

Equações diferenciais aplicadas à microscopia de força atômica: Uma estratégia para o Ensino de Mecânica Clássica na graduação



G. A. C. Lopes¹, E. A. Cotta², H. D. Fonseca Filho³

¹Laboratório de Física, Universidade do Estado do Amapá (UEAP), Universidade do Estado do Amapá (UEAP), Av. Presidente Vargas, 650, Amapá, Brasil.

²Departamento de Física, Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Av. General Rodrigo Octávio Jordão Ramos, 3000, Campus Universitário, Coroado I – Amazonas, Brasil.

³Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), Rodovia Juscelino Kubitschek, KM 02, Amapá, Brasil.

E-mail: hdf_filho@unifap.br

(Received 13 August 2014, accepted 17 July 2015)

Abstract

In this paper, we propose a didactic mechanism for the teaching of the physical and mathematical concepts inherent to the mechanical oscillations. These are commonly addressed in undergraduate courses in Physics, in the chair of Classical Mechanics or correlated ones. Here, we emphasize the methods of resolution of differential equations, attempting to relate its applications in condensed matter physics, in particular to atomic force microscopy. Throughout the motion equation for the AFM cantilever, we studied the solution of the equations for the cases of: mechanical equilibrium, simple oscillations, damped oscillations, forced oscillations and damped and forced oscillations.

Keywords: Mechanical oscillations, Equation solution methods, Physical teaching.

Resumo

Neste artigo propomos um mecanismo didático para o ensino dos conceitos físicos e matemáticos a respeito das oscilações mecânicas. Os quais são regularmente abordados nos cursos de graduação em Física, nas disciplinas de Mecânica Clássica e correlatas. Aqui enfatizamos os métodos de resolução de equações diferenciais, buscando relacionar suas aplicações na física da matéria condensada, em particular na microscopia de força atômica. Através da equação de movimento do *cantilever* do AFM, estudou-se a resolução das equações para os casos de: equilíbrio mecânico, oscilações simples, oscilações amortecidas, oscilações forçadas e oscilações forçadas com amortecimento.

Palavras-chave: Oscilações mecânicas, Métodos de solução de equações, Ensino de Física.

PACS: 01.50.Pa, 01.40.Fk

ISSN 1870-9095

I. INTRODUÇÃO

Um dos primeiros contatos dos estudantes de graduação com a aplicação de equações diferenciais acontece quando estes cursam o chamado “ciclo básico”, constituído pelas disciplinas de Física I, II, III e IV, particularmente na disciplina de Física II, onde se estuda o movimento oscilatório. Porém, de modo mais aprofundado, esse contato se dá na disciplina de Mecânica Clássica, no estudo das oscilações mecânicas, normalmente abordado como segundo tópico do curso, que se segue à introdução das leis de Newton da dinâmica.

Este capítulo da graduação possui um papel crucial no desempenho curricular do graduando, uma vez que a disciplina de Mecânica Clássica comumente é a primeira dos cursos de Física que se segue ao ciclo básico da graduação, no chamado “ciclo profissional”, constituído pelas

disciplinas de Física mais avançadas. Dizendo de outra forma, é nesta disciplina que normalmente os estudantes de Física adquirem o primeiro contato mais aprofundado desta ciência, fazendo parte de uma carreira específica do seu curso e sendo ofertada quase que exclusivamente para estes estudantes, já que normalmente essas disciplinas não estão presentes nos cursos de engenharia e outros afins.

Assim, a abordagem didática a ser aplicada nesta disciplina deve ser bem elaborada, de modo a permitir que o estudante explore completamente a riqueza do conteúdo a ser trabalhado. Pois a Mecânica Clássica, junto com a Teoria Eletromagnética, a Mecânica Estatística e a Mecânica Quântica, constituem o eixo principal da formação em Física, necessário a todas as áreas que se deseja seguir na pós-graduação.

Tendo em vista este panorama, elaborou-se uma estratégia de aula com o objetivo de dinamizar o ensino das

oscilações mecânicas, utilizando para isto, uma aplicação em física da matéria condensada –mais especificamente– em microscopia de força atômica.

Neste artigo, abordaremos os conceitos fundamentais envolvendo a equação de movimento do *cantilever* do AFM no capítulo II, e em seguida, discutiremos as soluções da equação para cada um dos casos diferentes de oscilação.

II. O MICROSCÓPIO DE FORÇA ATÔMICA

A microscopia de varredura por sonda (SPM) é uma família de técnicas de microscopia amplamente utilizadas atualmente em investigações na área de nanociência e nanotecnologia.

Essas técnicas consistem em medir a intensidade das interações entre uma sonda (Fig. 1) e uma amostra de modo a determinar a variação na distância ponta-amostra em cada ponto da superfície da mesma. Isto é, o microscópio funciona montando uma matriz de pontos $z(x,y)$, onde z representa a distância ponta-amostra, e x e y são as coordenadas ao longo da superfície da amostra [1].

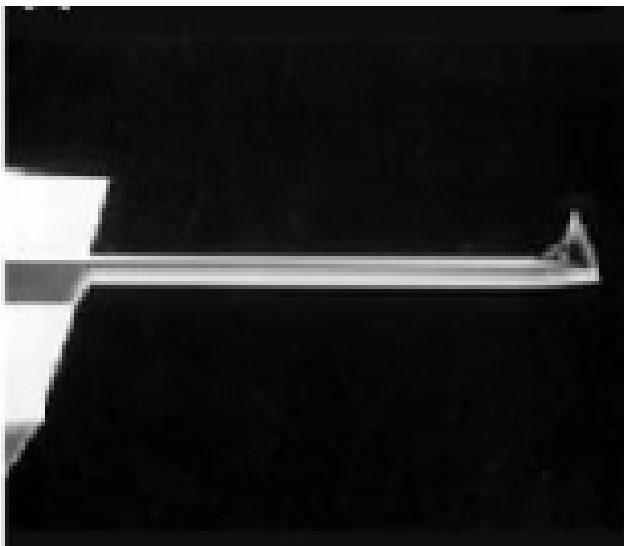


FIGURA 1. Haste (*cantilever*) de um microscópio de força atômica, com a ponta (sonda) montada em sua extremidade. Imagem obtida com microscopia eletrônica de varredura (MEV).

Os dados obtidos são utilizados para montar uma imagem da topografia (como montanhas e vales) da superfície, através da conversão dos valores de z em pixels, por um módulo eletrônico acoplado ao microscópio, como mostrado na Figura 2.

As imagens obtidas são uma representação do relevo da superfície do material analisado, e fornecem muitas informações importantes sobre sua estrutura. Isto permite o estudo de propriedades como: rugosidade, adesão, hidrofobicidade, dureza e resistência mecânica, para citar algumas [2].

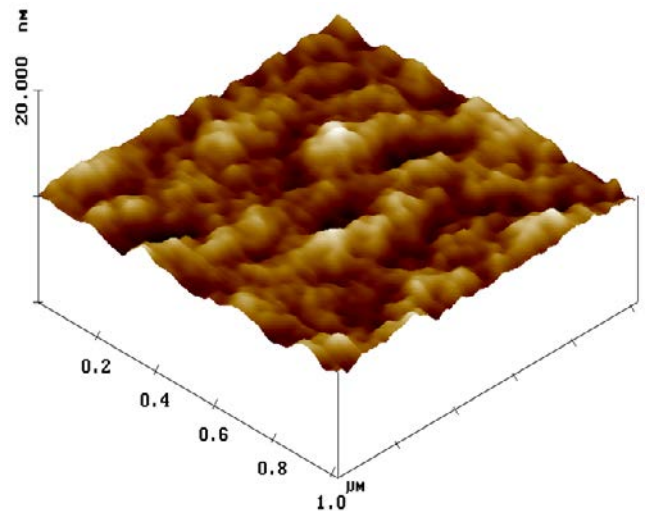


FIGURA 2. Topografia em escala manométrica de amostra padrão de Si obtida com AFM.

Dentro da família SPM, encontra-se o Microscópio de Força Atômica (AFM), que funciona medindo as deflexões do *cantilever*, que é uma haste na qual é montada a ponta que interage com a amostra (Fig. 3).

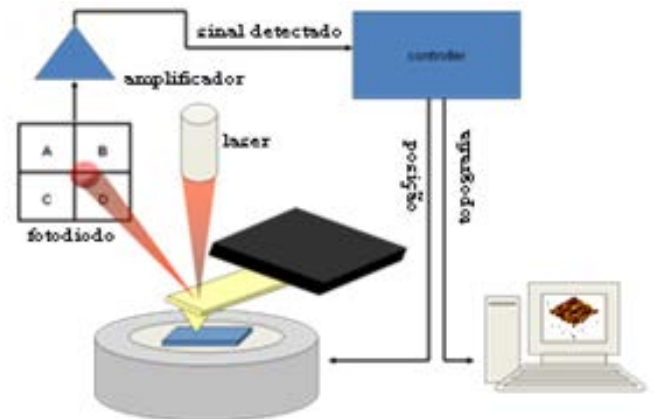


FIGURA 3. Esquema de um AFM. As deflexões do *cantilever* durante a varredura mudam o ângulo de reflexão do laser que é detectado pelo fotodiodo. O controlador recebe estas informações e gera um sinal para a cerâmica piezolétrica que se move para ajustar a distância ponta-amostra. A cada movimento da cerâmica o controlador registra os dados e gera a imagem da superfície.

Entre a ponta do AFM e a amostra, assim como entre quaisquer outros dois materiais em contato ou suficientemente próximos, existem forças de interação intermoleculares, que são atrativas enquanto a ponta está afastada da amostra e repulsivas quando a ponta se aproxima ou toca a amostra.

Este aparelho pode ser operado em três diferentes modos de funcionamento.

O primeiro é chamado de “modo de contato”, no qual a sonda mantém-se continuamente na zona de forças

repulsivas com a amostra. Outro modo de funcionamento do AFM é o modo de não contato, em que a ponta não toca a amostra durante toda a varredura e as interações existentes são essencialmente atrativas.

Há ainda o modo de contato intermitente, ou modo *tapping*, no qual um sinal de excitação é aplicado à haste fazendo com que ela vibre, tocando a superfície da amostra uma vez a cada oscilação.

O *cantilever*, neste último modo de operação, tem sido modelado como o um oscilador harmônico amortecido e forçado não-linear [2], cujo movimento é governado pela seguinte equação:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -kz - \frac{m\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + F_0 \cos(\omega t) + F(z, z_c). \quad (1)$$

Na equação acima, m , k , ω_0 e Q representam respectivamente, a massa, a constante de mola, a frequência de ressonância e o fator de qualidade da haste, determinado através de suas dimensões e do material de que é composto.

O termo $-kz$ é a força elástica, e o termo $-\frac{m\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt}$ representa o amortecimento do meio. O termo senoidal $F_0 \cos(\omega t)$ é o sinal de excitação aplicado ao *cantilever* e $F(z, z_c)$ é a interação entre a ponta e a amostra na posição de equilíbrio z_c .

Diferentes modelos têm sido propostos para determinar $F(z, z_c)$. Se as forças de adesão ou as forças de interação tipo Van der Waals entre a sonda e a superfície podem ser desprezadas, produz-se no *cantilever* deformações puramente elásticas. Assim, somente atuam entre a ponta e a amostra a força de deformação elástica e a solução é dada de duas maneiras distintas, separadas pela distância a_0 (Fig. 3).

Para a zona de não-contato, a forma de $F(z, z_c)$ é obtida considerando-se as interações de Van der Waals. Assim, aproximamos a ponta de interação do *cantilever* com a superfície por uma esfera presa a uma mola interagindo com uma superfície plana, como indicado na Figura 4. Na zona de contato a força repulsiva é determinada pela força de indentação, obtida a partir do modelo de Hertz [3]:

$$F(z, z_c) = -\frac{AR}{6(z_c + z)^2}, \quad z_c + z \leq a_0, \quad (2a)$$

$$F(z, z_c) = -\frac{A}{6a_0} + \frac{4E\sqrt{R}}{3-3\nu^2} (a_0 - z - z_c)^{3/2}, \quad z_c + z \leq a_0, \quad (2b)$$

em que R é o raio da ponta, A é a constante de Hamaker, e E e ν são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson da amostra, respectivamente.

Entretanto, além das deformações elásticas, o modelo utilizado para explicar a penetração da ponta na amostra, fenômeno denominado nanoindentação, deve levar em consideração também as deformações plásticas, isto é, as deformações permanentes no material. Para isso é necessário

incluir alguns aspectos de análise tensorial, como a equação da Lei de Hooke generalizada e o tensor de deformações [4].

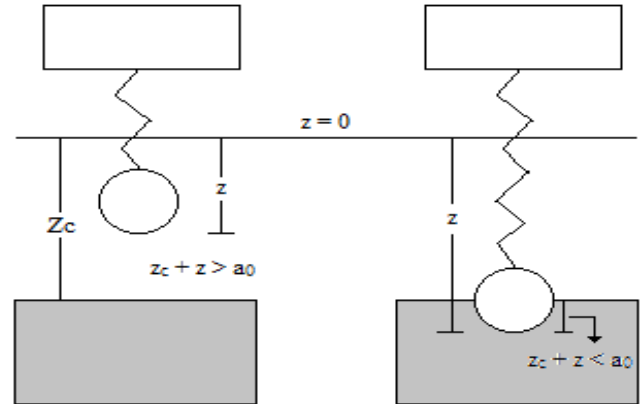


FIGURA 4. Interação ponta-amostra no modo de *tapping*. À esquerda, a ponta está afastada e, à direita, a ponta indenta elasticamente a superfície.

Em todo caso, a existência do termo $F(z, z_c)$ na Equação (1) é responsável por inserir outros modos de vibração da haste, comparado àquele que esta teria caso o termo acima não existisse [5]. No entanto, a resolução desta equação – nas condições acima determinadas – se dá somente através de métodos numéricos. Para os propósitos deste artigo, a interação entre ponta e superfície é desprezada, e as equações diferenciais são resolvidas apenas para o modo normal de vibração do *cantilever*.

III. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Desprezando-se a interação entre a amostra e a sonda, a Eq. (1) fica:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -kz - \frac{m\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + F_0 \cos(\omega t). \quad (3)$$

Iremos agora estudar os métodos para se determinar a solução geral desta equação considerando-se diferentes situações físicas.

A. 1º caso: Equilíbrio Dinâmico

Neste caso, a força resultante sobre o *cantilever* é nula, portanto a Eq. (3) toma a forma:

$$kz + \frac{m\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} = F_0 \cos(\omega t). \quad (4)$$

A solução desta equação pode ser obtida pelo método do fator de integração. Este método se aplica a equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x),$$

e consiste em multiplicar a equação por uma função $h(x)$, de modo que o lado esquerdo da equação se torne a derivada de um produto. Este fator de integração é dado por e^{at} .

Reescrevendo (4) obtemos:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{kQ}{m\omega_0}z = \frac{F_0Q}{m\omega_0}\cos(\omega t).$$

Multiplicando por $e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t}$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} + \frac{kQ}{m\omega_0} e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} z &= \frac{F_0Q}{m\omega_0} \cos(\omega t) e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t}, \\ \frac{d}{dt} \left(z e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} \right) &= \frac{F_0Q}{m\omega_0} \cos(\omega t) e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t}. \end{aligned}$$

Integrando em função do tempo:

$$\begin{aligned} \int d \left(z e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} \right) dt &= \frac{F_0Q}{m\omega_0} \int \cos(\omega t) e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} dt, \\ z e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} &= \frac{F_0Q}{m\omega_0} \int \cos(\omega t) e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Integrando por partes a integral do lado direito de (5), temos:

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega t) e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t} dt &= \left(\frac{k^2 Q^2}{k^2 Q^2 + m^2 \omega^2 \omega_0^2} \right) \left[\cos \omega t + \frac{m\omega\omega_0}{kQ} \sin \omega t \right] \frac{m\omega_0}{kQ} e^{\frac{kQ}{m\omega_0}t}. \end{aligned}$$

Substituindo em (5), temos

$$z = \frac{F_0 k Q^2}{k^2 Q^2 + m^2 \omega^2 \omega_0^2} \cos \omega t + \frac{F_0 Q m \omega \omega_0}{k^2 Q^2 + m^2 \omega^2 \omega_0^2} \sin \omega t. \quad (6)$$

Esta solução mostra que o *cantilever* se comporta como um oscilador harmônico, uma vez que sua equação de movimento é uma combinação linear de termos harmônicos, isto é, termos senoidais.

B. 2º caso: Oscilações simples

Neste caso, considera-se que o *cantilever* não está sujeito a forças de amortecimento e nem a forças externas, de modo que a força elástica é igual à força resultante. Assim, a Eq. (3) toma a seguinte forma:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz.$$

Ou ainda, considerando que $\omega_0^2 = k/m$ e reescrevendo a equação acima:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0. \quad (7)$$

Ao buscar a solução geral da equação (7), deve-se encontrar uma função da forma e^{rt} , porquanto a segunda derivada reproduz a função original. Supondo então uma solução deste tipo, chega-se ao seguinte resultado:

$$z = C e^{rt};$$

$$\frac{dz}{dt} = C r e^{rt};$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = C r^2 e^{rt}.$$

O que, substituindo na eq. (7), leva a:

$$r^2 + \omega_0^2 = 0,$$

$$r = \pm i C_0. \quad (8)$$

O resultado expresso em (8) mostra que há duas possíveis soluções para esta equação. É conveniente expressar uma solução geral como combinação linear destas duas soluções mais simples, de modo que a função assim obtida continua sendo solução de (7).

$$z = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t},$$

$$z = A_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + A_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t),$$

$$z = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_0 t. \quad (9)$$

Se fizermos uma substituição conveniente, poderemos expressar esta solução na forma de uma amplitude A e uma fase φ [6], da seguinte forma:

$$A_1 + A_2 = A \cos \varphi, \quad (10a)$$

$$A_1 - A_2 = iA \sin \varphi. \quad (10b)$$

Substituindo (10) em (9):

$$\begin{aligned} z &= A \cos \varphi \cos \omega_0 t - A \sin \varphi \sin \omega_0 t, \\ z &= A \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

A equação (11) é a solução geral de (7). As constantes A e φ devem ser determinadas através das condições de contorno, que normalmente são os valores da posição ($z_0 = z(0)$) e da velocidade ($\dot{z}_0 = \frac{dz}{dt}(0)$) no instante inicial $t = 0$.

C. 3º caso: Oscilações amortecidas

Neste caso, considera-se que o movimento da haste é amortecido pelo meio, que pode ser o ar, água, ou qualquer outro fluido. Neste caso, a eq. (3) assume a forma:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - \frac{m\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt}. \quad (12)$$

Ou ainda

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0.$$

Procede-se supondo uma solução da mesma forma que na situação anterior, obtendo-se deste modo:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega^2 = 0,$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega^2},$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}.$$

Devem-se considerar três diferentes possibilidades quanto ao termo dentro da raiz [6,7]. Se $\omega_0 > 4Q^2\omega^2$, então o termo dentro da raiz é positivo e a raiz é um número real, portanto a solução da Eq. (12) é:

$$z = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(C_1 e^{\left(\frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}\right)t} \right).$$

Diz-se neste caso que o movimento do *cantilever* é super-amortecido e o oscilador atinge, sem oscilar, uma posição de estabilidade determinada por C_1 e C_2 .

Outra possibilidade acontece quando $\omega_0 = 4Q^2\omega^2$ onde, nesta hipótese, o termo da raiz é nulo e a solução geral de (12) é simplesmente:

$$z = C e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}.$$

Este é o decaimento de amplitude mais rápido que o objeto pode executar sem oscilar, chamado movimento criticamente amortecido.

O terceiro caso a se considerar se dá quando $\omega_0^2 < 4Q^2\omega^2$.

Neste caso o termo dentro da raiz é negativo e a raiz é um número complexo. Chama-se a este movimento de sub-amortecido, pois o decaimento da amplitude ocorre gradativamente à medida que a haste oscila. A solução geral de (12) neste caso é:

$$z = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(C_1 e^{i\left(\frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}\right)t} + C_2 e^{-i\left(\frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}\right)t} \right),$$

que, usando a equação de Euler, pode ser escrita como:

$$z = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(C_1 e^{\left(\frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{1}{2Q}\sqrt{\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2}\right)t} \right).$$

Esta é a situação típica de operação do *cantilever* do microscópio de força atômica experimentalmente. Uma vez que, tipicamente $Q^2 \approx 10^4$, temos, portanto:

$$\omega_0^2 - 4Q^2\omega^2 \approx -4Q^2\omega^2 \quad [7]:$$

$$z = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [(C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t)].$$

Fazendo a seguinte substituição:

$$C_1 + C_2 = C \cos \varphi,$$

$$C_1 - C_2 = iC \sin \varphi.$$

Logo

$$z = C e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (13)$$

A Eq. (13) é a equação de movimento para o *cantilever*, com movimento amortecido. O termo exponencial denomina-se envelope, visto que ele determina o decaimento da amplitude de oscilação.

D. 4º caso: Oscilações forçadas

Quando se aplica uma força, através de um sinal de excitação, ao *cantilever* e desconsiderando o amortecimento do meio, a eq. (3) fica:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -kz + F_0 \cos(\omega t). \quad (14)$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (15)$$

As soluções gerais de equações da forma de (15) são dadas pela soma de uma solução complementar (solução homogênea) com uma solução particular (solução não-homogênea), sem que esta perca generalidade.

$$z = z_c + z_p.$$

A solução complementar é dada pela Eq. (11). Para encontrar uma solução particular, supõe-se uma função harmônica que oscila em fase ($\varphi = 0$) e com a mesma frequência ω que a fonte:

$$z_p = B \cos(\omega t). \quad (16)$$

Substituindo (16) em (15), encontra-se

$$-B\omega^2 \cos(\omega t) + B\omega_0^2 \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t),$$

$$B = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (17)$$

Então, a vibração do *cantilever* é composta de combinações lineares de modos normais, porém agora cada pequena oscilação ocorre com a frequência da força aplicada.

Como consequência do denominador da Eq. (17), quanto mais próximo ω estiver de ω_0 mais intensa será a excitação

sobre este modo de vibração. Aparentemente, a Eq. (17) prediz uma amplitude infinita quando $\omega = \omega_0$. Porém isto não é fisicamente plausível, uma vez que a teoria por trás desta equação está fundamentada para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio; de modo que (17) já não é válida se a amplitude se torna muito grande.

Portanto, a solução geral é dada por:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t). \quad (18)$$

As constantes A e φ devem ser determinadas através das condições de contorno.

Se $\omega = \omega_0$ então a suposição da Eq. (16) é uma solução do problema homogêneo, e deve ser substituída por outra da forma

$$z_p = Bt \cos(\omega_0 t).$$

Este termo apresenta um crescimento linear de amplitude à medida que oscila, o que caracteriza o fenômeno de ressonância. O oscilador, desse modo, recebe continuamente energia fornecida pela força externa.

E. 5º caso: Oscilações amortecidas e forçadas

Este é o caso mais geral em nossa descrição, no qual a Eq. (3) não sofre nenhuma modificação. A frequência de um oscilador forçado é determinada pela frequência da força externa e não pela frequência de ressonância [8]. Para estudar qual seria a solução geral neste caso, se escreve a Eq. (3) da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (19)$$

Assim como para a Eq. (15), a solução geral para a Eq. (19) envolve uma solução complementar e uma solução particular. Pelas mesmas razões do caso anterior, a solução complementar é a solução da equação homogênea, Eq. (13).

Para encontrar a solução particular de (19), supõe-se uma função da forma:

$$z_p(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t). \quad (20)$$

Substituindo (20) em (19), e resolvendo o sistema linear, obtêm-se $D_1 = 0$ e $D_2 = F_0 Q / \omega^2$. Logo a solução particular é:

$$z_p = \frac{F_0 Q}{\omega^2} \sin(\omega t).$$

E, por sua vez, a solução geral é:

$$z(t) = C e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0 Q}{\omega^2} \sin(\omega t). \quad (21)$$

IV. CONCLUSÃO

Ao aplicar-se as equações diferenciais a uma área de pesquisa recente e instigante, o assunto passa a ser melhor compreendido pelos estudantes, obtendo grandes resultados de aprendizado. Isto evidencia também o caráter prático da matemática que se estuda na graduação, assimilando-a a conceitos físicos e fazendo com que a aprendizagem seja mais significativa.

Isto contribui também para a formação profissional do acadêmico, pois a disciplina de mecânica clássica é essencial para as outras disciplinas subsequentes da graduação e, eventualmente, da pós-graduação.

V. ACKNOWLEDGEMENTS

Nós agradecemos ao DISSE/CNPq pelo suporte financeiro.

VI. REFERÊNCIAS

- [1] Ternes, M. *et al.*, *The force needed to move an atom on a surface*, *Science* **319**, 1066-1069 (2008). DOI: 10.1126/science.1150288.
- [2] Tamayo, J. & García, R., *Deformation, contact time and phase contrast in tapping mode scanning force microscopy*, *Langmuir* **12**, 4430-4435 (1996). DOI: 10.1021/la960189l.
- [3] Israelachvilli, J. N., *Intermolecular and surface forces*, 3rd Edition (Elsevier, Philadelphia, 2011). ISBN: 978-0-12-375182-9.
- [4] Cichocki, A. *et al.*, *Nonnegative matrix and tensor factorizations: applications to exploratory multi-way data analysis and blind source separation*. (John Wiley and Sons, Hoboken, 2009). ISBN: 978-0-470-74666-0.
- [5] Thornton, S. & Marion, J. *Classical Dynamics of particles and Systems*, 5th Ed. (Thomson Brooks Cole, Boston, 2004). ISBN-10: 0534408966, ISBN-13: 978-0534408961.
- [6] Goldstein, H., Poole, C. & Safko, *Classical Mechanics*, 3rd Ed., (Adison-Wesley, Reading, 2000). ISBN-10: 0201657023, ISBN-13: 978-0201657029.
- [7] Holscher, H. & Schwarz, U. D., *Theory of amplitude modulation atomic force microscopy with and without Q-control*, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **42** (2007). DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.01.018.
- [8] Boyce, W. & Di Prima, R., *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, 7th Ed. (LTC, Rio de Janeiro, 2004). ISBN: 9788521617563.