Grados de libertad ondulatorios no suprimidos en la *difusión* electromagnética

J. D. Bulnes, Vando da C. Moraes
Grupo de Mecânica Quântica, Informação Quântica e Física Aplicada, Universidade Federal do Amapá, Rod. Juscelino Kubitschek, Km. 2, Jardim Marco Zero, CEP. 68903-419, Macapá, AP, Brasil.

E-mail: bulnes@unifap.br

(Recibido el 26 de Septiembre de 2013, aceptado el 17 de Febrero de 2014)

Resumen
Presentamos algunos argumentos con los cuales se pretende mostrar que la denominada *difusión electromagnética* no hace referencia a un fenómeno físico nuevo, sino a una expresión consistente con un abuso de lenguaje.

Palabras clave: Ondas electromagnéticas, difusión.

Abstract
We presented some arguments through which to show that the, so talked, electromagnetic diffusion, no is a new physical phenomenon, but one abuse in language.

Keywords: Electromagnetics waves, diffusion.

PACS: 01.55.+b, 03.50.De, 01.90.+g. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica, uno de los pilares de la física, son definidas dentro de un contexto clásico y suponiendo que los campos físicos no son intensos, lo que es consistente con su carácter lineal. La importancia que las ecuaciones de Maxwell tienen para la física y, a través de ella, para la comprensión del mundo natural y el desarrollo (de parte) del mundo tecnológico es enorme. Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell pueden ser formalmente extendidas para incorporar, por ejemplo, un término de corriente magnética (el cual fue incluido recientemente en un modelo geofísico basado en una técnica que usa ondas de radar [1], sin considerar el contexto en el cual este artificio matemático es usado, como luego se aclaró en [2]). Las ecuaciones de Maxwell también admiten generalizaciones con significado físico, como ocurre, por ejemplo, dentro del contexto de los fenómenos simulados en un espacio genuinamente plano, (2+1)–dimensional, con el electromagnetismo de *Proca* o el de *Chern-Simons*, que incluyen un término de masa para el fotón [3] y permiten abordar, entre otros, el fenómeno de la superconductividad a altas temperaturas.

Sin embargo, el modelo electromagnético y las aproximaciones que dentro de ella pueden realizarse, llevan a una situación interesante que es generalmente desconsiderada en la literatura de electrodinámica. Jackson, en la referencia [4], al abordar el tema de los campos magnéticos casi estáticos, usa la denominación ‘difusión de campos magnéticos’, presenta una ‘ecuación de difusión para el potencial vectorial’ y una ‘función de Green difusiva’. El término *difusión de campo magnético* o, el más general, *difusión electromagnética*, que se encuentra en la literatura de los métodos electromagnéticos usados en geofísica aplicada y que se refiere a una aproximación para la ecuación de ondas electromagnéticas de muy pequeña frecuencia ($f < 5$Hz) propagándose en buenos conductores, es desconocido en la literatura de física. Pero eso no es todo. En la misma ref. [4] se presenta una figura (su figura 5.23) que es completamente similar a la presentada por Butkov, ref. [5], para las soluciones de la ecuación de difusión que corresponden al proceso de transporte de una pequeña cantidad de sal concentrada inicialmente en un punto y que luego se difunde en un cilindro delgado que, junto con la sal, contiene agua. La figura 1 muestra esas curvas.

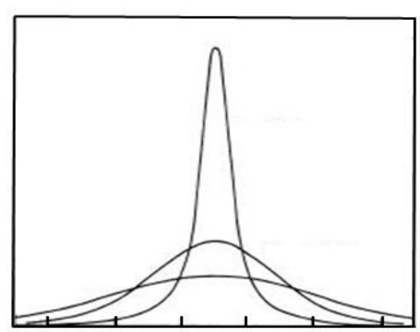

FIGURA 1. Curvas gaussianas de distinto ancho.

Para reforzar lo anterior, Jackson escribe, en la misma ref. [4], el siguiente texto: "…es manifiesta la difusión con el paso del tiempo…". Por otro lado, Landau, en la ref. [6], al abordar el mismo problema, menciona que la ecuación que surge en ese contexto coincide con la de la conducción del calor, pero él no la denomina *conducción de calor electromagnético* o una expresión de ese tipo, tampoco menciona el surgimiento de algún proceso difusivo.

Desde la perspectiva física es nítida y evidente la diferencia que existe entre una propagación ondulatoria y un proceso de difusión. La expresión *difusión electromagnética* parece así carecer de significado físico, pues un proceso difusivo y un fenómeno ondulatorio son muy distintos, presentando propiedades también distintas. La dinámica de aquellos fenómenos físicos responde a ecuaciones diferenciales distintas, caracterizadas por parámetros que también son distintos, ver ref. [5]. El énfasis dado al término 'difusión electromagnética' parecería indicar que se considera que existe un verdadero comportamiento difusivo. Por otro lado, las posibles discusiones sobre el significado físico atribuido a un fenómeno cuya dinámica está representada por esa aproximación están completamente ausentes en las referencias, donde sólo los aspectos matemáticos encuentran espacio. ¿Se trata de un verdadero proceso difusivo? ¿Las *ondas* dejaron de ser *ondas*? Considerando que una denominación de ese tipo puede, potencialmente, generar desconfianza y confusión entre los estudiantes desavisados, parece conveniente abordar ese asunto para intentar aclarar si tal expresión corresponde realmente a un proceso difusivo o si es sólo el resultado de un abuso de lenguaje.

En este artículo tenemos el propósito de revisar lo que la literatura de física registra sobre el asunto, presentar un contexto mínimamente adecuado para discutir el mismo y entonces ofrecer una aclaración. En ese sentido, organizamos el artículo de la siguiente manera: En la subsección A presentamos un típico caso de difusión; en la subsección B, revisamos la aproximación que posibilita escribir la ecuación de ondas (para un buen conductor) con la forma de la ecuación de difusión; en la sección C presentamos aspectos del límite $\omega \to 0$; en la sección II presentamos el argumento de la simetría de *gauge* y el *gauge-fixing* y discutimos el efecto que ellas tienen sobre los grados de libertad no físicos y su irrelevancia para eliminar los grados de libertad ondulatorios; en la sección III presentamos nuestras conclusiones y finalizamos con un apéndice.

A. Un caso de difusión

Consideremos un contexto físico donde la respuesta de los medios materiales a los campos externamente aplicados corresponde al régimen lineal; es decir, cuando los campos físicos actuantes son débiles (en comparación con los atómicos). Supongamos que sobre un conductor isótropo se aplica un campo eléctrico externo; en ese caso, se manifestarán algunos *fenómenos de transporte*, como la transferencia de calor y las corrientes eléctricas, ref. [7]. Esas manifestaciones físicas se explican en función de la facilidad de movimiento de sus cargas eléctricas *libres*. Para continuar, nos restringiremos al caso de las corrientes eléctricas. Si en el medio conductor existe un gradiente de temperatura, debido a que el mismo no se encuentra en equilibrio termodinámico, entonces se manifestará un proceso de difusión de partículas cargadas hacia las regiones del medio con menor temperatura. A ese proceso difusivo estarán asociadas corrientes eléctricas, con densidad de corriente $\boldsymbol{j}_T = \beta \nabla T$, donde β caracteriza el efecto termoeléctrico producido y T es una función de las coordenadas cuyo valor da la temperatura en el punto correspondiente, ref. [7]. Entonces la densidad de corriente eléctrica total se escribe de la siguiente manera,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \beta \nabla T \,, \tag{1}$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio; así, la ecuación microscópica de Ampere se escribe, dentro del contexto considerado y en el sistema de unidades de Gauss (absoluto), de la siguiente manera,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\sigma \vec{E} + \beta \nabla T) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}) \,, \tag{2}$$

donde ε es la constante dieléctrica del medio.

B. La ecuación de ondas con la forma de la de difusión

Las ecuaciones microscópicas de Maxwell para el campo electromagnético en un medio de conductividad eléctrica σ, permeabilidad magnética μ y constante dieléctrica ε, ref. [7], se expresan (en el sistema de unidades de Gauss) de la siguiente manera,

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \,, \tag{3}$$

$$\nabla \bullet \vec{H} = 0 \,, \tag{4}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \,, \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \,. \tag{6}$$

Las ecuaciones anteriores corresponden a la aproximación "casi-estática" o "casi-estacionaria" de las ecuaciones de Maxwell.

Usando la bien conocido identidad vectorial (aquí aplicada al vector eléctrico E),

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \,, \tag{7}$$

y tomando en consideración que la operación de derivación temporal y el operador ∇ conmutan (pues actúan sobre variables distintas) se puede escribir, después de usar (3), (6) y (7),

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right). \qquad (8)$$

Seguidamente, usando (5) en (8), se obtiene la bien conocida ecuación,

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (9)$$

Consideremos el caso en el que el campo eléctrico E cambia muy lentamente (porque la frecuencia de la onda es muy pequeña), entonces su variación temporal, $\partial E/\partial t$, es pequeña y la variación temporal de esta variación, $\partial^2 E/\partial t^2$, es aún más pequeña. Además, si el medio en el que se propaga la onda es un buen conductor a bajas frecuencias, la conductividad eléctrica σ tendrá un valor significativo; en ese caso, el término del extremo derecho en la ecuación (9) podrá ser ignorado y será válida la siguiente *aproximación*,

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad (10)$$

donde $\nu = c^2/(4\pi\mu\sigma)$. La forma de la ecuación (10) coincide con la de la *ecuación de difusión*; sin embargo, hasta aquí, sólo tenemos derecho de afirmar que se trata de una coincidencia matemática. Así, surgen las preguntas: ¿La ecuación (10) podría corresponder a un verdadero proceso difusivo?

C. El límite de la frecuencia pequeña para el caso de un medio conductor

En la electrodinámica clásica se demuestra que la ecuación de ondas para un medio conductor incorpora, a diferencia de la ecuación de ondas para el espacio libre, una constante dieléctrica compleja. Ello se hace claro al considerar, en (9), la dependencia explicita del tiempo, en la forma $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).e^{-i\omega t}$, ref.[8], lo que conduce directamente a identificar la constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ con la forma,

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}, \qquad (11)$$

donde $\sigma(\omega)$ es la conductividad AC, que está definida, a su vez, por la expresión,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \qquad (12)$$

siendo $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ la conductividad DC y τ es un tiempo (de relajación) característico asociado con el camino libre medio de los electrones en un metal, todo ello de acuerdo con el modelo de Drude para la conductividad eléctrica en metales, ver ref. [8]. En el caso de que la ecuación de ondas corresponda a la propagación de ondas electromagnéticas de frecuencia muy pequeña[1] la constante dieléctrica es (esencialmente) imaginaria $\varepsilon(\omega) \sim (4\pi\sigma_0/\omega)i$,

Hasta aquí no ha surgido nada que sea característico de un proceso difusivo.

II. DISCUSIÓN

Aquí vamos a considerar un aspecto aún no abordado en la sección anterior. Las ecuaciones de Maxwell tienen una propiedad que es esencial para aclarar el presente problema; se trata de la simetría de *gauge*. La expresión 'simetría de *gauge*' significa que las ecuaciones de Maxwell son invariantes de *gauge*; es decir, que son invariantes con relación a la elección de un *gauge*. Así, sin afectar a los campos físicos, es posible imponer una condición para fijar el *gauge* (*gauge-fixing*), la que posibilita eliminar grados de libertad espurios (no físicos) que surgen naturalmente en el modelo electromagnético de Maxwell. Por otro lado, es bien sabido que un campo 4-vectorial que obedece las ecuaciones de Maxwell[2] tiene asociado dos sectores: el longitudinal, caracterizado por un espín $S = 0$ y el transversal, con espín $S = 1$, lo que puede verse, por ejemplo, en ref. [9]. El spin $S = 0$, siendo una propiedad únicamente matemática del modelo de Maxwell, constituye, por eso mismo, un grado de libertad espurio que es eliminado por el *gauge-fixing*. En cambio, el espín $S = 1$ sí tiene significado físico, correspondiendo a una *propiedad física* de un *campo físico*. De otra parte, los grados de libertad físicos, que no son afectados por el *gauge-fixing*, corresponden, en el caso del campo electromagnético que se propaga libremente, a los modos de polarización ortogonales entre sí y a la dirección de su propagación.

Por otro lado, como puede verse en el Apéndice A, Molchanov consigue construir ecuaciones para los potenciales físicos que tienen la forma de ecuaciones de difusión con fuentes, pero ello es alcanzado después de elegir un *gauge* adecuado, ver apéndice A. Entonces, partiendo de las ecuaciones de Maxwell, puede alcanzarse una ecuación del tipo difusiva, pero eso no significa que esa aproximación matemática traiga consigo la física de la difusiva; es decir, que esa ecuación surja conectada con un verdadero proceso difusivo. Debemos percibir que para poder describir un proceso difusivo a través de las ecuaciones de Maxwell (suponiendo que ello tenga significado físico) la elección de un *gauge-fixing* sería irrelevante, pues con ello sólo podemos suprimir los grados de libertad espurios; lo que se necesitaría es de un mecanismo que, dentro del contexto teórico, suprima los *grados de libertad físicos*, aquellos que son característicos de la propagación ondulatoria, el mismo que debería ser

[1] En ese caso la conductividad AC coincide con la conductividad DC o estática: $\sigma(\omega \to 0) \to \sigma_0$. Un valor de la frecuencia de, por ejemplo, f = 0.5Hz corresponde a ese régimen.

[2] En el electromagnetismo de Maxwell el "fotón longitudinal" es una propiedad matemática que surge dentro del modelo electromagnético que no tiene un elemento correspondiente en el mundo físico.

complementado con un mecanismo que sea capaz de incorporar grados de libertad exclusivamente difusivos, lo que no se ha realizado en [10]. Por lo tanto, las ecuaciones en la ref. [10] corresponden a un proceso que puede *parecer* relacionado con un proceso difusivo pero que podría presentar polarización.

III. CONCLUSIONES

Hemos discutido y presentado un argumento con el que mostramos que la expresión *difusión electromagnético* corresponde a un abuso de lenguaje, la misma que, por la manera como se la presenta en cierta literatura, parece corresponder a un verdadero fenómeno físico. La *difusión electromagnética*, que encuentra sustento en las ecuaciones, es sólo una propiedad matemática del modelo electromagnético que no tienen una propiedad correspondiente en la naturaleza. Teniendo en cuenta que la vigencia de los abusos tiene origen en el uso los mismos, se recomienda evitar su uso.

REFERENCIAS

[1] Ellefsen, K. *et al*., *Frequency-domain Green's functions for radar waves in heterogeneous 2.5D media*, Geophysics **73**, J13-J22 (2009).

[2] Bulnes, J. D., Peche, L. y Travassos, J., *Comment on 'Frecuency-domain Green's functions for radar waves in heterogeneous 2.5D media'*, Geophysics **75**, X5-X5 (2010).

[3] Helayël, J. A., *Aspectos de dimensionalidade no Eletromagnetismo*, <http://www.cbpf.br/~dcp/papers>, consultado el 06 de julio de 2013.

[4] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (Wiley & Sons, USA, 1962).

[5] Butkov, E., *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, USA, 1968).

[6] Landau, L., Liftchitz, *Electrodynamics of continuum media*, (Editorial MIR, Moscú, 1986).

[7] Brédov, M., Rumiántsev, V., Toptiguin, I., *Electro-dinámica Clásica*, (Editorial MIR, Moscú, 1986).

[8] Ashcroft, N., Mermin, D., *Solid State Physics*, (Holt Rinehart and Winston, 1976).

[9] Helayel, J. A., *Aspectos dimensionais do Eletromagnetismo*, (CBPF, Brasil, 1998).

[10] Molchanov, O., Kulchitsky, A. and Hayakawa, M., *Inductive seismo-electromagnetic effect in relation to seismogenic ULF emission*. Natural Hazards and Earth System Sciences **1**, 61-67 (2001).

APENDICE A

En la ref. [10] se consideran las ecuaciones para los campos físicos (eléctrico y magnético) y los potenciales vectorial y escalar,

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \tag{13}$$

y se considera la constante dieléctrica compleja,

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon} \right). \tag{14}$$

Con ellos, el *gauge* se construye a partir de la ecuación,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon' \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cong \nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma\varphi = 0, \tag{15}$$

y entonces se obtienen dos ecuaciones, para los potenciales vectorial y escalar, con la forma de una ecuación de difusión con fuentes,

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla^2 \vec{A} = \vec{j}_s, \tag{16}$$

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \kappa = -\nabla \cdot \vec{j}_s / \sigma, \tag{17}$$

donde D es el denominado coeficiente de *difusión* electromagnética.