

Dinámica lineal para el crecimiento de plantas y frutos con simetría definida



P. Campos-Meza^{1,2}, G. Atondo-Rubio¹, C.M. Yee-Rendón¹

¹Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa, Ciudad Universitaria s/n, 80010 Culiacán, Sinaloa, México.

²Instituto Tecnológico Superior de Eldorado, Avenida Tecnológico s/n, Col. Rubén Jaramillo C.P. 80450 Eldorado, Culiacán, Sinaloa, México.

E-mail: pedrocamposmeza@gmail.com

(Recibido el 9 de Noviembre de 2015, aceptado el 31 de Marzo de 2016)

Resumen

En este trabajo presentamos un modelo dinámico para el comportamiento global de crecimientos naturales (plantas, animales, personas, poblaciones, etc.), basado en una generalización de la segunda ley de Newton y de la mecánica analítica de Hamilton aplicadas a crecimientos naturales. El modelo puede ser usado para describir la dinámica de crecimiento de plantas y tallos o tubérculos con simetría cilíndrica o cónica, y en frutos con simetrías esferoide y elipsoide (prolato y oblatos). Aplicamos el modelo para frutos de simetría esférica y se presentan los resultados obtenidos para los coeficientes de estímulo y de impulso al crecimiento, así como el potencial de crecimiento para frutos de naranjo

Palabras clave: Dinámica y potenciales de crecimientos, coeficientes de estímulo y de impulso.

Abstract

We present a dynamic model for the overall behavior of natural growths (plants, animals, people, populations, etc.), based on a generalization of the Newton's second law and Hamilton's analytic mechanics applied them to natural growths. The model can be used to describe the dynamics of growth for plants and stems or tubers with cylindrical or conical symmetry, and fruits with spheroid and ellipsoid (prolate and oblate) symmetries. We apply the model to fruits with spherical symmetry and the resulting stimulus's coefficient and boost's coefficient to growth and growth potential orange fruits are presented.

Keywords: Growth's dynamic and potentials, stimulus and boost coefficients.

PACS: 87.19.Ix, 87.10.Ed, 87.18.Vf

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

A. Geometría Dinámica

Muchos frutos y tallos de plantas y árboles (incluso algunos animales) poseen simetrías en su morfología instantánea, de tal forma que ésta puede ser descrita por objetos geométricos conocidos, tales como elipsoides, esferas, cilindros, conos, etc. Entre más simétrico es un sistema físico o biológico, más sencilla es su descripción matemática, siempre que se elija el sistema coordenado adecuado. Los objetos geométricos son estáticos mientras que los crecimientos naturales son dinámicos. Si se supone que la simetría instantánea es mantenida durante el desarrollo de estos sistemas, es posible representarlos mediante sucesiones espacio-temporales de los objetos geométricos citados. Los diámetros, los semiejes, la altura, etc. de estos sistemas varían en el tiempo y dan lugar a este tipo de sucesiones espacio-temporales, desplegando así la *geometría dinámica de la naturaleza*.

En la mayoría de los crecimientos naturales sus parámetros externos (alturas y diámetros de tallos, de *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 10, No. 3, Sept. 2016*

frutos, altura y peso de animales y personas, poblaciones, etc.) pueden ser descritos mediante ajustes polinomiales o sigmoidales a los datos [1]. Las figuras 1, 2, 3 y 4 son algunos ejemplos de esto [2].

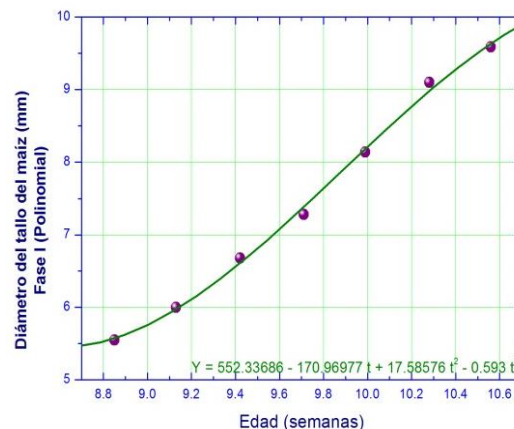


FIGURA 1. Ajuste cúbico para el diámetro del tallo en plantas de maíz.

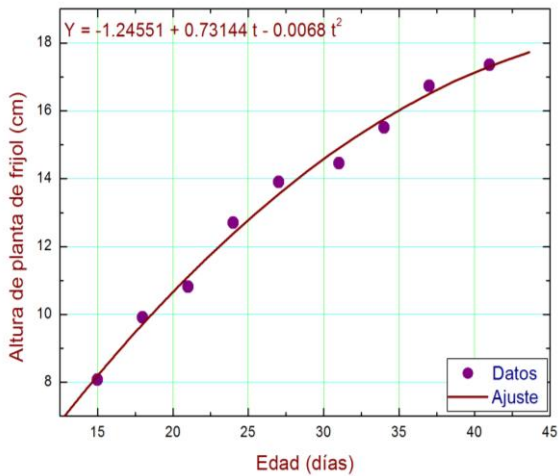


FIGURA 2. Ajuste cuadrático para la altura en plantas de frijol.

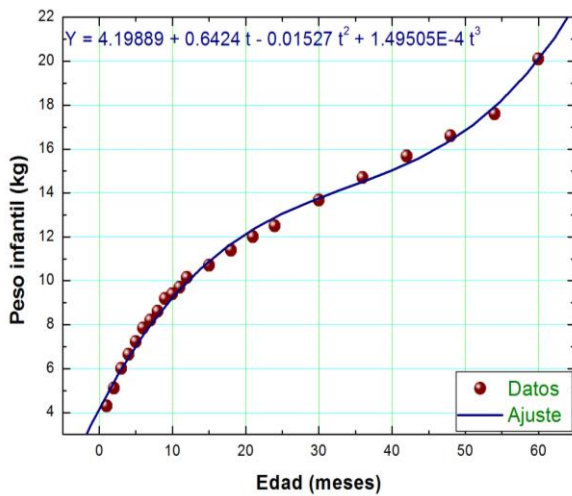


FIGURA 3. Ajuste cúbico para el peso infantil (kg).

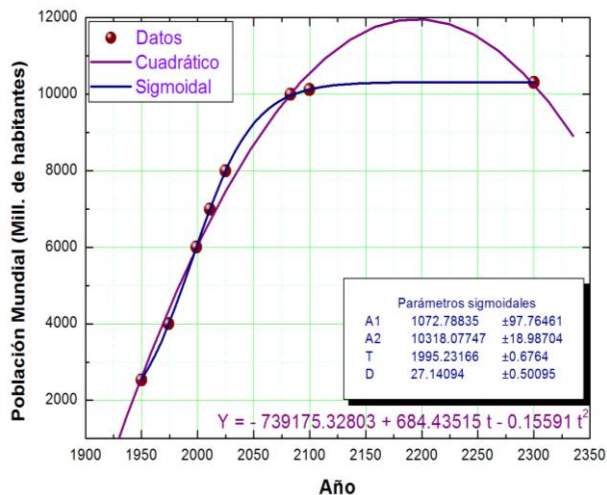


FIGURA 4. Ajuste cuadrático y sigmoidal para el número de habitantes en la población mundial.

B. Descripción del Método

En mecánica analítica el estudio de un sistema físico se inicia con el conocimiento del potencial de interacción del sistema, a partir del cual se construye la función hamiltoniana (o lagrangiana), que contiene la información del sistema. Enseguida se obtienen las ecuaciones de movimiento de Hamilton (o de Lagrange), a partir de las cuales se consigue una ecuación diferencial de segundo orden (segunda ley de Newton) para el sistema. Se resuelve esa ecuación diferencial y se obtiene la trayectoria (solución) del sistema [3]. En un trabajo reciente se desarrolló un modelo dinámico general para describir el comportamiento global de crecimientos naturales (plantas, animales, personas, poblaciones, etc.), como una generalización de la mecánica newtoniana o hamiltoniana. El procedimiento planteado para describir el comportamiento global de desarrollos biológicos es inverso al de la mecánica analítica. En estos casos se inicia con la “trayectoria” del sistema (ajustes a los datos), y se construye una ecuación diferencial de segundo orden (segunda ley de Newton) satisfecha por los ajustes. Esta ecuación diferencial de segundo orden se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y, éstas, son identificadas como las ecuaciones de Hamilton para el crecimiento. Finalmente se obtienen los potenciales de crecimiento para los crecimientos naturales [4].

II. CRECIMIENTOS CON UN GRADO DE LIBERTAD

A. Ecuación de crecimiento

Los aspectos generales del modelo, que conciernen a este trabajo, son los siguientes.

Un conjunto de datos acerca del desarrollo de un sistema biológico admite ajustes polinomiales en el tiempo, de la forma

$$y(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad (1)$$

los cuales obedecen una ecuación diferencial lineal de segundo orden (ecuación de crecimiento)

$$\ddot{y} + (a/m)\dot{y} + (b/m)y = f(t)/m, \quad (2)$$

con término de forzamiento también polinomial en el tiempo

$$f(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k, \quad (3)$$

en donde las constantes c_k se relacionan con aquellas del ajuste polinomial (1),

$$c_k = (k+2)(k+1)ma_{k+2} + (k+1)aa_{k+1} + ba_k, \quad (4)$$

con $c_k = 0$ si $k > n$.

La ecuación (2) es una generalización de la segunda ley de Newton aplicada al comportamiento global de crecimientos naturales. Ella contiene la suma de fuerzas externas (lineales) que actúan sobre el sistema. Existen sin embargo algunas diferencias importantes con la segunda ley convencional: 1) En la ecuación de crecimiento (2) m representa la inercia al crecimiento y sus unidades dependen del tipo de crecimiento que se analice. Si en (2) y es una longitud (diámetro o semiejes de frutos, o altura o de tallos, animales o personas) m posee unidades masa (kg). Si y es el peso de un fruto, planta, animal o persona, entonces m posee unidades de longitud (m). Si en (2) y representa el número de habitantes de una población, entonces m posee unidades kg m/hab. 2) La ecuación de crecimiento (2) contempla $a < 0$ y $b < 0$, por lo que aparecen contribuciones de impulso y de estímulo a los crecimientos: $f_{imp} = -(b/m)y$, $b < 0$ (la fuerza va en la misma dirección del crecimiento); $f_{ext} = -(a/m)\dot{y}$, $a < 0$ (la fuerza va en la misma dirección de la velocidad de crecimiento) y un término de forzamiento externo $f_{ext}(t)/m$.

Al extrapolar los ajustes polinomiales (1), para tiempos grandes, éstos pueden ser divergentes o negativos, lo cual nunca sucede en los crecimientos reales. Considerando también la etapa de madurez de los sistemas, un ajuste más real (que considera el umbral del crecimiento) es el sigmoideal [5], cuya expresión es

$$y_s = A_2 + \frac{A_1 - A_2}{1 + \exp((t - \tau)/D)}, \quad (5)$$

en donde A_1 y A_2 son el crecimiento inicial y final del sistema, respectivamente. τ es el tiempo de inflexión de la curva y D es una constante del crecimiento.

Una curva típica de los ajustes sigmoideales se muestra en la figura 5.

Este ajuste también obedece una ecuación de crecimiento de tipo (2), con término inhomogéneo (de forzamiento) dado por

$$F(t) = A_2 b + \frac{A_1 - A_2}{D^2} \left[\frac{-2mE^2 + (m + aD)E(1 + E) - bD^2(1 + E)^2}{(1 + E)^3} \right], \quad (6)$$

en donde $E(t) = \exp((t - \tau)/D)$.

B. Potenciales de crecimiento

En esta sección usamos el hecho de que una ecuación diferencial lineal de segundo orden es equivalente a un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden e identificamos éstas últimas como el par de

ecuaciones de Hamilton para los crecimientos. Construimos el hamiltoniano del sistema y, a partir de éste, obtenemos los potenciales generalizados de los crecimientos.

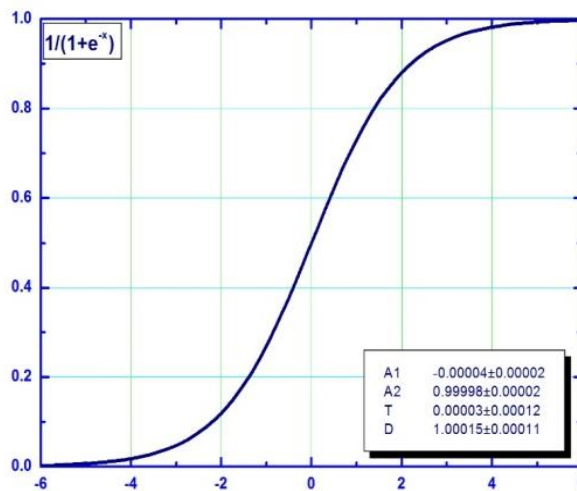


FIGURA 5. Curva sigmoideal típica $y_s = 1/(1 + e^{-x})$.

Iniciamos haciendo el cambio de variable al espacio fase:

$$y_1 = y, \quad y_2 = m \dot{y} = p \quad (7)$$

con el que la ecuación de crecimiento (2) se reduce a

$$\dot{y}_1 = \frac{y_2}{m} \quad (8)$$

$$\dot{y}_2 = m \ddot{y} = -by_1 - \frac{a}{m} y_2 + g(t), \quad (9)$$

en donde usamos $g(t)$ para representar a $f(t)$ o $F(t)$.

En las siguientes secciones se verá el argumento para considerar a m como constante.

El sistema (8) y (9) puede ser visto como el par de ecuaciones de Hamilton del desarrollo biológico (y_1 y y_2 son variables canónicas conjugadas), las cuales pueden escribirse como

$$\dot{y}_1 = \frac{y_2}{m} = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad (10a)$$

$$\dot{y}_2 = -by_1 - \frac{a}{m} y_2 + g(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad (10b)$$

en donde H es la función hamiltoniana del sistema:

$$H(y, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{ayp}{m} + \frac{by^2}{2} - yg(t). \quad (11)$$

Se observa que la ecuación de Hamilton (10b) proporciona la ecuación del crecimiento correcta (2). En (11) identificamos el potencial generalizado del crecimiento como

$$U(y, \dot{y}, a, b, t) = ay\dot{y} + \frac{1}{2}by^2 - yg(t) \quad (12)$$

Si el sistema biológico posee más de un grado de libertad, como el diámetro y la altura de plantas o peso y estatura de personas etc., habrá tantas funciones hamiltonianas (11) y potenciales generalizados (12) como grados de libertad en el sistema. Sin embargo si las variables de interés no son independientes aparecen ligaduras entre ellas y esto reduce el número de grados de libertad y así mismo la cantidad de hamiltonianos y de potenciales de crecimiento en los sistemas.

Algo importante de estos potenciales de crecimiento es que tienen la misma forma sin importar la naturaleza de los desarrollos biológicos estudiados (plantas, animales, personas, poblaciones, etc). Más aun, en la deducción de H y de U no nos hemos restringido a ningún ajuste o forzamiento en particular. $y(t)$ y $g(t)$ pueden ser polinomiales, sigmoides o de cualquier otro tipo. Esto significa que (11) y (12) son válidas para cualquier tipo de crecimiento y de término de forzamiento externo presente en estos sistemas.

En algún intervalo del dominio de los datos ambos ajustes son muy próximos entre sí. Esto permite obtener una ecuación lineal, en cada tiempo de medición, para los coeficientes de estímulo y de impulso

$$A(a/m) + B(b/m) = M \quad (13)$$

en donde los coeficientes son dados en términos de los parámetros de los ajustes

$$\begin{aligned} A &= \left[\dot{y}_p - \left(\frac{A_2 - A_1}{D} \right) \left(\frac{E}{G^2} \right) \right], \\ B &= \left[y_p - A_2 + \left(\frac{A_2 - A_1}{G} \right) \right], \\ M &= \left(\frac{A_2 - A_1}{D^2} \right) \left(\frac{E - E^2}{G^3} \right) - \ddot{y}_p, \end{aligned} \quad (14)$$

con $G = E + 1$.

Ambos ajustes (polinomial y sigmoidal) arrojan incertidumbres en los valores de sus parámetros, por lo que es posible obtener valores mínimos (-) y máximos (+) para los coeficientes dados en (14). Esto conlleva a un conjunto de n (número de datos) pares de ecuaciones lineales, de la forma (13), que deben resolverse para obtener la dinámica de los coeficientes (a/m) y (b/m) . Finalmente se investigan las posibles correlaciones entre estos coeficientes y los factores físicos que intervienen en los crecimientos.

III. CRECIMIENTOS TRIDIMENSIONALES

A. Grados de libertad

En dinámica clásica, el estudio de un sistema de n grados de libertad se inicia con n ecuaciones diferenciales del tipo (2), las cuales generan n soluciones $y_i(t)$. Eliminando el tiempo entre pares de estas soluciones se obtienen las "trayectorias del proceso", ejemplo $y(x)$ las cuales reducen los grados de libertad del sistema.

En el tratamiento dinámico del comportamiento global de los crecimientos naturales, con n grados de libertad, se inicia con n "soluciones" (ajustes a los datos) los cuales generan n ecuaciones diferenciales de crecimiento del tipo (2). Eliminar el tiempo entre pares de estas "soluciones" reduce el número de ecuaciones diferenciales de crecimiento necesarias, por lo que también se reducen los pares de coeficientes de estímulo (a/m) y de impulso (b/m) requeridos en la dinámica de crecimiento del sistema.

En este trabajo se describe la dinámica de crecimiento de plantas y frutos (tridimensionales), lo que significa que son requeridas tres ecuaciones diferenciales de crecimiento del tipo (2) y por lo tanto tres pares de coeficientes de estímulo (a/m) y de impulso (b/m) . Sin embargo, debido a la simetría de algunos frutos y tallos de plantas o árboles, es posible reducir el número de ecuaciones diferenciales de crecimiento y de pares de coeficientes de estímulo (a/m) y de impulso (b/m) requeridos.

B. Crecimientos esféricos.

Algunos frutos como la naranja, la toronja y el limón, exhiben un desarrollo en sucesiones temporales con simetría esférica.

La expresión matemática para cada término de estas sucesiones es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_t^2. \quad (15)$$

Aunque estos cuerpos son tridimensionales es posible describirlos, debido a su simetría esférica, como sistemas de un solo grado de libertad (su radio). En coordenadas esféricas la ecuación de una esfera es $r_t = cte$. Si durante el desarrollo de estos frutos se realizan n mediciones del diámetro d en el tiempo, éstos pueden ser descritos como n esferas concéntricas sucesivas, con ecuaciones

$$r_t = d_t / 2, \quad (16)$$

con $t = 1, 2, \dots, n$ (número de mediciones).

Al llevar a cabo los ajustes (polinomial o sigmoidal) para el conjunto de datos, el diámetro pasa a ser la variable dinámica ($y \rightarrow d$) por lo que es posible aplicar el modelo dinámico implicado en las ecuaciones (1) a (8) y obtener el

comportamiento de los coeficientes de impulso y de estímulo.

En su investigación: Descripción del crecimiento de frutos de naranja dulce [6]..., Avanza *et al* muestran las curvas (no polinomial y no sigmoideal) de crecimiento de estos frutos, las cuales corresponden a los datos mostrados en la tabla I.

TABLA I. Diámetro, en mm, de frutos de naranjo dulce, 66 días después de la floración al 80 %.

| Día | Diámetro (mm) | Día | Diámetro (mm) |
|-----|---------------|-----|---------------|
| 66 | 23 | 182 | 58 |
| 74 | 27.4 | 188 | 58.4 |
| 86 | 31.7 | 196 | 60.6 |
| 92 | 34.6 | 204 | 62 |
| 98 | 36.7 | 210 | 62.7 |
| 105 | 37.4 | 217 | 63.4 |
| 115 | 41.8 | 226 | 64.9 |
| 120 | 44.7 | 231 | 65.6 |
| 127 | 46.8 | 238 | 67 |
| 134 | 48.3 | 245 | 67.8 |
| 140 | 50.5 | 252 | 68.5 |
| 147 | 51.2 | 260 | 69.2 |
| 153 | 53 | 266 | 69.6 |
| 161 | 53.4 | 274 | 69.6 |
| 168 | 54.8 | 282 | 70.7 |
| 175 | 56.9 | 289 | 71 |

Los ajustes polinomial y sigmoideal, en metros y segundos, se muestran en la figura 6.

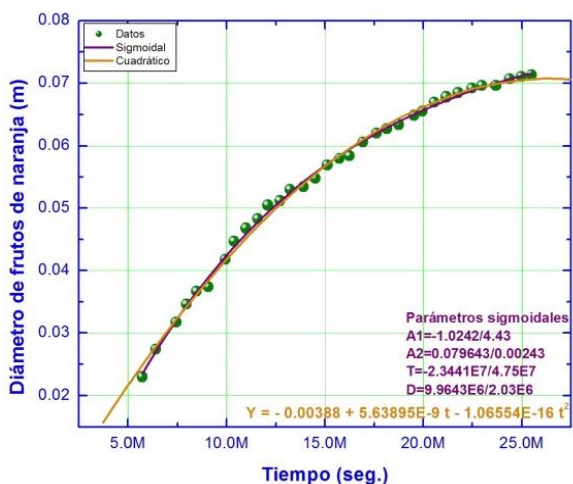


FIGURA 6. Ajuste polinomial y sigmoideal del diámetro del fruto de naranjo.

A partir de los valores de los parámetros de los ajustes polinomial y sigmoideal y sus respectivas incertidumbres, se consiguen 33 (número de datos) pares de ecuaciones lineales de la forma (13), cada una con coeficientes dados por (14). Sus soluciones arrojan los valores mostrados en la *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 10, No. 3, Sept. 2016*

tabla II para los coeficientes de impulso y de estímulo al crecimiento.

TABLA II. Valores de los coeficientes de impulso (a/m) y de restauración (b/m) para el crecimiento del fruto de naranjo.

| Día | (a/m) (1/s) | (b/m) (1/s ²).E-7 | Día | (a/m) (1/s) | (b/m) (1/s ²).E-7 |
|-----|-------------|-------------------------------|-----|-------------|-------------------------------|
| 66 | -0.71 | 2.5 | 182 | -0.71 | 0.90 |
| 74 | -0.71 | 2.23 | 188 | -0.71 | 0.87 |
| 86 | -0.71 | 1.92 | 196 | -0.71 | 0.84 |
| 92 | -0.71 | 1.79 | 204 | -0.71 | 0.80 |
| 98 | -0.71 | 1.68 | 210 | -0.71 | 0.78 |
| 105 | -0.71 | 1.57 | 217 | -0.71 | 0.76 |
| 115 | -0.71 | 1.43 | 226 | -0.71 | 0.73 |
| 120 | -0.71 | 1.37 | 231 | -0.71 | 0.71 |
| 127 | -0.71 | 1.3 | 238 | -0.71 | 0.69 |
| 134 | -0.71 | 1.23 | 245 | -0.71 | 0.67 |
| 140 | -0.71 | 1.18 | 252 | -0.71 | 0.65 |
| 147 | -0.71 | 1.12 | 260 | -0.71 | 0.63 |
| 153 | -0.71 | 1.08 | 266 | -0.71 | 0.62 |
| 161 | -0.71 | 1.02 | 274 | -0.71 | 0.60 |
| 168 | -0.71 | 0.98 | 282 | -0.71 | 0.58 |
| 175 | -0.71 | 0.94 | 289 | -0.71 | 0.57 |

El desarrollo del fruto se lleva a cabo, en este modelo, mediante un estímulo constante (a/m) = -0.71 (1/s), (<0), a la vez que con un coeficiente de restauración (b/m > 0) muy pequeño (E-7) y cada vez tendiendo más a cero.

La figura 7, muestra el comportamiento del coeficiente de restauración.

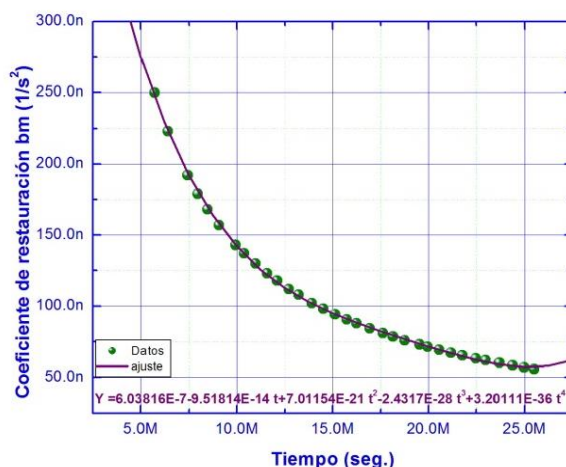


FIGURA 7. Comportamiento del coeficiente de restauración b/m.

La figura 8 muestra el potencial de crecimiento para este sistema.

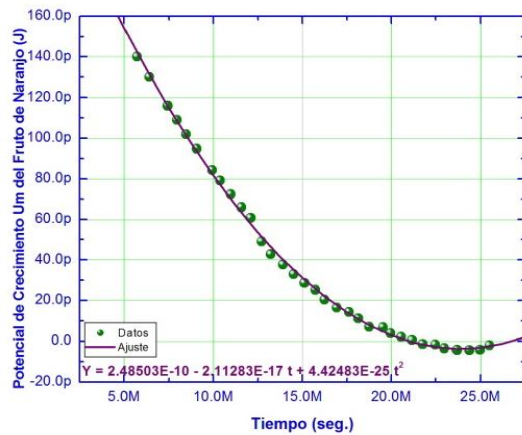


FIGURA 8. Potencial de crecimiento del fruto de naranjo.

V. CONCLUSIONES

El coeficiente (a/m) proporciona un impulso constante al crecimiento, durante el desarrollo del fruto, mientras que la restauración debida a (b/m) es pequeña ($E-7$) al inicio del desarrollo, pero tiende a desaparecer en la etapa de madurez del fruto. La energía potencial disponible para el crecimiento del fruto es de 140 pJ al inicio del desarrollo y desciende hasta hacerse nula alrededor de los 22.5 Ms (160 días) del desarrollo. El potencial de crecimiento tiene un mínimo en 23.9 Ms = 276.32 días, a partir de entonces el desarrollo del fruto es prácticamente nulo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo de PROFAPI2011/015 y PROFAPI2012/014.

REFERENCIAS

- [1]. Machorro-Sámamo, Aplicación de la regresión polinomial en el modelo de crecimiento hocico-cloaca en relación con el peso en iguana negra, *Ciencia y Mar* XIII, 21-28 (2009). Quiñonez-Velázquez & Gómez-Muñoz, Crecimiento individual de larvas de la anchoveta norteña, *CalCOFI Rep.* XXVII, (1986). Cedillo-Filho, Crecimiento y producción de repollo en función de la densidad de población y nitrógeno, *Agrociencia* 45, No. 5, (2011).
- [2] Campos-Meza, P., *Modelos Dinámicos Aplicados a Crecimientos Naturales*, Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Sinaloa, (2015).
- [3] Goldstein, H., *Classical Mechanics*. Third Edition. (Addison Wesley, New York, 2000) pp. 34 y 334. Marion J. B., *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*, segunda edición, (Editorial Reverté, México, 1998). Hauser, W., *Introducción a los Principios de la Mecánica*, (Ed. Uteha, México, 1965).
- [4] Campos-Meza, P., Atondo-Rubio, G., Yee-Rendón, C. M., *Dinámica de Crecimientos Polinomiales*, Congreso Internacional de Investigación, (2013). ISSN 1946-5351 Online 1948-2353 CD ROM. www.celaya.academiajournals.com Vol.5, No. 3 pp. 447-452.
- [5] Seber, G. A. F. & Wild, C. J., *Nonlinear Regresion*, (John Wiley and Sons, Auckland, New Zelanda, 2000), pp. 325-365. Bethea, R. M., Duran B. S. & Boullion, T. L., *Statistical Methods for Engineers and Scientist*. (Marcel Dekker, Inc., New York, 1985).
- [6] Avanza, M. M., Giménez, L., Maza, S. M., Rodríguez, V. A., *Descripción del crecimiento de frutos de naranjo dulce mediante el uso de modelos no lineales*, Comunicaciones Científicas y Tecnológicas (2004). Resumen: A-018. mavanza@arg.unne.edu.ar