programa en C++. Es importante aclarar que es usual en los artículos de simulación de tráfico de vehículos con autómatas celulares, invertir el sentido del eje  $t$  e intercambiar los ejes de posición y tiempo. En este artículo, se consideran a los ejes de posición y tiempo como es usual durante el estudio de la mecánica.

Uno de los aspectos importantes para validar el modelo es la relación entre el flujo y la densidad que produce. La densidad en una celda durante un intervalo de tiempo de longitud  $T$  se define como el número de instantes en los que la celda está ocupada por un vehículo, dividido entre  $T$ . Y se define al flujo en una celda en el mismo intervalo de tiempo, como el número de vehículos que pasan por la celda durante el intervalo de tiempo, dividido entre  $T$ .



**FIGURA 2.** A una distancia aproximada de 25 celdas, se observa un congestionamiento que afecta a los últimos cinco vehículos.

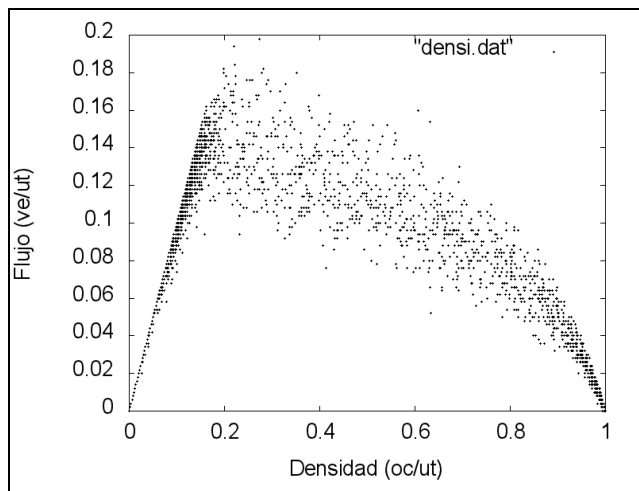
Se simuló el movimiento de 500 vehículos, con  $v_{\max}=5 \text{ celdas/ut}$ ,  $p=0.3$  y  $L=100,000 \text{ celdas}$ , 100,000 veces; en cada una de ellas se seleccionó una celda aleatoriamente y se tomaron mediciones de la densidad y del flujo. En la figura 4 se muestran los resultados.



**FIGURA 3.** Entre las distancias de 500 y 1000 celdas se observan varias líneas oscuras con pendiente negativa, que representan congestionamientos que se propagan hacia atrás.

Otro aspecto importante de la validación es otorgar valores a los parámetros para producir resultados consistentes con los que se obtienen en el tráfico de vehículos. Nagel y Schreckenberg [1], consideran al tamaño de la celda como de  $7.5 \text{ m}$ , el tiempo entre dos instantes consecutivos como de  $1 \text{ s}$ . Con éstos valores, la simulación generada produce valores para la velocidad media alrededor de  $4.5 \text{ celdas/unidad de tiempo}$ , que se convierte en  $120 \text{ km/h}$ , lo cual, es razonable.

Sin embargo, la regla número 2 ocasiona que existan desaceleraciones de  $-4 \text{ celdas/ut}^2$ , que se convierte en  $-30 \text{ m./s.}^2$ . Según Kumar y Shidhar [2], la máxima desaceleración (en valor absoluto) observada para un auto en una autopista es de  $-1.625 \text{ m./s.}^2$ , cuando su velocidad está entre 98 y 100 km/hr. La aceleración máxima producida por el modelo es de  $1 \text{ celdas/ut}^2$ , que se convierte en  $7.5 \text{ m./s.}^2$ . Según Mehar, Chandra y Velmurugan [3], la máxima aceleración observada en una autopista es de  $2.5 \text{ m./s.}^2$ . Como puede observarse los datos proporcionados por el modelo en cuanto a las aceleraciones mínima y máxima, se alejan bastante de los valores observados.



**FIGURA 4.** Para valores pequeños de la densidad, el flujo aumenta en forma lineal con la densidad. Pero cuando el flujo toma su valor máximo, entonces éste disminuye al aumentar la densidad. Esta propiedad está en congruencia con los datos reales.

## II. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL MODELO

La regla número 2 del modelo, no permite velocidades superiores al espacio entre el vehículo y el que esté enfrente, provocando disminuciones bruscas de velocidad. La idea es proponer un modelo en el que la velocidad solo pueda cambiar en una unidad de un instante de tiempo al siguiente.

Supongamos que entre dos instantes consecutivos de tiempo, la velocidad solamente puede disminuir en una unidad. Si la velocidad en el primer instante de tiempo es  $v$ , en el segundo  $v-1$ , en el tercero  $v-2$ , ..., etc. Después de  $v+1$  instantes de tiempo, la velocidad será 0, y el vehículo habrá recorrido una distancia  $v+(v-1)+\dots+(v-(v-1))$ , es decir,  $(v^2+v)/2$ . Ésta es la distancia que requiere el vehículo con velocidad  $v$  para detenerse si en cada lapso de tiempo, disminuye en una la velocidad. Además, el tiempo que tarda en detenerse es  $v-1$ . Si un vehículo disminuye la velocidad de una unidad

en una unidad, para no chocar con un objeto a una distancia  $d$ , debe cumplir la condición  $(v^2+v)/2 < d$ . Bajo estas consideraciones, se propone el siguiente modelo:

- 1) Si  $v < v_{\max}$  y  $v^2+v < 2esp$ , entonces  $v$  se incrementa en 1.
- 2) Si  $v^2+v > 2esp$ , entonces  $v$  disminuye en 1.
- 3) Si  $r < p$ ,  $v > 0$  y  $v$  no disminuyó en 2,  $v$  disminuye en una unidad.

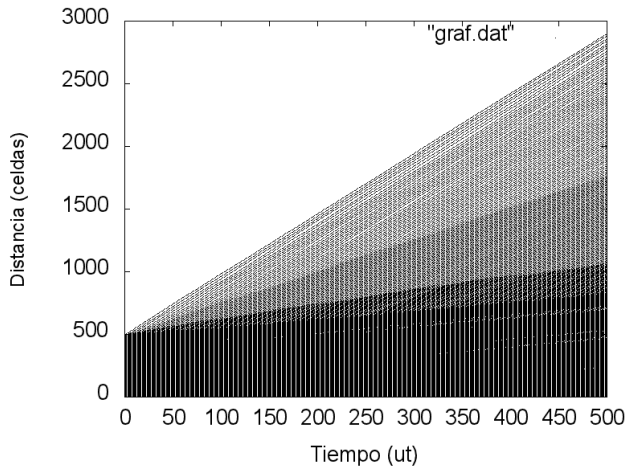
La hoja de cálculo es un instrumento útil para comparar el comportamiento de los dos modelos. En una hoja de cálculo se programaron los dos modelos utilizando  $p=0.3$  y  $5 \text{ celdas/unidad de tiempo}$  como velocidad máxima, y se compararon los comportamientos de ambos, para el caso en que un vehículo se encuentra inicialmente en la posición cero, y en una posición igual a 100, hay otro vehículo detenido. En la tabla 1 se presentan las posiciones y velocidades obtenidas por los dos modelos, considerando los siete últimos intervalos de tiempo. Como puede observarse, con el modelo NaSch, hay una fuerte disminución de la velocidad del intervalo 5 al 6; esto no ocurre con el modelo propuesto.

**TABLA I.** Tamaño promedio de partículas como función de la molienda

Tiempo	Modelo NaSch		Modelo alternativo	
	Vel.	Pos.	Vel.	Pos.
0	5	78	5	80
1	4	82	5	85
2	4	86	4	89
3	5	91	4	93
4	4	95	3	96
5	4	99	2	98
6	0	99	1	99
7	0	99	0	99

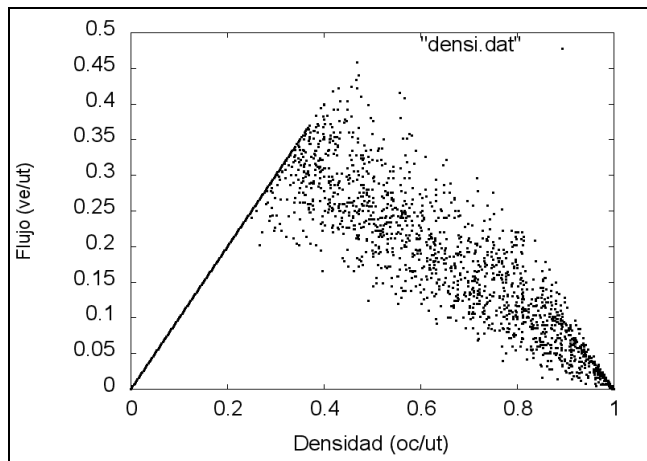
En la figura 5, se observan las posiciones de 500 vehículos, durante 500 intervalos de tiempo. Se tomaron  $p=0.3$  y  $5 \text{ celdas/unidad de tiempo}$  como velocidad máxima. Si se comparan las gráficas de las figuras 3 y 5, se observa que en 3 aparecen congestionamientos, que avanzan hacia atrás, mientras que en 5, no se observan o son menos notorios; pero ésta aparente diferencia de comportamiento solamente se da cuando  $L$  es grande comparado con  $nv$ . En general, con éste modelo, el tráfico se observa más uniforme; existen varias zonas de diferente densidad, que se van expandiendo durante el arranque de los vehículos. Con el primer modelo, la velocidad media fue de  $4.71 \text{ celdas/ut.}$ , mientras que con el segundo fue de  $4.42 \text{ celdas/ut.}$  Estos valores se obtuvieron simulando el movimiento de 500 vehículos desde  $t=2000 \text{ ut}$  hasta

$t = 2500 ut$  y calculando la velocidad media; éstas simulación se repitieron, y se promediaron los valores obtenidos.



**FIGURA 5.** Se observan franjas de diferente densidad que se van expandiendo.

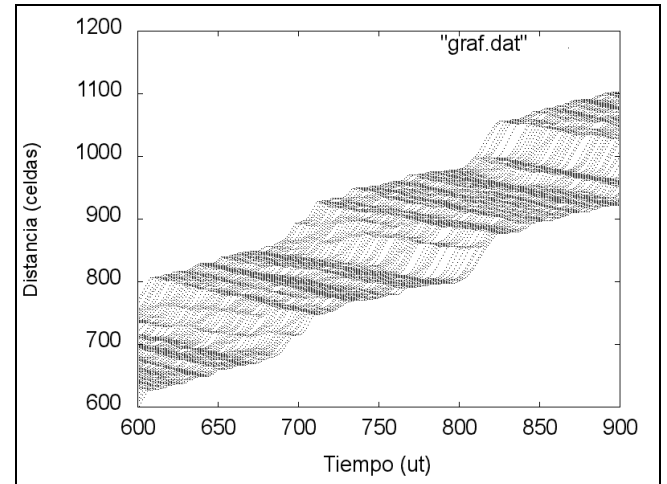
Simulando el movimiento de 500 vehículos, con  $v_{\max} = 5 \text{ celdas/ut}$ ,  $p = 0.1$  y  $L = 100,000 \text{ celdas}$ , 10,000 veces, se obtuvo la figura 6. Se observa, que en comparación con la figura 4, el flujo máximo es mayor y se produce en un valor de la densidad mayor que en 4.



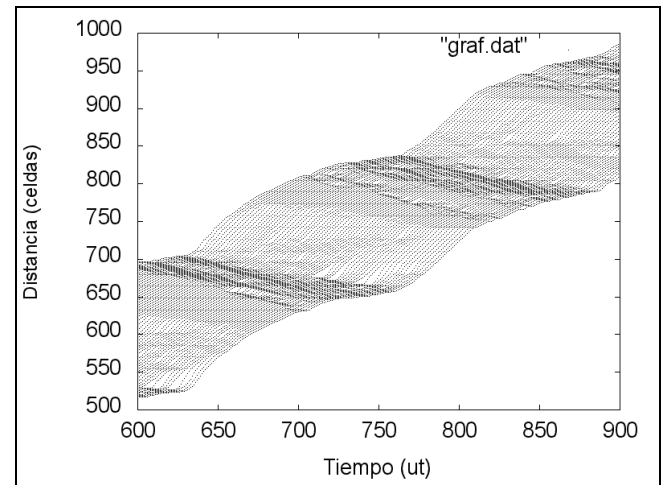
**FIGURA 6.** El comportamiento en cuanto a la relación entre el flujo y la densidad es similar al observado en la figura 4.

Si consideramos el tamaño de la circunferencia  $L$  un múltiplo pequeño del número de vehículos  $nv$ , por ejemplo,  $L = 3nv$ , con ambos modelos podemos observar congestionamientos periódicos. Considerando  $nv = 60$ ,  $L = 180 \text{ celdas}$ ,  $t_0 = 600$  y  $t = 900$ , se obtuvieron las gráficas de las figuras 7 y 8 para el primer y para el segundo modelo, respectivamente. Como era de esperarse,

en la gráfica de la figura 8 los cambios de velocidad son menos bruscos que en la gráfica de figura 7. Con ambos modelos se observan congestionamientos periódicos que avanzan hacia atrás; con el segundo modelo, los congestionamientos son menos frecuentes.



**FIGURA 7.** Se observa la formación de congestionamientos periódicos que avanzan hacia atrás.



**FIGURA 8.** Al igual que en la figura 7, se observan congestionamientos que avanzan hacia atrás, pero con menor frecuencia.

### III. CONCLUSIONES

El modelo de Nagel y Schreckenberg explica diversas características del flujo vehicular en autopistas, pero produce desaceleraciones excesivas comparadas con las observadas en la realidad. Por ejemplo, si la velocidad del vehículo es de  $5 \text{ celdas/unidad de tiempo}$  y el número de celdas vacías entre el vehículo y el de enfrente es 0, el

Ramón Sebastián Salat Figols

modelo obliga a disminuir la velocidad a 0, que es un cambio sumamente brusco. Es razonable suponer que los conductores procuran disminuir la velocidad paulatinamente si observan que la distancia al vehículo de enfrente es demasiado pequeña, es decir, procurarán disminuir la velocidad con más anticipación y más paulatinamente. Ésta es la característica del comportamiento de los conductores que pretende tomar en cuenta el modelo que aquí se presenta. Las simulaciones realizadas, producen movimientos de los vehículos con cambios de velocidades menos bruscos, manteniendo, en general, los comportamientos deseables que tiene el modelo de Nagel y Schreckenberg.

Falta por investigar la posibilidad de extender el modelo a autopistas de varios carriles y profundizar aún más en el comportamiento del modelo presentado, como por ejemplo, Makowiec y Miklaszewski [4], lo han hecho para el modelo de Nagel y Schreckenberg.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional el apoyo

otorgado al proyecto “Uso de la hoja de cálculo en el aprendizaje de simulación de procesos”, con clave 20131365.

## REFERENCIAS

- [1] Nagel, K. and Schreckenberg, M., *A celular automaton for freeway traffic*, J. Phys. I France **2**, 2221-2229 (1992).
- [2] Kumar, A. and Shridhar, P., *Study of deceleration behavior of different vehicle types*, International Journal for Traffic and Transport Engineering **2**, 253-270, 2012.
- [3] Mehar, A., and Velmurugan, S., *Speed and Aceleration Characteristics of Different Types of Vehicles and Multi-Lane Highways*, European Transport **55**, 1825-3997, (2013).
- [4] Makowiec, D, and Miklaszewski, Traffic flow by cellular automata: the effect of maximal car velocity. <<http://arxiv.org/abs/physics/0511128>> Consultado el 15 de diciembre de 2013.