

# Diseño y construcción de una máquina de torsión de bajo costo para la determinación del módulo de corte



ISSN 1870-9095

**Israel Rivera Martínez, Fernando Daniel Fernández Galván, Patricia Sánchez Cruz, Arturo F. Méndez Sánchez, Leonor Pérez Trejo**

*Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Av. Instituto Politécnico Nacional, Edificio 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, Ciudad de México, México.*

**E-mail:** lperez@ipn.mx

(Recibido el 18 de mayo de 2020, aceptado el 31 de agosto de 2020)

## Resumen

Un tema que se estudia teóricamente en los cursos introductorios de Física es aquel que analiza la torsión de una barra metálica, a partir de la cual es posible entender el concepto del módulo de torsión o de corte. No obstante, realizar el experimento empleando maquinaria comercial resulta muy caro, ya que ésta puede alcanzar un costo de varios miles de dólares. En este trabajo, se presenta el diseño y construcción de una máquina de torsión estática en donde se implementó un sistema de medición angular usando un mecanismo acondicionador de señal para lectura digital del voltaje y un potenciómetro lineal multivoltas, lo que permite aumentar la resolución en la medición del ángulo de torsión. La verificación del funcionamiento del diseño construido se realizó para un conjunto de cuatro varillas de distintos metales, los resultados muestran una diferencia menor al 5% con respecto a valores reportados en la literatura. Este prototipo de torsión estática se propone para ser fabricado por estudiantes permitiendo el desarrollo de sus habilidades experimentales.

**Palabras clave:** Módulo de torsión, torsión estática, diseño de máquina de torsión, medición angular.

## Abstract

A subject that is theoretically studied in introductory Physics courses is one that analyzes the torsion of a metal bar, from which it is possible to understand the concept of the torsion or shear modulus. However, carrying out the experiment using commercial machinery is very expensive, since it can cost several thousand dollars. In this work, we present the design and construction of a static torsion machine where an angular measurement system was implemented using a signal conditioning mechanism for digital reading of the voltage and a multi-turn linear potentiometer, which allows increasing the resolution in the torsion angle measurement. The verification of the operation of the built design was carried out for a set of four bars of different metals, the results show a difference of less than 5% with respect to values reported in the literature. This static torsion prototype is proposed to be manufactured by students allowing the development of their experimental skills.

**Keywords:** shear modulus, static torsion, design and construction of a static torsion machine.

## I. INTRODUCCIÓN

En los cursos introductorios de Física de nivel medio superior y superior, se estudia la teoría de la elasticidad lineal en materiales sólidos, en donde las fuerzas aplicadas a éstos producen deformaciones finitas y lineales, a diferencia de los materiales idealizados como cuerpos rígidos e indeformables que se estudian en la mecánica. Un tema particular que se analiza en esta teoría, es el concepto del módulo de rigidez o módulo de corte o torsión [1, 2, 3].

Particularmente, para entender este concepto, se analiza la torsión o giro que experimenta una barra de metal sobre su eje longitudinal cuando se aplica un par de fuerzas

(momento de torsión o torque). A partir de analizar este experimento, es posible determinar el módulo de rigidez y entender los esfuerzos de corte a los que está sometida una barra bajo torsión y las deformaciones que se provocan.

Este experimento de torsión tiene relevancia en escuelas de Física, pero también en escuelas de ingeniería (mecánica, civil, industrial, eléctrica), ya que tiene aplicación directa en el diseño y la elaboración de tornillos, en ejes de motores, varillas para transmisión de automóvil, resortes de torsión, cigüeñales entre otros. No obstante, es poco común realizar de manera experimental la torsión de una barra debido principalmente a la magnitud de la fuerza

que se necesita aplicar para visualizar un cambio angular y al alto costo del equipo para realizar este experimento.

El principal problema para analizar la torsión de una varilla, es la baja sensibilidad que se tiene al medir el desplazamiento angular que experimenta la varilla. Es por ello que en este trabajo se propone el diseño y la construcción de una máquina de torsión estática, en donde se implementa un mecanismo de lectura digital del voltaje utilizando un potenciómetro lineal multivoltas lo que permite mejorar la resolución en la medición del ángulo de torsión por lo que este diseño lo hace superior respecto a otros diseños [4]. El costo del diseño y su manufactura es bajo si se compara con el de las máquinas comerciales, además, puede ser fabricado por los mismos estudiantes poniéndolos en situaciones que les permita tener un aprendizaje significativo por lo que se espera que contribuya al desarrollo de sus habilidades experimentales [5].

## II. TEORÍA

Para el análisis de la torsión que experimenta una varilla cilíndrica como la mostrada en la Figura 1, se considera que está sometida a una fuerza de torsión por uno de sus extremos, mientras que el otro extremo está fijo. En la figura se incluye una línea punteada que ejemplifica la condición inicial de la varilla sin torcerse, mientras que la línea continua es resultado de la torsión que experimenta bajo un torque generado por el par de fuerzas tangenciales a la superficie transversal del cilindro. La torsión de la varilla se refleja en los ángulos  $\theta$  y  $\gamma$ . Esta situación se analiza si se considera que el material está constituido de conjunto de cilindros anidados del mismo material de longitud  $L$ .

Si se toma un cilindro interno de radio  $r$ , de espesor  $dr$  y se desenrolla, se tiene un prisma de base rectangular como el de la figura 2. El esfuerzo de corte  $\tau$  en el prisma está definido como la razón del diferencial de fuerza aplicado  $dF$  y el diferencial de área  $dA$ ,

$$\tau = \frac{dF}{dA} = \frac{dF}{2\pi r dr} \quad (1)$$

Además, de la misma figura se observa que:

$$\tan \gamma = \frac{\Delta x}{L} \approx \gamma \quad (2)$$

Dicha aproximación es válida para ángulos pequeños en radianes. Donde  $\gamma$  es la deformación unitaria por corte y  $\Delta x$  la longitud de arco deformada.

Por otra parte, de la Figura 1 se conoce que la longitud de arco es igual a  $r\theta$ , esto es,

$$\gamma = \frac{\Delta x}{L} = \frac{r\theta}{L} \quad (3)$$

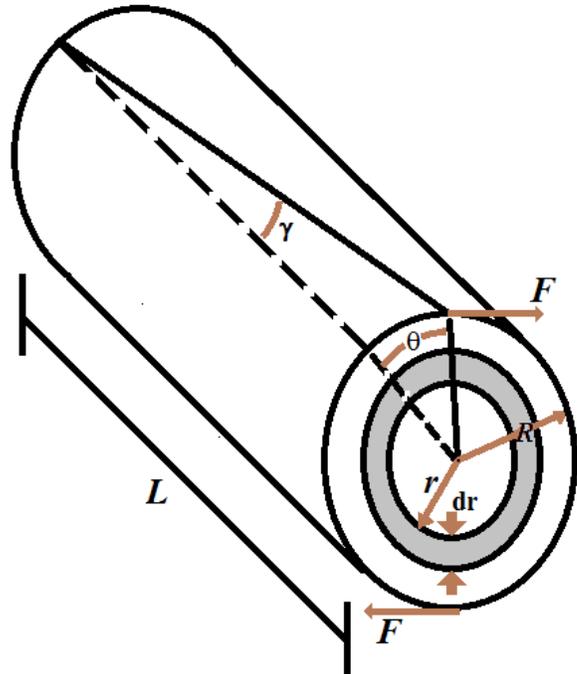


FIGURA 1. Torsión de una varilla cilíndrica bajo la acción de un par de fuerzas por uno de sus extremos. En el interior de la varilla se ilustra la torsión de un cilindro de radio  $r$  y espesor  $dr$ .

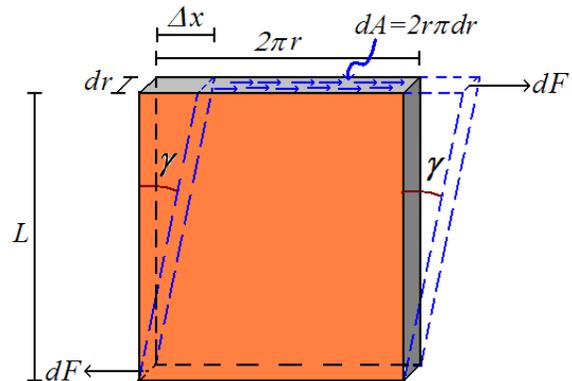


FIGURA 2 Cilindro desenrollado de radio  $r$  y espesor  $dr$ . En la parte superior se localiza un elemento diferencial de fuerza  $dF$  que genera un esfuerzo cortante.

Donde  $\theta$  corresponde al ángulo de torsión generado en el extremo libre de la varilla. Así, el módulo de corte o torsión ( $\mu$ ) está definido por:

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{LdF}{2\pi\theta r^2 dr} \quad (4)$$

De ahí que el elemento diferencial de fuerza tiene la forma:

$$dF = \frac{2\pi\theta\mu r^2 dr}{L} \quad (5)$$

Además, si se recuerda que la magnitud del par de fuerza o torque ( $dM$ ) está dado por,

$$dM = r dF = \frac{2\pi\theta\mu r^3 dr}{L} \quad (6)$$

Entonces mediante una integración radial se tiene que el momento de torsión total (Torque)  $M$  sobre toda la varilla queda determinado mediante:

$$M = \int r dF = \int_0^R \frac{2\pi\theta\mu R^3 dr}{L} \quad (7)$$

Así, la expresión que relaciona el momento de torsión total y el desplazamiento angular es:

$$M = \frac{\pi\mu R^4 \theta}{2 L} \quad (8)$$

Por lo tanto, para determinar el módulo de corte, se requiere aplicar un torque ( $M$ ) a uno de los extremos de una varilla cilíndrica y medir el ángulo ( $\theta$ ) que se genera en el extremo donde se aplicó el torque.

## II. DESARROLLO DE LA MÁQUINA DE TORSIÓN

El esquema más simple de una máquina de torsión que es factible de reproducir a bajo costo se muestra en la Figura 3. Este consiste en la torsión de una varilla de metal horizontal de longitud  $L$  que se encuentra fija por uno de sus extremos y en el otro extremo tiene una polea de radio  $R'$  mediante la cual se le aplica una carga. La principal desventaja de esta máquina es la baja sensibilidad que se tiene al medir el ángulo de torsión  $\theta$  que experimenta la varilla pues se emplea un transportador cuya resolución es de un grado y para generar esta torsión se necesita un peso de al menos 0.5kg cuando se analizan varillas de acero de 0.006m de diámetro.

En este caso el torque ( $M$ ) está determinado por,

$$M = R' F = R' mg \quad (9)$$

Donde,  $R'$  es el radio de la polea y  $F$  es la carga aplicada, que está explicitada mediante el peso de la masa  $m$ .

La propuesta que se hace en este trabajo se dividió en dos etapas principales: el diseño y construcción del prototipo y la implementación de la medición angular mejorada. Estas etapas se describen a continuación.

### A. Diseño y construcción del prototipo

El diseño tomó como referencia a la figura 3 y en la construcción se consideró que los soportes y la polea del

prototipo fueran de aluminio debido a la facilidad de maquinado. En la figura 4 se muestra un diagrama del prototipo con sus dimensiones correspondientes. Además, se consideró que éste tuviera la facilidad de adaptar varillas de distinto diámetro y distinta longitud. Por lo que se eligieron broqueros para sujetar las varillas y manejar distintos diámetros. En este caso la apertura máxima de los broqueros es de media pulgada y refiere a varillas con diámetros menores a  $1.2 \times 10^{-2}m$ .

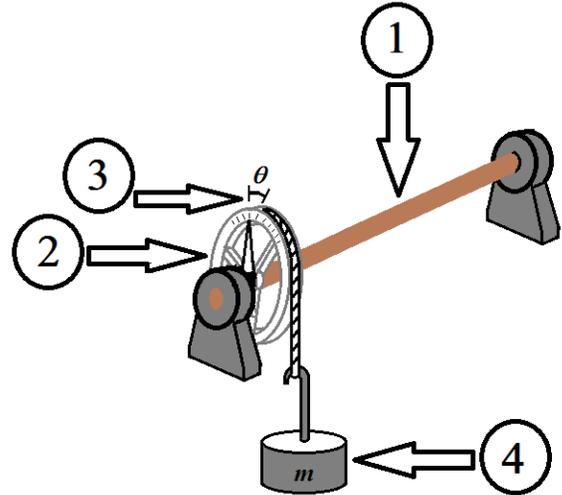


FIGURA 3. Máquina para generar una torsión estática en una varilla cilíndrica, 1) varilla de torsión de longitud  $L$ , 2) polea, 3) transportador, 4) carga aplicada.

Para estudiar varillas de diferente longitud, se implementó un sistema móvil que permitiera al broquero de sujeción fija colocarse a diferentes distancias. Para esto, el sistema móvil se desplaza sobre un par de varillas de soporte de  $1.25 \times 10^{-2}m$  de diámetro que están fijas sobre la base de soporte. La longitud de las varillas a analizar puede variar entre 0.12-0.63m, aunque el sistema permite acoplar varillas de mayor longitud sin que sea necesario cortarlas.

Por otra parte, se consideró que el prototipo tuviera el medidor angular de torsión tradicional, esto es, se acopló un par de transportadores y dos agujas acopladas a la varilla de torsión para efectos de verificación del funcionamiento empleando ambos sistemas.

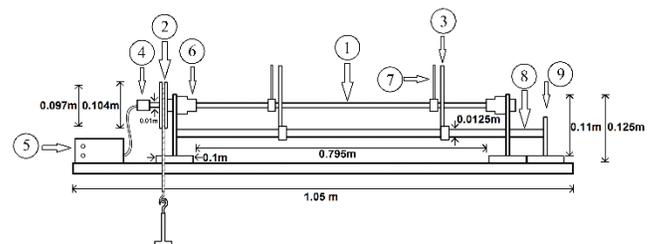


FIGURA 4. Dimensiones y partes de la máquina de torsión construida. 1) varilla de torsión, 2) polea  $D_p = 0.097m$ , 3) transportador de 180 grados, 4) potenciómetro, 5) circuito analógico digital de medición angular, 6) broquero de media pulgada, 7) aguja para medición angular, 8) barra de soporte, 9) base de soporte.

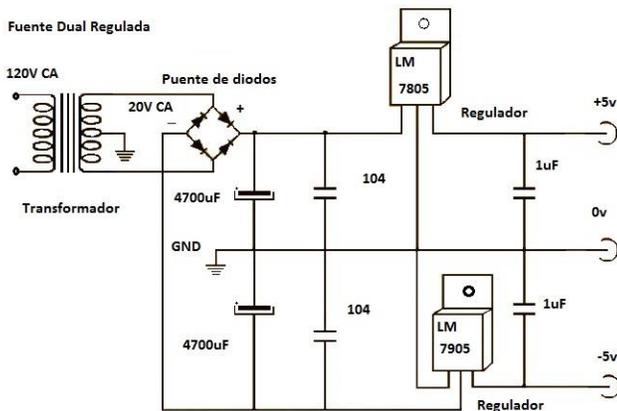
### B. Implementación de la medición angular mejorada

Los medidores de torsión angular tradicionales consisten de una aguja acoplada a la varilla bajo estudio, la cual gira en función de la torsión generada. Esta aguja junto con un transportador fijo permite determinar el desplazamiento angular. Sin embargo, la resolución máxima que se obtiene es de 1 grado. Por ello, se propone emplear un potenciómetro angular de 10 vueltas (POMV) que permite variar su resistencia interna y acoplado al extremo móvil de la varilla permite mejorar la resolución angular. Las etapas consideradas para leer la información angular son cuatro y se muestran en la figura 5.



**FIGURA 5.** Etapas implementadas para aumentar la resolución de la lectura angular empleando un POMV.

La etapa de potencia (Ver figura 6) consiste primeramente en la reducción de voltaje de 120V a 15V mediante un transformador reductor seguido de un cambio de corriente alterna a corriente directa (De 15V CA a 15V de CD) empleando un puente de diodos rectificadores. Para alimentar al potenciómetro y a un amplificador operacional se empleó un circuito regulador de voltaje, este componente ayuda a reducir el voltaje de CD de 15V a 5V, ya que el sistema completo trabaja a 5V. Además, dado que el voltaje al encender provoca un pico de corriente, es necesario colocar capacitores que ayuden a evitar que el regulador se dañe. Los reguladores que se usan son el LM7805 que nos regresa un voltaje positivo de 5V, mientras que el LM7905 nos arroja un voltaje negativo de -5V. La necesidad de incluir voltajes positivos y negativos, se debe a que son requeridos en el amplificador operacional que se implementa.



**FIGURA 6.** Etapa de potencia, rectificación y regulación de voltaje.

La etapa de medición se requiere para evaluar el ángulo de torsión que experimenta la varilla. Para esta etapa el POMV

suministra un voltaje de 0V cuando se coloca en el origen, mientras que si se gira hasta alcanzar las 10 vueltas se obtiene un voltaje de 5V en total. Además, se sabe que el POMV trabaja de manera lineal, así que se puede obtener la función que relaciona el voltaje y la posición angular, la cual se determinó a partir de dos puntos,

$$p_1 = (0,0V) \text{ y } p_2 = (10,5V). \tag{10}$$

Donde el punto  $p_1$  corresponde a la vuelta cero y voltaje cero, y  $p_2$  es el punto donde alcanza las diez vueltas y un voltaje de 5V. La función que modela este comportamiento es,

$$z(x) = \frac{1}{2}x, \tag{11}$$

donde  $z(x)$  es el voltaje de lectura y  $x$  es el número de vueltas. Entonces cuando el potenciómetro gira una vuelta (360 grados), el voltaje es de 0.5V, análogamente, para un giro de 90 grados (1/4 de vuelta) el voltaje es de 0.125V. En este caso se considera un ángulo inicial de 90° como referencia de calibración (varilla sin torsión) y al girar la varilla se espera que ésta finalice a lo más en un ángulo de 270° (varilla torcida un ángulo de 180°), por lo que el intervalo de voltaje es de 0.125V a 0.375V.

La etapa de amplificación surge debido a que el intervalo de voltaje es reducido, por ello se requiere un intervalo más amplio, en donde el voltaje se encuentre en un nuevo intervalo de 0-5V. Para esto, se usa un circuito acondicionador de señal (CAS) para sensores lineales. En este caso se requiere que para un voltaje de lectura de  $z_1 = 0.125V$ , la función  $f$  de voltaje sea tal que,  $f(z_1) = 0V$ , mientras que cuando se tenga el voltaje de lectura  $z_2 = 0.375V$ , la función tome un valor de  $f(z_2) = 5V$ . Con estas condiciones se construye la función lineal de voltaje  $f$ , esto es,

$$f(z) = 20z - 2.5V. \tag{12}$$

Donde la ordenada al origen tiene un voltaje de -2.5V. Esta ecuación amplifica el intervalo de voltaje y con ésta, se calcula un arreglo de amplificadores operacionales que consta de un inversor y un amplificador. La ecuación que modela la amplificación del voltaje es:

$$f(z) = -\frac{R_f}{R_1}z - \frac{R_f}{R_2}E_{cd}. \tag{13}$$

Donde  $E_{cd}$  corresponde a un voltaje de alimentación. Al comparar la ecuación (13) con la ecuación (12) se tiene que,

$$\frac{R_f}{R_1} = 20 \text{ y } -\frac{R_f}{R_2}E_{cd} = -2.5V. \tag{14}$$

Si se fija la variable  $R_1 = 10k\Omega$ , entonces  $R_f = 200k\Omega$  y si  $E_{cd} = 5V$ , entonces  $\frac{R_f}{R_2} = 0.5V$  y  $R_2 = 400k\Omega$ . Con estos resultados se procede al armado del CAS de la figura 7, el

cual requiere del circuito de potencia explicitado en la figura 6.

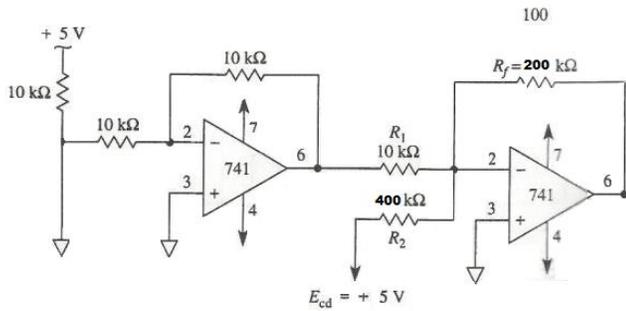


FIGURA 7. Diagrama del circuito acondicionador (CAS).

Finalmente, la etapa de lectura emplea un mecanismo de lectura analógica-digital, usando un microcontrolador PIC (Peripheral Interface Controller) con salida de mensajes a una pantalla LCD. Para la programación del PIC, se consideró que la lectura pueda leer a 10 bits (1024 datos) y haciendo uso del valor base, se tiene una lectura mínima de  $1u = 0.00488V (= 5V/1024)$  acoplando el CAS y el potenciómetro, se logró ampliar el intervalo de medición angular a una resolución de 0.125 grados, esto es, 6 veces más de lo que tradicionalmente se mide empleando el sistema del transportador y su aguja. En la Figura 8 se ilustra el diseño en 3D del prototipo incluyendo el circuito de medición angular digital.

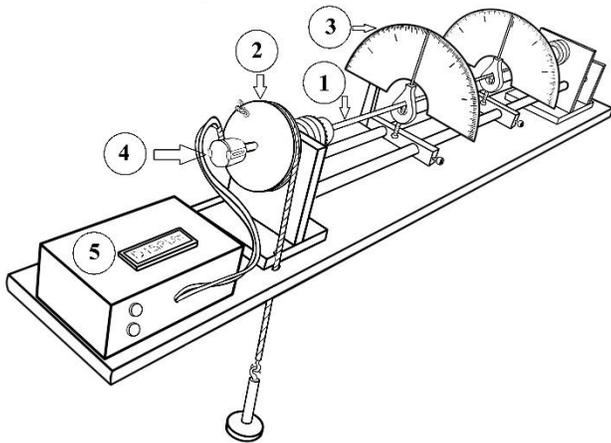


FIGURA 8. Diseño en 3D de la máquina de torsión de bajo costo, las partes principales son: 1) varilla de torsión, 2) polea, 3) transportador, 4) potenciómetro POMV y 5) circuito analógico digital de medición angular.

### III. VERIFICACIÓN DEL EQUIPO

Una vez que fue construida la máquina de torsión, se procedió a realizar la verificación del buen funcionamiento del prototipo. El diseño ya construido se muestra en la figura 9. Este se fijó al a mesa mediante un par de prensas tipo C.

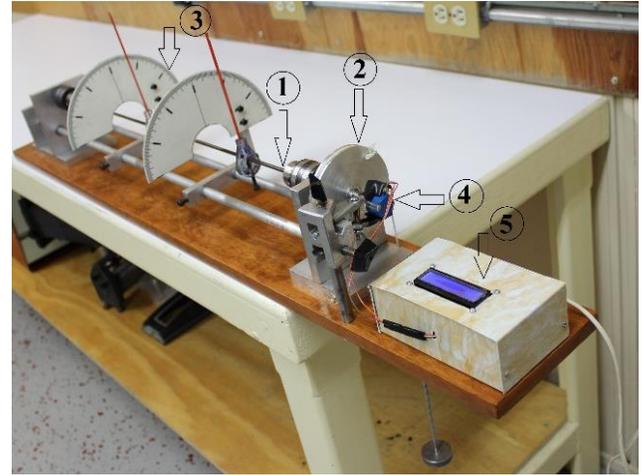


FIGURA 9. Prototipo construido para torsión, las partes principales son: 1) varilla de torsión, 2) polea, 3) transportador, 4) potenciómetro POMV y 5) circuito analógico digital de medición angular.

Para la verificación, se caracterizó un conjunto de varillas de distintos materiales y cuyas dimensiones se presentan en la Tabla I.

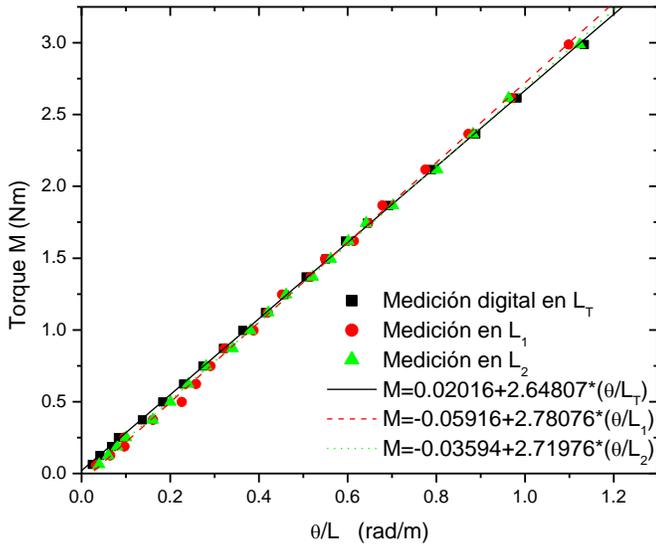
TABLA I. Varillas comerciales empleadas para la determinación del módulo de torsión.

Material	Longitud de la varilla (m)	Diámetro de la varilla (m)
Cobre	0.57	0.0065
Latón	0.57	0.0065
Aluminio	0.57	0.0065
Hierro	0.58	0.0049
Hierro	0.44	0.0049

En la figura 10 se muestra la gráfica de verificación correspondiente a la varilla de hierro. En esta se puede ver tres conjuntos de datos, dos de ellos pertenecen a los indicadores angulares tradicionales colocados a dos distancias distintas,  $L_1=0.27m$  y  $L_2=0.435m$  y el tercer conjunto de datos corresponde al medidor digital implementado a una longitud total de la varilla  $L_T=0.58m$ . En los tres casos se aprecia un comportamiento lineal, lo que está en buen acuerdo con la ecuación 8. Asimismo, en esta gráfica se incluyen los ajustes por mínimos cuadrados correspondientes a cada indicador. Es de mencionar que la medición digital es la que presentó un mejor coeficiente de correlación ( $r_{corr}=0.9998$ ) en comparación con los indicadores tradicionales ( $r_{corr L1}=0.9939$  y  $r_{corr L2}=0.9975$ ).

A partir de comparar la ecuación de ajuste y la expresión obtenida en la ecuación (8), se calculó el módulo de torsión correspondiente, ya que se identifica que la pendiente en el caso del medidor digital es igual a,

$$\frac{\pi\mu R^4}{2} = 2.648. \quad (15)$$



**FIGURA 10.** Gráfica de verificación de torque vs la razón  $(\theta/L)$  para la varilla de hierro, el comportamiento es lineal como lo sugiere la ecuación 8.

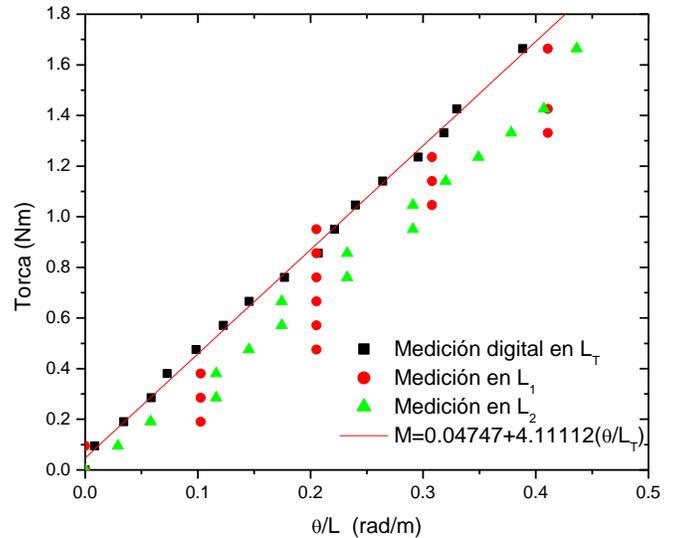
De esta igualdad, se despeja el módulo de torsión. Los valores calculados se presentan en la tabla II para los tres medidores utilizados. Esto muestra la reproducibilidad de los valores con una diferencia máxima del 4.8%. Es de mencionarse que el medidor digital es el que obtiene el valor más pequeño, lo cual se debe a la implementación del dispositivo mejorado.

**TABLA II.** Obtención del módulo de torsión de una varilla de hierro.

Medidor	Módulo de Torsión (GPa)
Medidor Digital $L_T$	$46.789 \pm 2.160$
Medidor $L_1$	$49.134 \pm 2.547$
Medidor $L_2$	$48.056 \pm 2.547$
Diferencia porcentual	4.8%

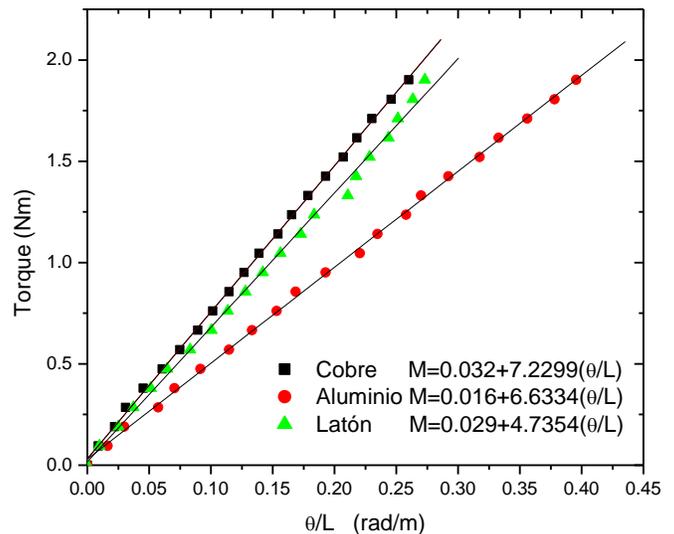
Posteriormente, se analizó la eficacia y mejora del sensor digital propuesto para una situación de medición en donde se tiene una varilla corta de hierro de longitud  $L=0.44m$ , en donde obviamente el desplazamiento angular es menor y por tanto más difícil de medir directamente. La figura 11 muestra los resultados obtenidos de torque y desplazamiento angular. En ella puede observarse que las mediciones en  $L_1$  y  $L_2$  presentan mayor dificultad para determinar el ángulo de desplazamiento, ya que para distintos torques los medidores no cambian su lectura, por el contrario, sobresale la utilidad del medidor digital ( $L_T$ ), Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 14, No. 3, Sept. 2020

pues al tener una medición angular mejorada, el comportamiento observado siempre fue monótono creciente y se puede determinar el módulo de corte aplicando el ajuste por mínimos cuadrados.



**FIGURA 11.** Gráfica de torque vs la razón  $(\theta/L)$  para una varilla corta, se destaca la medición del desplazamiento angular mejorado ( $L_T$ ), con respecto a las mediciones tradicionales ( $L_1$  y  $L_2$ ) cuyo comportamiento es no monótono.

Finalmente, se realizó la caracterización de otros materiales, cobre, aluminio y latón con la máquina construida. En la figura 12 se muestra la gráfica de caracterización correspondiente y se evidencia que los comportamientos observados están en buen acuerdo con la teoría. En la gráfica se incluyen los ajustes correspondientes a cada curva.



**FIGURA 12.** Gráfica de torque ( $M$ ) vs la razón  $(\theta/L)$  obtenida para Cobre, Aluminio y Latón.

Asimismo, se determinaron los módulos de torsión para las otras varillas. Los valores están especificados en la tabla III. Es de destacar que a excepción del aluminio, todos los valores caen en intervalo que reporta la literatura [6] y las diferencias porcentuales estimadas (menores al 5%), fueron evaluadas considerando el valor medio de los intervalos de los módulos de referencia.

**TABLA III.** Obtención del módulo de torsión y su comparación.

Varilla	Evaluación del Módulo de Torsión (GPa)	Módulo de Torsión de referencia (GPa)	Diferencia de [6] porcentual
Cobre	41.26	40-46.2	4.2%
Aluminio	27.02	25.5-26.53 (puro y aleaciones)	3.8%
Latón	37.85	36.6-41.3	2.82%
Hierro	46.78	35.8-56.5	1.3%

#### IV. CONCLUSIONES

Se diseñó y construyó una máquina de torsión estática para la determinación del módulo de corte de varillas cilíndricas. Con la versatilidad de que se pueden estudiar varillas de distinto diámetro y longitud.

Se implementó un sistema de medición angular mejorada, mediante un mecanismo acondicionador de señal para lectura digital de voltaje utilizando un potenciómetro lineal multivoltajes, lo que permitió realizar mediciones angulares con una resolución seis veces mayor que el sistema angular tradicional. El costo de la máquina resultó del orden de los 200 dólares y se verificó su buen funcionamiento obteniéndose diferencias porcentuales menores al 5% respecto de las reportadas en las referencias.

Se propone que el diseño y construcción de este tipo de máquina de torsión estática, puede ser fabricada por

estudiantes permitiendo el desarrollo de sus habilidades experimentales.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores Méndez Sánchez y Pérez Trejo son becarios COFAA y EDD del IPN.

#### REFERENCIAS

- [1] Tippens, P. E., *Física, Conceptos y aplicaciones*, (Mc Graw Hill/ Intermamericana Editores S.A. de C. V., 7ª Edición, Chile, 2007).
- [2] Tipler P. A., Mosca G., *Física para ciencia y la tecnología, Mécanica, Vol. I, oscilaciones y ondas, termodinámica*, (Reverté S. A., España, 2010).
- [3] Alonso, M. Finn, E. J., *Física*, (Addison-Wesley Iberoamericana, 1ª Edición, Estados Unidos de América, 1995).
- [4] Máquina de torsión modelo HSM2 <http://www.p-a-hilton.co.uk/products/HSM2-Torsion-of-Bars>, fecha de consulta 10 de Julio de 2017.
- [5] Rueda Morales, G. L., Pérez Trejo, L., González Álvarez, L. M. de G., Méndez Sánchez, A. F., Miramontes Lira, R. C., Díaz Valdés, E., *Estrategia basada en competencias para la construcción natural del conocimiento en un curso de física experimental*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 58-62 (2013).
- [6] Lai W. M., D. Rubin, E. Krempl, *introduction to continuum mechanics*, (ButterworthHeinemann, 3ª edición, Estados Unidos, 1999).