

Evaluación de la Incertidumbre en la medición en el laboratorio introductorio de Física



H. Borroto[†], M. Becquer, O. Calzadilla

Departamento de Física General, Universidad de La Habana, San Lázaro y L. C. P. 10400, La Habana, Cuba.

E-mail: hborroto@fisica.uh.cu

(Recibido el 24 de octubre de 2016, aceptado el 10 de junio de 2017)

Resumen

Uno de los objetivos fundamentales del laboratorio introductorio de física en la enseñanza universitaria es analizar los errores que influyen en los resultados experimentales. Los experimentos son sencillos de manera que toda la atención se dedique a la determinación de las incertidumbres asociadas a las fuentes de errores y la representación gráfica de los resultados obtenidos. En el presente trabajo se utilizan dos formas para determinar la aceleración de la gravedad utilizando el método de los mínimos cuadrados: la caída libre de un cuerpo y las oscilaciones de un péndulo simple y se analizan los factores que influyen en los resultados obtenidos.

Palabras clave: Experimentos de laboratorio, mediciones y teoría de errores, métodos de enseñanza.

Abstract

One of the primary objectives of the introductory physics laboratory is to teach error analysis. The experiments are very simple in form that the students take play attention on the ideas of estimation and uncertainty, and to the evaluation of theory by graphical display of data. In this paper, we present two form to determinate the gravity acceleration: the free foil and the oscillation of the pendulum simple then is analysis the influence of the error in the reported result.

Keywords: Laboratory experiments, measurement and error theory teaching methods.

PACS: 01.50.Pa, 06.20.Dk, 01.40.gb

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En la carrera de Licenciatura en Física de la Universidad de La Habana, mediante la Disciplina Física Experimental se introduce al estudiante en el mundo de las mediciones y el procesamiento de datos para la determinación de diferentes magnitudes físicas. Una característica relevante de esta disciplina es que la evaluación de la incertidumbre en la medición se realiza siguiendo las recomendaciones de la “Guía para la evaluación de la incertidumbre de medida” (GUM por sus siglas en inglés) [1]. En el primer semestre de la carrera, el estudiante antes de comenzar los trabajos prácticos recibe una preparación teórica de la aplicación de la GUM. Los trabajos prácticos están diseñados para que los estudiantes utilicen la parte teórica del curso [2] en la enseñanza experimental.

Una magnitud que resulta recurrente para su determinación en el laboratorio introductorio de física en la enseñanza universitaria, es la aceleración de la gravedad g . Son muy diversos los métodos experimentales utilizados para determinar el valor de esta constante. Dos de los más utilizados, por su simplicidad en el montaje, son: la caída libre y las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple.

Es objetivo de este trabajo mostrar cómo se introduce al estudiante en el análisis de las fuentes de incertidumbres que

influyen en la determinación de las magnitudes medidas y la forma en que se evalúan, como se aplica la incertidumbre estándar combinada para magnitudes de medición indirecta y como se reportan los mejores valores medidos y sus incertidumbres, de manera tal que puedan ser comparados los resultados obtenidos por diferentes métodos de medición. También se expondrán las condiciones bajo las cuales se deben conducir las mediciones de forma tal que el estudiante conozca que ellas pueden ser fuentes de incertidumbres a tener en cuenta.

II. DESARROLLO EXPERIMENTAL

A. Determinación de la gravedad utilizando la caída libre de un cuerpo

El estudiante mide el tiempo de caída t para diferentes alturas h y a partir de los valores de las mediciones directa realizadas se construyen los gráficos de $\ln t$ vs. $\ln h$ y de t^2 vs. h , utilizando la expresión:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1)$$

Montaje Experimental:

- Se deja caer libremente un cuerpo desde el reposo para diez posiciones diferentes.
- Se realizan mediciones del tiempo de caída del cuerpo con diez repeticiones para cada altura.

La medición automatizada del tiempo de caída se ha venido realizando desde hace algunos años por diversos procedimientos, usando sensores ópticos o computadoras equipadas con tarjetas de sonido para registrar el impacto contra el suelo [3, 4]. En nuestro experimento utilizamos un sensor de efecto Hall acoplado a la computadora para determinar el tiempo de caída.

Aproximaciones del modelo:

- Se desprecia la fricción con el aire, teniendo en cuenta las pequeñas velocidades del cuerpo en la caída.
- Se considera la aceleración de la gravedad constante, teniendo en cuenta la cercanía a la superficie terrestre y las pequeñas variaciones en la altura.
- No se considera la calibración de los instrumentos.

No se consideran los aportes de estas fuentes de errores a la incertidumbre combinada.

Las fuentes de errores que aportan a la incertidumbre combinada son:

- En las mediciones del tiempo de caída para cada altura se encuentran el valor medio y la desviación estándar experimental:

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} \tag{2}$$

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (t_i - \bar{t})^2}$$

El carácter aleatorio de estas mediciones viene dado por la evaluación de la incertidumbre tipo A:

$$u_A(t) = \frac{s_t}{\sqrt{N}}$$

En las mediciones de la altura está presente la resolución de la escala utilizada e_h . La evaluación de esta incertidumbre es del tipo B, la expresión para su determinación es:

$$u_B(h) = \frac{e_h}{2\sqrt{3}}$$

La incertidumbre estándar combinada para las mediciones de t se evalúa según la expresión:

$$u_c(t) = \sqrt{u_A^2(t) + u_B^2(t)}$$

La incertidumbre estándar combinada para los valores de t^2 viene dada por la expresión:

$$u_c(t^2) = \sqrt{\left[\frac{\partial(t^2)}{\partial t} u(t) \right]^2} = 2tu(t)$$

En el curso teórico fueron deducidas las expresiones para la evaluación de la incertidumbre. También se explica cómo se utiliza el método de los mínimos cuadrados (MMC) para encontrar los parámetros de ajuste y sus incertidumbres [5].

Aplicación del MMC

a) Teniendo en cuenta que la incertidumbre en la determinación del tiempo varía con la altura se utilizan las expresiones para los ajustes que tengan en cuenta esta afectación. Los ajustes se hicieron con el programa Origin. El primer análisis se realiza con un gráfico de $\ln t$ en función de $\ln h$ (Fig. 1):

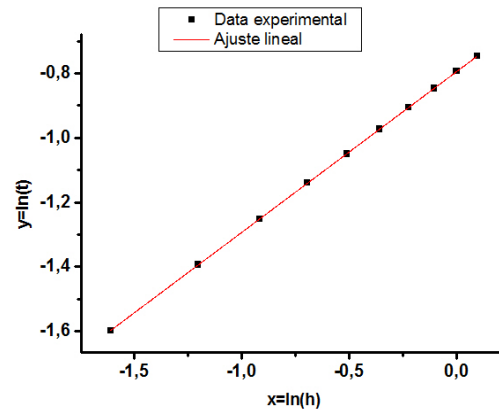


FIGURA 1. Gráfico de $\ln t$ en función de $\ln h$.

De la ecuación (1) se obtiene:

$$\ln t = \frac{1}{2} \ln h - \frac{1}{2} \ln \frac{g}{2} \tag{2}$$

Identificando los términos de la expresión (2) con los de la recta, $y = A + Bx$ se tiene que:

$$y = \ln t, \quad x = \ln h, \quad A = -\frac{1}{2} \ln \frac{g}{2} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{2}$$

Los valores de los parámetros del ajuste se muestran en la Tabla I. El valor de la pendiente B confirma la validez de las aproximaciones hechas para la caída libre del cuerpo.

TABLA I. Resultados del ajuste $\ln t$ en función de $\ln h$.

	Valor	Incertidumbre
Intercepto	- 0,7942	0,0006
Pendiente	0,499	0,001
El factor de correlación		$R = 0,99999$

Del valor del intercepto A se determina la aceleración de caída libre g :

$$\bar{g} = 2e^{-2A} \left[\frac{m}{s^2} \right] \approx 9,7918 \frac{m}{s^2}.$$

La incertidumbre en la medición de g se determina por medio de la expresión para la incertidumbre estándar combinada:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial A} u(A) \right]^2} = 2\bar{g}u(A).$$

Obteniéndose el valor: $u_c(g) \approx 0,01 \frac{m}{s^2}$.

Finalmente, se reporta el valor:

$$g = (9,79 \pm 0,01) \frac{m}{s^2}.$$

b) El otro análisis que se hace para los valores de los tiempos de caída para las diferentes alturas es a partir del ajuste a una recta de los valores de t^2 en función de h . Para ello se utiliza el programa Origin teniendo en cuenta la variación de la incertidumbre para cada punto (Fig. 2):

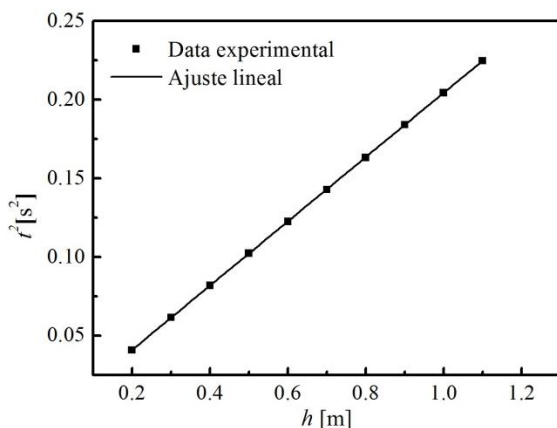


FIGURA 2. Gráfico de t^2 en función de h .

De la ecuación (1) se obtiene que:

$$t^2 = \frac{2}{g} h. \quad (3)$$

Identificando los términos de la expresión (3) con los de la recta, $y = A + Bx$ se tiene que:

$$y = t^2, \quad x = h, \quad A = 0 \quad \text{y} \quad B = \frac{2}{g}.$$

Los valores de los parámetros del ajuste se muestran en la Tabla I. El valor de la pendiente B confirma la validez de

las aproximaciones hechas para la caída libre del cuerpo.

Los valores de los parámetros del ajuste se muestran en la Tabla II.

TABLA II. Resultados del ajuste t^2 en función de h .

	Valor	Incertidumbre
Intercepto	0,00008	0,00001
Pendiente	0,2042	0,0002
El factor de correlación		$R = 0,99999$

Si se tiene en cuenta la incertidumbre que presenta el intercepto su valor se redondearía a cero, lo cual estaría en correspondencia con el modelo escogido. Un análisis análogo para redondear el intercepto afectado por una incertidumbre de su orden se realiza en [6], a partir del comportamiento aleatorio de los residuos.

El valor de la pendiente B permite determinar la aceleración de caída libre g :

$$\bar{g} = \frac{2}{B} \approx 9,794 \frac{m}{s^2}.$$

La incertidumbre estándar combinada en la medición de g , se determina por la expresión:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial B} u(B) \right]^2} = \bar{g} \frac{u(B)}{B}.$$

Obteniéndose el valor: $u_c(g) \approx 0,01 \frac{m}{s^2}$.

Finalmente, se reporta el valor:

$$g = (9,79 \pm 0,01) \frac{m}{s^2}.$$

B. Determinación de la gravedad utilizando un péndulo simple

El estudiante mide el período T de las pequeñas oscilaciones para diferentes longitudes del hilo l y se construyen los gráficos de $\ln T$ vs. $\ln l$ y de T^2 vs. l . En este método la complejidad del movimiento es mucho mayor y las aproximaciones utilizadas tienen mayor influencia en la validez del modelo empleado. Un análisis más detallado de las correcciones necesarias en un estudio más riguroso de las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple fue realizado en [7].

Oscilaciones de pequeña amplitud de un péndulo simple

Montaje Experimental:

– Se hace oscilar un péndulo simple con pequeñas amplitudes, siendo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4)$$

- El período de oscilación se determinó observando diez oscilaciones utilizando un sensor de efecto Hall acoplado a un cronómetro electrónico. El periodo se midió para diferentes longitudes del hilo, manteniendo la amplitud constante

Aproximaciones del modelo:

- Se desprecia la fricción con el aire, teniendo en cuenta las pequeñas velocidades del cuerpo, se asume entonces que las oscilaciones son de amplitud constante.
- Se considera la aceleración de la gravedad constante.
- Se desprecia la masa del hilo (considerado inextensible), en comparación con la masa de la esferita que cuelga de él.
- Se consideran las oscilaciones de pequeña amplitud, ($A \ll l$) de modo que sea válida la aproximación $\sin \theta = \theta_{rad}$. En nuestras mediciones, el péndulo oscilaba con una amplitud angular siempre inferior a 5° . En [6] se discute esta aproximación.

Las incertidumbres en los valores del período T varían con la longitud l del péndulo. Para hacer los ajustes hay que utilizar expresiones que tengan en cuenta esta variación.

a) Ajuste de los valores medidos a una recta teniendo en cuenta la dependencia $\ln T$ en función de $\ln l$ (Fig. 3):

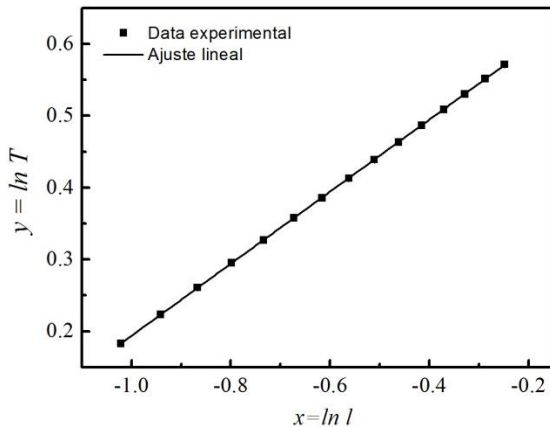


FIGURA 3. Gráfico de $\ln T$ en función de $\ln l$.

De la ecuación (4) se obtiene que:

$$\ln T = \ln \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{1}{2} \ln l \quad (5)$$

Identificando los términos de la expresión (5) con los de la recta, $y = A + Bx$ se tiene que:

$$y = \ln T, \quad x = \ln l, \quad A = \ln \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Los valores de los parámetros del ajuste se muestran en la Tabla III. El valor de la pendiente B confirma la validez del modelo escogido.

TABLA III. Resultados del ajuste $\ln T$ en función de $\ln l$.

	Valor	Incertidumbre
Intercepto	0,6954	0,0002
Pendiente	0,5015	0,003
El factor de correlación		$R = 0,99998$

El valor del intercepto A , permite una determinar la aceleración de gravedad:

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2}{e^{2A}} \approx 9,825 \frac{m}{s^2}.$$

La incertidumbre estándar combinada en la medición de g , se determina por la expresión:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial A} u(A) \right]^2} = 2\bar{g}u(A).$$

Obteniéndose el valor: $u_c(g) \approx 0,004 \frac{m}{s^2}$.

Finalmente, se obtiene el valor:

$$g = (9,825 \pm 0,004) \frac{m}{s^2}.$$

b) Ajuste de los valores de T^2 en función de l (Fig. 4):

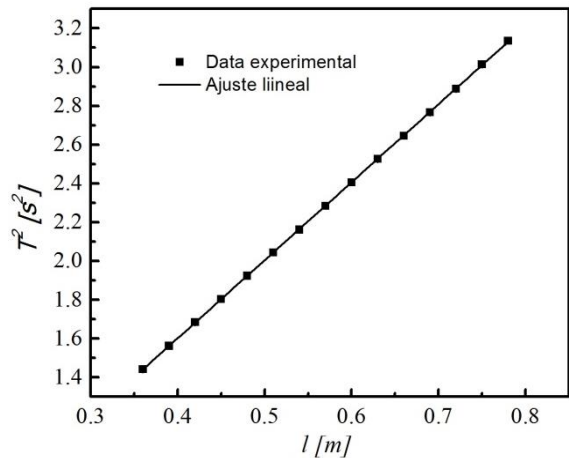


FIGURA 4. Gráfico de T^2 en función de l .

De la ecuación (4) se obtiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l.$$

Identificando los términos de la expresión (5) con los de la recta, $y = A + Bx$ se tiene que:

$$y = T^2, \quad x = l, \quad A = 0 \text{ y } B = \frac{4\pi^2}{g}.$$

Los valores de los parámetros del ajuste se muestran en la Tabla IV.

TABLA IV. Resultados del ajuste de T^2 en función de l .

	Valor	Incertidumbre
Intercepto	0,0059	0,0013
Pendiente	4,0217	0,0024
El factor de correlación		$R = 0,99998$

En el caso de la expresión utilizada, la existencia de un valor para el intercepto diferente de cero denota la existencia de un error sistemático en las mediciones. Un error sistemático en los valores medidos produce un corrimiento del intercepto pero no afecta el valor de la pendiente de la recta ajustada [8].

El valor de la pendiente B permite determinar la aceleración de gravedad g :

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2}{B} \approx 9,816 \frac{m}{s^2}.$$

La incertidumbre estándar combinada en la medición de g , se determina por la expresión:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial B} u(B) \right]^2} = \bar{g} \frac{u(B)}{B}$$

Obteniéndose el valor: $u_c(g) \approx 0,006 \frac{m}{s^2}$.

Finalmente, se reporta el valor:

$$g = (9,816 \pm 0,006) \frac{m}{s^2}.$$

C. Discusión e interpretación de los resultados

La determinación de la aceleración de la gravedad utilizando los métodos de la caída libre y las oscilaciones de un péndulo se estudia a partir de las expresiones (1) y (4), respectivamente. La linealización de estas expresiones se puede realizar de dos formas diferentes: logaritmicándolas o utilizando como variable dependiente el tiempo de caída al cuadrado o el periodo al cuadrado respectivamente.

El ajuste a una línea recta utilizando los mínimos cuadrados es una evaluación tipo A de la incertidumbre de los datos medidos. Como resultado se obtiene el valor de la pendiente y del intercepto con sus incertidumbres.

La forma logarítmica valida, por medio de la pendiente, el exponente de la expresión en los modelos utilizados. El intercepto permite determinar el valor de la gravedad, y por medio de la expresión para la incertidumbre estándar

combinada a partir de la incertidumbre del intercepto, se evalúa la incertidumbre de la gravedad.

La forma de la variable dependiente al cuadrado permite una determinación de la gravedad a partir del valor de la pendiente, y con la expresión para la incertidumbre estándar combinada a partir de la incertidumbre de la pendiente, se evalúa la incertidumbre de la gravedad.

El MMC permite determinar si está presente un error sistemático a partir de la evaluación del intercepto.

De igual manera, la incertidumbre del valor calculado para el intercepto permite validar si el error sistemático es apreciable o no. Además, hay que tener presente que la existencia de los errores sistemáticos en las rectas ajustadas no afectan los valores de la pendiente.

Ambas formas de tratamiento, para un mismo modelo de medición, reportaron valores similares.

El valor reportado en La Habana para la gravedad es:

$$g = (9,786 \pm 0,002) \frac{m}{s^2},$$

esto evidencia que el método de la caída libre es más exacto pero a la vez es el menos preciso. Esto puede estar relacionado con la medición del tiempo. En la caída libre aunque se repite el experimento para cada altura, se mide para un solo evento. Mientras que el periodo se midió para diez oscilaciones, con el mismo tipo de cronómetro, lo cual le da una cifra significativa más.

Como resultado, la medición realizada con el péndulo es más precisión pero menos exacta.

III. CONCLUSIONES

El procesamiento de estos datos experimentales permite hacer cuatro gráficos diferentes, determinar el valor de las magnitudes estudiadas y sus incertidumbres a partir del uso del método de los mínimos cuadrados y comparar la fiabilidad de los métodos utilizados.

En los casos presentados los gráficos logarítmicos permitieron validar el modelo elegido para los rangos de alturas o longitudes con las que se experimentaron.

El procesamiento de los datos por el método de los mínimos cuadrados permite obtener, de manera indirecta, los valores de la aceleración de la gravedad en el laboratorio. La comparación de estos resultados con el valor reportado para la aceleración de la gravedad permite evaluar la exactitud y la precisión del método utilizado para medir.

REFERENCIAS

- [1] JCGM 2008. *Evaluación de datos de medición. Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida (GUM)*. Centro Español de Metrología (2009)
- [2] Calzadilla, O., Carreras, C., y Yuste, M., *Nociones de incertidumbre en la medición: según la GUM*, (Editorial Universitaria Félix Varela, La Habana, 2015).
- [3] Aguiar, C. E. y Laudares, F., *Listening to the coefficient*

of restitution and the gravitational acceleration of a bouncing ball, *Am. J. Phys.* **71**, 499-501 (2003).

[4] White, J. A., Medina, A., Román, F. L. y Velazco, S., Universidad de Salamanca, *A measurement of g. Listening to falling balls*, *The Physics Teacher* **45**, 175-177 (2007).

[5] Bevington, P. R. y Robinson D. K., *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, 3.rd ed., (McGraw-Hill Co. Inc., México, 2003).

[6] Nethercott Quintin T. y Evelynn Walton M.,

<www.physics.utah.edu/~ewalton/lab_report.pdf>

(Consultado en mayo de 2016).

[7] Nelson, R. A., Olsson M. G., *The Pendulum. Rich physics from a simple system*, *Am. J. Phys.* **54**, 112-121 (1986).

[8] Borroto, H., Vidal, J., Machado, D., Carreras, C. y Calzadilla, O., *Errores aleatorios y sistemáticos en las rectas ajustadas. Actas VII Taller Iberoamericano de Enseñanza de la física Universitaria y XXXIII Curso Centroamericano y del Caribe de Física*. 7-11 de marzo La Habana, Cuba. 2016.