Descripción de la evolución del Universo: una presentación para alumnos preuniversitarios

R. García-Salcedo[1] y Claudia Moreno[2]
[1]Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-Unidad Legaria del Instituto Politécnico Nacional, Legaria #694. Col. Irrigación, CP.11500, México, D. F.
[2]Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara, Corregidora No.500, Sector Reforma, CP.44420, Guadalajara, Jal., México.

E-mail: rigarcias@ipn.mx; claudia.moreno@cucei.udg.mx

(Recibido el 10 de julio de 2007; aceptado el 26 de agosto de 2007)

Resumen
Uno de los temas que más atrae la atención de los alumnos preuniversitarios son los relacionados con el Universo. En este trabajo, que está dirigido a los profesores de esos alumnos, se describen las hipótesis fundamentales basadas en las observaciones astronómicas para construir un modelo del Universo. La ecuación de Friedmann, que describe la evolución del Universo, se deduce sin el uso de la teoría de la relatividad general de Einstein. De la misma forma, una ecuación termodinámica que nos ayuda a complementar el estudio de la evolución del Universo se deduce. Finalmente, se dan algunas soluciones a dichas ecuaciones para describir algunas etapas del Universo.

Palabras clave: Ecuación de Friedmann, Expansión del Universo, Física Educativa.

Abstract
One of the subjects that attracts the attention of the high school students are the related with Universe. In this work the fundamental hypotheses based in the astronomical observations are described to construct a Universe model. The Friedmann equation that describes the evolution of the Universe is deduced without the use of the Einstein's general relativity theory. Of the other hand, a thermodynamic equation that helps us to complement the study of the evolution of the Universe is deduced. Finally, some solutions to these equations to describe some stages of the Universe are discussed.

Key words: Friedmann Equation, Expansion of the Universe, Physics Education.

PACS: 01.55.+b, 01.30.-y, 95.10.-a, 98.80.-k

I. INTRODUCCIÓN

El hombre desde la antigüedad, ha sentido la curiosidad por comprender todo lo que le rodea, particularmente, cada vez que miraba el cielo nocturno se preguntaba qué eran aquellos objetos brillantes que se observaban. Los griegos, hace más de veinte siglos, llamaron a estos "puntos" estrellas. También observaron que al unir las estrellas por líneas imaginarias parecían formar figuras que llamaron constelaciones.

¿Por qué las estrellas parecen estar quietas en el Universo? ¿A qué distancia se encuentran? ¿Por qué hay algunas "estrellas" que parecen moverse respecto de la mayoría? ¿De dónde se formó todo eso, incluyendo a la Tierra y al mismo hombre? En pocas palabras, ¿qué es el Universo?, ¿de qué está formado, cómo surgió, y cómo evoluciona?

Muchas civilizaciones antiguas dieron respuesta a varias de estas preguntas y plantearon sus propias concepciones de cómo estaba constituido el Universo y de cómo se había formado [1]. Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XX, con la aparición de la teoría de la relatividad de Einstein que se logró hacer un primer modelo matemático que describe la evolución del Universo que explica muchas observaciones astronómicas, entre otras su expansión y la cantidad de elementos químicos que se encuentran en el Universo actualmente.

La ciencia que estudia el origen y evolución del Universo se conoce como cosmología. El modelo cosmológico más ampliamente aceptado por la comunidad científica es el modelo estándar de la cosmología [2]. Este modelo, basado en la teoría de la relatividad de Einstein, supone al Universo como un "gas" homogéneo en expansión. Las componentes que constituyen este "gas" son una mezcla de radiación (ondas electromagnéticas) y de materia (polvo, cuyos granos serían las galaxias). Sin embargo, alguno de estos componentes ha predominado en ciertas etapas de la evolución del Universo, de tal forma que se habla de una época donde dominó la radiación (Universo temprano) y otra donde dominó la materia (Universo actual).

Recientemente se han hecho revisiones de algunos resultados de la cosmología observacional [3,4], los cuales parecen indicar que la cosmología es aún una ciencia joven y que aún pudieran dejar abiertas las puertas para muchos otros modelos.

El objetivo de este trabajo es deducir, a partir de la teoría Newtoniana, las ecuaciones básicas de la evolución del Universo: la ecuación de Friedmann y la ecuación termodinámica. Asimismo, describir algunas etapas de la evolución del desde su origen (si es que lo tuvo) hasta nuestros días. Todo ello con la finalidad de presentar a alumnos preuniversitarios este tema de una forma simple y clara. Se encuentran trabajos en la literatura donde se hace una presentación similar, sin el uso de la relatividad general [5].

Tipler argumenta a favor de un análisis desde el punto de vista de la mecánica Newtoniana, como el que se presenta aquí, demostrando que ésta última es tan rigurosa como la proveniente de la relatividad general [6].

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección II, se explicarán brevemente algunas consideraciones que se requieren para generar un modelo de Universo en expansión que reproduzca las observaciones astronómicas. En la sección III, se deduce la ecuación dinámica que gobierna la evolución del Universo, sin hacer referencia alguna a la teoría de la relatividad general, debido a su complejidad matemática; sin embargo, se deducirá desde la mecánica Newtoniana. También es necesaria una ecuación termodinámica para completar la descripción por lo que en la Sección IV se obtendrá esta ecuación y se presentan tres soluciones para contenido material en el Universo, correspondientes a distintas épocas de evolución del Universo. Finalmente, en la sección V se dan algunas conclusiones.

II. CONSIDERACIONES BÁSICAS

El modelo estándar de la cosmología, conocido también como el modelo de la gran explosión ("Big Bang") es uno de los más exitosos para explicar el origen y evolución del Universo [2,**7**], debido a dos de las observaciones astronómicas fundamentales que favorecen su aceptación:

1. La expansión actual del universo y,
2. La radiación de fondo de tres grados Kelvin (radiación electromagnética observada en todas direcciones del Universo, la cual esta asociada a su temperatura).

Además, este modelo está basado en algunas hipótesis sobre nuestro Universo que describiremos a continuación. Se observa a distancias pequeñas que el Universo no es homogéneo (tienen la misma composición en todos direcciones) ni isotrópico (no existe dirección privilegiada) debido a que cuando observamos por telescopio vemos que existen planetas, estrellas y galaxias de distintas masas en distintas direcciones. Sin embargo, las imágenes tomadas con el Telescopio Espacial Hubble (HST, Hubble Space Telescope) sobre el campo profundo (muy distantes de nuestra galaxia) muestra que el Universo si es homogéneo (Figura 1) a grandes escalas, es decir, a distancias mayores que 100 megaparsec (1 megaparsec equivale a 3.2×10^{3} años-luz y un año luz equivale a 9.46×10^{15} m), para mayor detalle revisar capítulo 1 de [6,7]. Por otro lado, las observaciones con el satélite COBE (Cosmic Background Explorer), muestra una isotropía en la radiación cósmica de fondo en el Universo temprano, lo cual hace evidente también la homogeneidad del Universo (Figura 2). En 1933, el científico Edward Milne nombró a estas hipótesis como el principio cosmológico el cual afirma que no existe un lugar privilegiado en el Universo.

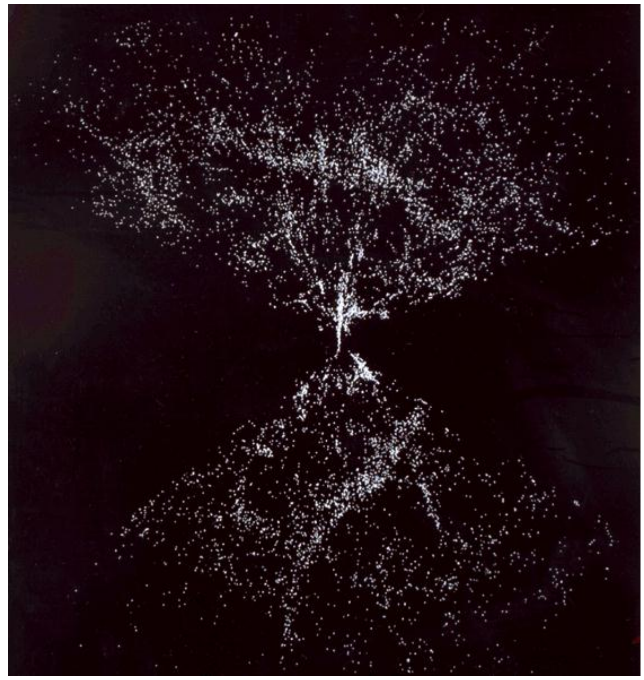

FIGURA 1. Se observa la distribución de las galaxias a distintas distancias, teniendo como centro a la Tierra [15].

Entre 1928 y 1929, Edwin Hubble desde el telescopio de Monte Wilson, determinó la distancia a la galaxia de Andrómeda (la más cercana a la Vía Láctea donde orbita nuestro Sol), 700000 años luz, mediante estrellas de brillo variable conocidas como cefeidas [3]. Asimismo, usando un método conocido como escala de distancias cósmicas [8], encontró las distancias a diferentes nebulosas que resultaron ser extragalácticas. Con esto, concluyó la existencia de "universos islas" situados muy lejos de la Vía Láctea.

Para determinar la velocidad que tiene una galaxia respecto de la Tierra se utiliza su corrimiento al rojo. Esta técnica consiste en observar el cambio que sufre la frecuencia de la luz (radiación electromagnética) emitida por la galaxia que llega a la Tierra. De forma similar en que la frecuencia del sonido de una sirena de una ambulancia cambia cuando se acerca o se aleja de nosotros (efecto Doppler [13]).

Así que Hubble determinó que la velocidad de las galaxias y su distancia estaban correlacionadas de tal forma que mientras más alejadas estuvieran de la Tierra, más rápidamente se alejaban de nosotros. Este resultado se conoce como ley de Hubble [9] lo que significa, que después de mucho tiempo de creencias erróneas, el Universo se expande.

Matemáticamente, la ley de Hubble se enuncia como:

$$v=Hr \qquad (1)$$

donde v es la velocidad de recesión (retroceso) de la galaxia, que para velocidades pequeñas está dada por cz (c es la velocidad de la luz y z es el corrimiento al rojo), H es la constante de Hubble y r la distancia a la que se encuentra la galaxia, determinada con métodos astronómicos.

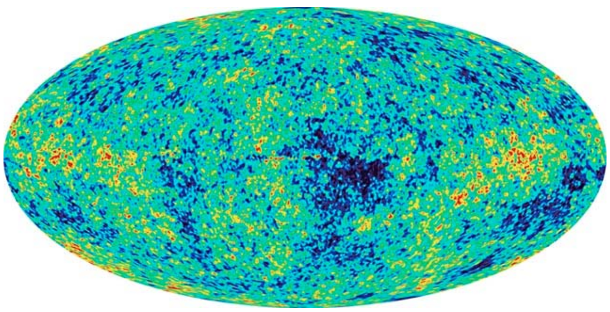

FIGURA 2. Se observa la radiación cósmica de fondo detectada por el satélite WMAP [16].

Hubble encontró el valor actual para la constante H (que se denota como H_0) de 500 km/s/Mpc, es decir, por cada megaparsec de distancia su velocidad de recesión aumenta en 500 km/s. La utilización de diversos métodos de medición de distancias y velocidades ha llevado a que este valor este cambiando [10]. El valor más actual fue proporcionado por el satélite WMAP de H_0 = 73 ± 3 $\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

Una forma muy sencilla de estimar la edad del Universo es a través del valor actual de la constante de Hubble. Para ello, se considera que la expansión se realiza a velocidad constante, de tal forma que $r = vt$. Combinando esta última expresión con la ecuación (1) se tiene que:

$$t = \frac{1}{H_0}, \tag{2}$$

el cual se conoce como tiempo de Hubble. Sustituyendo el valor actual de la constante de Hubble obtenemos una edad aproximada del Universo de 12 mil millones de años.

III. ECUACIÓN GEOMÉTRICA

En esta sección se deduce una de las ecuaciones que gobiernan la dinámica de nuestro Universo sin recurrir a la teoría de la relatividad general (una nota histórica sobre cómo Einstein llegó a esta teoría puede verse en [11]). El principio básico de la conservación de la energía es el que nos permitirá deducirla. La otra de estas ecuaciones es proporcionada por las propiedades termodinámicas del Universo y se deducirá en la siguiente sección.

Comenzaremos por suponer que el Universo se comporta como un gas en expansión, modelado por una esfera de radio r. Consideremos una galaxia de masa m a una distancia r del centro de la esfera, como si estuviera colocada en la superficie de ésta. La galaxia es influenciada gravitacionalmente sólo por la masa que se encuentra en el interior de la esfera denotada por $M = \frac{4}{3}\rho\pi r^3$, aquí ρ es la densidad de masa del contenido de la esfera. Así, la energía mecánica total de la galaxia de está dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r^2}, \tag{3}$$

donde G es la constante de gravitación Universal de Newton. Esta energía debe permanecer constante mientras la esfera considerada se está expandiendo.

De acuerdo a la ley de Hubble, esa galaxia se mueve debido a la expansión, por lo que sustituyendo la velocidad de la ecuación (1) en la ecuación (3), tenemos que:

$$E = \frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho m, \tag{4}$$

que también se puede expresar como

$$H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = \frac{2E}{mr^2}. \tag{5}$$

Como el Universo se encuentra en expansión, las distancias entre sus componentes crecen con el tiempo. Así definimos el factor de escala de la expansión $R(t)$ como el factor por el cual se van expandiendo dichas distancias. De esta forma

$$r = \frac{R(t)}{R(t_0)}r_0, \tag{6}$$

es la proporción de crecimiento de r desde el tiempo t hasta el tiempo t_0, donde r_0 es la distancia medida en t_0. La velocidad de expansión está dada como

$$v = \frac{dr}{dt} = r_0\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \tag{7}$$

donde el punto sobre la letra significa la derivada con respecto al tiempo t.

Usando esta última ecuación, la constante de Hubble puede expresarse como

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \tag{8}$$

la cual se denomina parámetro de Hubble dado que depende del tiempo t.

Si escribimos la ecuación (5) en términos del parámetro de Hubble, tenemos

$$H(t)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{k}{R(t)^2}. \tag{9}$$

Ésta relación recibe el nombre de ecuación de Friedmann y $k = -\frac{2E}{m}$ es una constante relacionada con la energía del Universo en un tiempo determinado.

La diferencia entre la descripción Newtoniana de este trabajo y la descripción relativista es que k describe la geometría del espacio-tiempo (una versión pedagógica sobre cosmología con el uso de la relatividad general puede verse en [12]).

Cuando $E = 0$, la densidad del Universo ρ toma un valor conocido como densidad crítica ρ_c que se obtiene al despejar ρ de la ecuación (5),

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \qquad (10)$$

esta cantidad puede ser evaluada en la actualidad, sustituyendo H por H_0, así

$$\rho_{c0} = 1.879 \times h^2 \times 10^{-29} \frac{gr}{cm^3},$$

siendo h la constante de Hubble en unidades de 100 km/s/Mpc. Esta densidad corresponde aproximadamente a 3 átomos de hidrógeno por metro cúbico.

Otra propiedad importante de la ecuación de Friedmann se obtiene cuando escribimos la ecuación (9) como

$$\frac{k}{H^2R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - 1 \equiv \Omega - 1, \qquad (11)$$

siendo Ω la relación entre la densidad ρ y la densidad critica ρ_c,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \qquad (12)$$

Debido a que $H^2R^2 \geq 0$, existe una relación entre el signo de k y el signo de $\Omega - 1$ que podemos resumir como

$$\begin{aligned} k = +1 &\;\rightarrow\; \Omega > 1, \\ k = 0 &\;\rightarrow\; \Omega = 1, \\ k = -1 &\;\rightarrow\; \Omega < 1. \end{aligned} \qquad (13)$$

La densidad crítica es una densidad límite que modela geométricamente nuestro Universo. Si la densidad del Universo es mayor que la densidad crítica, entonces $\Omega > 1$ y, por tanto, se dice que nuestro Universo es cerrado ($k = +1$) ya que la atracción gravitacional hace que la expansión se detenga en algún momento y con ello, el Universo colapse. Si $\Omega = 1$, el Universo se expande, como actualmente se observa, solo que a velocidad constante y así lo hará por siempre (Universo plano, $k = 0$). Finalmente, si $\Omega < 1$, entonces $\rho < \rho_c$ y, por tanto, en este escenario la concentración de materia es poca lo cual hace que la expansión sea acelerada (Universo abierto, $k = -1$).

Para una descripción completa de la evolución del Universo, se hace necesaria una ecuación del comportamiento termodinámico del "gas" en expansión considerado, lo cual se deducirá en la siguiente sección.

IV. ECUACIÓN TERMODINÁMICA

Antes de comenzar a ver la ecuación termodinámica, se debe aclarar que utilizaremos la equivalencia entre la masa y la energía, $E = mc^2$ (donde c es la velocidad de la luz en el vacío), demostrada por Einstein en 1905 como consecuencia de su teoría de la relatividad especial. Consideraremos un sistema de unidades donde $c = 1$.

Cuando un gas que se encuentra confinado en un recipiente esférico se expande, éste ejerce una presión sobre la superficie de la esfera que lo contiene de tal forma que para aumentar el volumen de la esfera una cantidad infinitesimal (muy pequeña) de volumen $dV = d(R^3)$, con R el radio de la esfera, se requiere de una energía igual al negativo del trabajo ejercido por la presión interna, es decir *-pd(R³)*. El cambio de energía interna del gas es $dE = dm = d(\rho R^3)$. Por lo que,

$$d(\rho R^3) = -\,pd(R^3). \qquad (14)$$

Reescribiendo la ecuación (14), obtenemos

$$R\frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + p)\frac{dR}{dt} = 0. \qquad (15)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (9) y (15) obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)R, \qquad (16)$$

que se le conoce como ecuación de la aceleración del Universo.

Las ecuaciones (9) y (15), son las ecuaciones que nos permitirán describir la evolución del Universo; sin embargo, podemos darnos cuenta que son dos ecuaciones con tres incógnitas ρ, p y R, todas dependientes del tiempo, así que requerimos de una última ecuación. Ésta es la ecuación de estado que describe al gas, es decir, la relación entre p y ρ.

En la época en que Einstein estudiaba un modelo cosmológico adecuado a las observaciones, no se sabía que el Universo se expandía, creía que era estático, es decir, su aceleración igual a cero, $\frac{d^2R}{dt^2} = 0$. Esto significa que, de acuerdo con la ecuación (16), si la densidad media del Universo es positiva, entonces la presión media sería negativa, $p_m = -\frac{\rho_m}{3}$. Esto es imposible ya que en general vemos estrellas y galaxias compuestas de lo que se conoce como polvo y, esta ecuación de estado, corresponde a la de radiación electromagnética [13]. Considerando la densidad de energía positiva, Einstein introdujo la energía de vacío cuya ecuación de estado es $p_V = -\rho_V$. Esta presión compensaba la expansión que se observaba, de forma que el Universo se observara estático. Este mecanismo es el mismo que cuando intentamos jalar un émbolo de una jeringa sin permitir el paso de aire o algún líquido creamos un vacío en el interior de la jeringa.

Se sabe que para la materia (que actualmente predomina en el Universo) conocida como polvo, la ecuación de estado corresponde a la de un gas ideal, ya que no hay interacción entre sus partículas, es decir, $p_m = 0$. Si sustituimos este valor de la presión en (14), vemos que la energía del interior de una esfera no cambia cuando ésta se expande, solo se distribuye en su interior.

Como hemos visto, en general tenemos una ecuación de estado para el contenido del Universo en una forma simple

$$p = \omega\rho, \qquad (17)$$

donde ω es una constante independiente del tiempo. Si sustituimos la ecuación (17) en (15) obtenemos

$$-3(1+\omega)\frac{d\rho}{dt}=\frac{\dot{R}}{R}, \tag{18}$$

e integrando en ambos lados, la densidad de energía evoluciona como

$$\rho \propto R(t)\,\mathrm{e}^{-3(1+\omega)}. \tag{19}$$

De esta forma, la densidad como función del factor de escala se expresa como

$$\begin{aligned} p=\frac{1}{3}\rho \quad &\rightarrow \quad \rho \propto R^{-4}, \\ p=0 \quad &\rightarrow \quad \rho \propto R^{-3}, \\ p=-\rho \quad &\rightarrow \quad \rho = \text{constante}, \end{aligned} \tag{20}$$

para radiación electromagnética, materia y energía de vacío, respectivamente.

La ecuación de Friedmann (9) la podemos escribir, sin pérdida de generalidad como

$$\dot{R}(t)^2 \propto \rho R(t)^2. \tag{21}$$

Al sustituir las densidades obtenidas en la ecuación (20) tenemos que la dependencia del factor de escala y la densidad como función de t son

$$\begin{aligned} R \propto t^{1/2} \quad &\rightarrow \quad \rho \propto t^{-2}, \\ R \propto t^{3/2} \quad &\rightarrow \quad \rho \propto t^{-2}, \\ R \propto e^{Ht} \quad &\rightarrow \quad \rho = \text{constante}, \end{aligned} \tag{22}$$

para radiación, materia y energía de vacío, respectivamente.

Esto último nos dice que en el caso de Universo dominado por radiación o materia o, quizá, una combinación de ambos, la densidad tiene una singularidad al tiempo cero, es decir, la densidad de energía es infinita en el famoso "Big Bang" o gran explosión, y conforme se va expandiendo esa energía se va distribuyendo a lo largo del Universo. Como un ejercicio para el lector, se pide encontrar las expresiones de la temperatura del Universo como función del tiempo y comprobar que mientras el Universo se expande (tiempo cada vez más grande) su temperatura va disminuyendo.

V. CONCLUSIONES

Aunque todavía hace falta mucho en la descripción de nuestro Universo, en este trabajo se han explicado las consideraciones básicas en las que se debería basar cualquier modelo que pretenda describir las actuales observaciones astronómicas.

Desde la mecánica Newtoniana, se ha deducido una ecuación que nos permite conocer la evolución del Universo (Ecuación de Friedmann. Estrictamente hablando esta ecuación se debe deducir formalmente de la teoría de la relatividad general de Einstein; sin embargo, la diferencia entre deducirla como se hizo en este trabajo y la relativista, es que no se tiene, de entrada, la interpretación de la energía como curvatura de un espacio-tiempo, lo cual es muy evidente en la teoría de Einstein [12,14].

También de forma muy simple se dedujo la ecuación termodinámica que gobierna el Universo, considerando tres tipos principales de formas de energía que pudiera contener: radiación, materia y de vacío.

Finalmente, mediante la resolución de las ecuaciones, se obtuvo la evolución del factor de escala, por tanto, de la densidad de energía como función del tiempo, con lo que se pudo entender que al tiempo t=0 existió una singularidad en donde dicha energía era infinita, en el caso de materia o radiación y constante si se tuviera siempre energía de vacío.

Aún quedan muchas preguntas por resolver, falta hacer una descripción más precisa del Universo; sin embargo, lo que hemos visto hasta aquí, son las ecuaciones básicas mediante las cuales, nosotros podríamos sacar más conclusiones acerca de la evolución de nuestro Universo.

Esperamos que estas notas, sean comprensibles para alumnos que hayan concluido una formación preuniversitaria y que esta forma de explicar la evolución del Universo los invite a seguir estudiando más en este apasionante tema.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a los árbitros por sus útiles comentarios para la mejora de este manuscrito. RGS agradece a Lorena Ramírez por las útiles discusiones sobre el tema. Agradecemos a SNI-CONACyT (México). Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto CONACyT J-49924.

REFERENCIAS

[1] Torres, J., García-Salcedo, R. y Agüero, M. A., *Astronomía, gravitación y modelos cosmológicos*, CIENCIA ergo sum, **11-2**, 191 (2004).

[2] Peebles, P. J. E. (*Physical Cosmology*, Princeton University Prees, Princeton, 1971); Weinberg, S. (*Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, 1972); Zeldovich, Y. B. and Novikov, I. D. (*Relativistic Astrophysics: The Structure and Evolution of the Universe*, Chicago University Press, Cambridge, 1983); Islam, J. N. (*An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[3] López-Corredoira, M., *Observational Cosmology: caveats and open questions in the standard model*, *Recent. Res*., Devel. Astronomy & Astrophys **1**, 561 (2003).

[4] Reid, D. D., Kittell, D.W., Arsznov, E. E. and Thompson, G. B., *The picture of our universe: A view from modern cosmology*, arXiv:astro-ph/0209504v2, (2002).

[5] Jordan, T., *Cosmology calculations almost without general relativity*, Am. J. Phys. **73,** 653-662 (2005); Visser, M., Gen. Rel. Grav. **37**, 1541-1548 (2005); Nemiroff, R.J. and Patla B., *Adventures in Friedmann Cosmology: An Educationally Detailed Expansion of the Cosmological Friedmann Equations*, arXiv:astro-ph/0703739v1, (2007); Akridge, R., *A simple cosmology: General relativity not required*, Am. J. Phys. **62**, 195-200 (2001); Lemons, D. S., *A newtonian cosmology Newton would understand*, Am. J. Phys. **56**, 502-504 (1988).

[6] Tipler, F. J., *Rigurous Newtonian cosmology*, Am. J. Phys. **64**, 1311-1315 (1996).
[7] Kolb, E. and Turner, M. (*The Early Universe*, Addison-Wesley P. Co., U.S.A., 1990).
[8] http://www.oarval.org/cosmyardsp.htm, visitada el 9 de agosto de 2007.
[9] Hubble, E., *Proceedings de la Academia Nacional de Ciencias de EEUU* **15-3**, 68-173 (1929).
[10] Van Leeuwen, F., Feast, M. W., Whitelock, P.A. and Laney, C.D., *Cepheid Parallaxes and the Hubble Constant*, [astro-ph/arXiv:0705.1592] (2007).
[11] Sauer, T. *Albert Einstein's 1916 Review Article on General Relativity*, arXiv:physics/0405066v1, (2004).
[12] Ureña-López, L.A., *Unveiling the dynamics of the universe*, arXiv:physics/0609181v1, (2006).
[13] Resnick, R., Halliday, D. and Krane, K. (*Física*, CECSA, México D.F. , 1998).
[14] Sales Lima, J. A., *Note on solving for the dynamics of the Universe*, Am. J. Phys. **69**, 1245-1247 (2001).
[15] http://www.udel.edu/mvb/PS146htm/146noov.html imagen tomada el 9 de agosto de 2007.
[16] http://apod.nasa.gov/apod/image/0302/sky_wmap.jpg, imagen tomada el 9 de agosto de 2007.